А. М. Охрімовський, П. А. Комозинський,
О. В. Подшивалова, О. М. Чугай

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА

2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

А. М. Охрімовський, П. А. Комозинський,
О. В. Подшивалова, О. М. Чугай

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник
до практичних занять з фізики

Харків "ХАІ" 2010

УДК 531 + 536

Механіка. Молекулярна фізика. Термодинаміка : навч. посіб. до практ. занять з фізики /А. М. Охрімовський, П. А. Комозинський, О. В. Подшивалова, О. М. Чугай. — Х. : Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2010. – 108 с.

Подано варіанти задач для дев'яти практичних занять з фізики, що охоплюють такі теми: "Механіка", "Механічні коливання та хвилі", "Молекулярна фізика", "Основи термодинаміки", "Явища переносу". До кожної теми наведено таблицю з формулами, а також приклади розв'язання типових задач, що надасть суттєву допомогу студентам під час самостійної роботи.

Для студентів, що навчаються у вищих технічних навчальних закладах III-IV рівнів акредитації.

Іл. 2. Табл. 9. Бібліогр.: 9 назв

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. О. І. П'ятак,
д-р фіз.-мат. наук, проф. Р. В. Вовк

ПЕРЕДМОВА

Автори посібника поставили за мету допомогти студентам у засвоєнні основних методів розв'язання задач з фізики. Розв'язання конкретних фізичних задач спонукає студентів до самостійної творчої роботи, учить аналізувати явища, виявляти головні фактори, нехтувати неважливими деталями. Завдяки цьому розв'язання задач наближається до моделі наукового професійного дослідження.

Запропоновані задачі охоплюють широкий перелік розділів курсу "Експериментальна та теоретична фізика", зокрема: "Кінематика поступального руху", "Динаміка поступального руху", "Кінематика та динаміка обертального руху", "Робота. Енергія. Закони збереження", "Елементи спеціальної теорії відносності", "Механічні коливання та хвилі", " Молекулярна фізика", "Основи термодинаміки", "Явища переносу". Під час підготовки цього посібника було використано задачі з книг [1–3] та ін. За основу було взято навчальний посібник [4].

У цьому виданні суттєво перероблено формулювання деяких задач, систематизовано розподіл задач за розділами, виправлено недоліки й помилки, допущені раніше. Посібник доповнено задачами для повторення шкільної програми.

Усі розділи посібника призначені для закріплення на практиці теоретичних знань, здобутих студентами на лекціях. Вони містять основні означення й закони, що зв'язують фізичні величини, які мають відношення до теми розділу. Також наведено приклади розв'язання задач. Задачі всіх розділів поділено на варіанти по п'ять задач у кожному. Більшість розділів містить по чотири варіанти задач. Відповіді до задач основного курсу подано в кінці посібника, щоб стимулювати студента самостійно знайти розв'язок.

Кожний розділ (крім останнього) має підрозділ, що містить задачі для повторення шкільної програми. Мета цієї частини посібника — допомогти студентам, що не складали іспитів з фізики під час вступу до вузу, самостійно згадати шкільний матеріал, розв'язуючи відповідні задачі.

У кінці посібника, перед відповідями до задач основного курсу, наведено додаток зі значеннями деяких фізичних величин. Крім того, додаток містить деякі формули диференціального й інтегрального обчислення.

Під час розв'язання задач з механіки автори рекомендують, якщо інше не передбачено умовою, для прискорення вільного падіння g використовувати значення 10 м/с^2.

Автори вдячні викладачам кафедри фізики Національного аерокосмічного університету "ХАІ" й особисто завідувачу кафедри А. О. Тарану за зауваження, рекомендації й побажання щодо змісту й оформлення цього посібника.

Розділ 1
КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
1.1	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	Радіус-вектор	$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти; x, y, z – координати
1.2	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Модуль радіуса-вектора	
1.3	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$	Вектор швидкості	$v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$
1.4	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	Модуль вектора швидкості	
1.5	$v = \frac{ds}{dt}$, $s = \int\limits_0^t v(t)\,dt$	Зв'язок шляху з модулем вектора швидкості	
1.6	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$	Вектор прискорення	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$

1	2	3	4
1.7	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Модуль вектора прискорення	
1.8	$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$	Тангенціальна й нормальна складові вектора прискорення	$\vec{\tau}$ – одиничний вектор, дотичний до траєкторії; $\vec{n}$ – одиничний вектор, нормальний до траєкторії; R – радіус кривизни траєкторії
1.9	$\vec{v} = \vec{v}(0) + \int\limits_0^t \vec{a}(t)\,dt$	Вектор швидкості	
1.10	$\vec{r} = \vec{r}(0) + \int\limits_0^t \vec{v}(t)\,dt$	Радіус-вектор	

Приклад 1.1. Радіус-вектор матеріальної точки задано у вигляді

$$\vec{r} = \vec{i}\,A\cos\omega t + \vec{j}\,B\sin\omega t,$$

де A, B і ω — сталі величини. Який вигляд має траєкторія руху точки. Визначити вектори швидкості й прискорення та їхні модулі, тангенціальну й нормальну складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії як функції часу.

Розв'язання. Порівнявши рівняння для заданого радіуса-вектора із співвідношенням (1.1) таблиці, маємо

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\sin\omega t,$$

звідки $\frac{x}{A} = \cos\omega t$, $\frac{y}{B} = \sin\omega t$. Сума квадратів правих частин цих співвідношень дає одиницю. Ліві ж частини дадуть рівняння траєкторії руху точки

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Траєкторія руху — еліпс із центром на початку координат і півосями A і B.

Диференціюючи радіус-вектор за часом, визначаємо вектор швидкості та його модуль:

$$\vec{v} = \omega(-\vec{i}\,A\sin\omega t + \vec{j}\,B\cos\omega t);$$

$$v = \omega\sqrt{A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}.$$

Після повторного диференціювання за часом визначаємо вектор прискорення та його модуль:

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2(\vec{i}\,A\cos\omega t + \vec{j}\,B\sin\omega t);$$

$$a = \omega^2\,r = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}.$$

Диференціювання модуля швидкості за часом дає величину вектора тангенціального прискорення

$$a_\tau = \omega^3\frac{(A^2 - B^2)}{2v}\sin 2\omega t.$$

Нормальну компоненту прискорення визначаємо за теоремою Піфагора:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\omega^3 AB}{v}.$$

Із формули $a_n = v^2/R$ знаходимо радіус кривизни траєкторії

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{\omega AB}.$$

Приклад 1.2. Тіло кинуто горизонтально з висоти h зі швидкістю v_0. Визначити вектор швидкості тіла та його радіус-вектор як функції часу.

Розв'язання. Для розв'язання задачі виберемо систему координат таким чином, щоб початок відліку був розташований в основі перпендикуляра, який опущено з точки кидання тіла на Землю. Напрямляючи вісь x по горизонталі, а вісь y вертикально вверх, одержимо як відому величину прискорення тіла $\vec{a} = -g\vec{j}$, де $g = 10$ м/с^2, $\vec{j}$ — одиничний вектор уздовж осі y. Початкові умови для координат і компонент швидкості мають вигляд $x(0) = 0$, $y(0) = h$, $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$. Ця задача є оберненою задачею кінематики, тому її розв'язують методом інтегрування.

Компоненти прискорення визначаються формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Інтегрування обох частин цих рівнянь дає

$$v_x = v_x(0) + \int_0^t a_x\, dt = v_x(0) = v_0,\ v_y = v_y(0) + \int_0^t a_y\, dt = -g\,t.$$

Таким чином, у вибраній системі відліку вектор швидкості тіла має вигляд

$$\vec{v} = v_0\vec{i} - g\,t\vec{j}.$$

Щоб визначити координати x і y як функції часу, необхідно виконати інтегрування відповідних компонент швидкості v_x і v_y за часом:

$$x = x(0) + \int_0^t v_x\, dt = v_0\, t; \quad y = y(0) + \int_0^t v_y\, dt = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Остаточно радіус-вектор тіла має вигляд

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = v_0 t\,\vec{i} + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}.$$

Приклад 1.3. Шлях s, який проходить тіло, залежить від часу t й описується законом

$$s = s_0 \ln \frac{t + t_0}{t_0},$$

де s_0 і t_0 — сталі величини в одиницях довжини й часу відповідно. Знайти модуль вектора швидкості й тангенціальне прискорення як функції часу.

Розв'язання. Використовуючи зв'язок, заданий формулами (1.5) і (1.8), знаходимо

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{s_0}{t + t_0}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{s_0}{(t + t_0)^2}\,.$$

Приклад 1.4. Модуль вектора швидкості тіла v залежить від пройденого ним шляху s:

$$v = v_0 \frac{s_0 - s}{s_0},$$

де v_0 і s_0 — сталі величини в одиницях швидкості й довжини відповідно. Визначити швидкість тіла й пройдений ним шлях як функції часу. Уважати, що в початковий момент часу шлях дорівнює нулю ($s(0) = 0$).

Розв'язання. Скористаємося означенням модуля швидкості через пройдений шлях:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{s_0 - s}{s_0}.$$

Щоб розв'язати це рівняння, необхідно провести розділення невідомих, для чого помножимо праву й ліву його частини на

$\frac{dt}{s-s_0}$. У результаті отримаємо еквівалентне рівняння в диференціалах:

$$\frac{ds}{s-s_0} = -\frac{v_0}{s_0}\,dt.$$

Оскільки права частина рівняння залежить лише від шляху s, а ліва — лише від часу t (усі інші величини — сталі), то кожну з них можна зінтегрувати незалежно:

$$\int\limits_{s(0)}^{s} \frac{ds}{s-s_0} = -\int\limits_{0}^{t} \frac{v_0}{s_0}\,dt.$$

Після інтегрування, ураховуючи, що $s(0) = 0$, отримуємо

$$\ln\left(\frac{s_0 - s}{s_0}\right) = -\frac{v_0}{s_0}\,t.$$

Розв'язавши це рівняння відносно s, знаходимо

$$s = s_0\left(1 - \exp\left(-\frac{v_0}{s_0}\,t\right)\right).$$

Швидкість як функцію часу визначимо, узявши похідну від шляху за часом:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{v_0}{s_0}t\right).$$

Слід зазначити, що в початковий момент часу тіло мало швидкість v_0, яка з часом експоненціально зменшується до нуля. При цьому тіло проходить шлях, величина якого наближається до s_0.

Варіант 1.1

1.1.1. Залежність шляху, пройденого тілом, від часу задано рівнянням $s = -B\,t + C\,t^2$, де $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Знайти середню швидкість $\langle v \rangle$ і середнє прискорення $\langle a \rangle$ тіла для інтервалу часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с.

1.1.2. Радіус-вектор матеріальної точки має вигляд $\vec{r} = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j}$, де $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Накреслити траєкторію руху точки. Визначити вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, їхні модулі v і a, нормальну a_n і тангенціальну a_τ складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії R як функції часу.

1.1.3. Вектор швидкості руху тіла задано рівнянням $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, де α та β — сталі величини. У початковий момент часу тіло мало координати $x_0 = y_0 = 0$. Визначити радіус-вектор, вектори швидкості й прискорення тіла як функції часу.

1.1.4. За проміжок часу $\tau = 10$ с точка пройшла половину кола радіусом $R = 1$ м. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$, модуль середнього вектора швидкості $|\langle \vec{v} \rangle|$, модуль середнього вектора повного прискорення $|\langle \vec{a} \rangle|$. Рух точки вважати рівномірним.

1.1.5. Швидкість тіла, яке рухається за інерцією у в'язкому середовищі, змінюється зі спливанням часу за законом $v = v_0 e^{-\nu t}$, де v_0 — початкова швидкість, ν — стала величина. Знайти залежності шляху й прискорення тіла від часу. Побудувати графіки функцій $v(t)$ і $s(t)$. Прийняти, що в початковий момент часу $s_0 = 0$.

Варіант 1.2

1.2.1. Залежність шляху, пройденого тілом, від часу описується рівнянням $s = Bt + Ct^2$, де $B = 2$ м/с, $C = 1$ м/с^2. Визначити середню швидкість й середнє прискорення тіла за десять секунд ($t_f = 10$ с) його руху.

1.2.2. Залежність радіуса-вектора частинки від часу задано законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k}$. Визначити вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, їхні модулі v і a, нормальну a_n і тангенціальну a_τ складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії R як функції часу.

1.2.3. Вектор швидкості частинки $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$. Визначити вектор прискорення та його модуль, вектор переміщення та його модуль за перші дві секунди ($t_f = 2$ с) руху частинки.

1.2.4. Точка рухається по дузі кола радіусом R. Залежність швидкості її руху v від пройденого шляху s задано рівнянням $v = k\sqrt{s}$, де k — стала. Визначити залежності $s(t)$, $v(t)$ та $a(t)$, приймаючи шлях у початковий момент часу таким, що дорівнює нулю. Знайти кут α між вектором повного прискорення й вектором швидкості залежно від часу t.

1.2.5. Точка рухається в площині так, що її нормальна й тангенціальна складові прискорення відповідно дорівнюють $a_n = 2\cos\pi t$, $a_\tau = 2\sin\pi t$. Ураховуючи, що в початковий момент часу шлях $s(0)$ і швидкість $v(0)$ дорівнюють нулю, визначити як функції часу шлях, швидкість і радіус кривизни траєкторії.

Варіант 1.3

1.3.1. Залежність шляху s, пройденого тілом, від часу задано рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0.14$ м/с^2, $D = 0.01$ м/с^3. Через який час t_f після початку руху тіло матиме прискорення $a_f = 1$ м/с^2? Знайти середнє прискорення на цьому проміжку часу.

1.3.2. Радіус-вектор тіла задано у вигляді $\vec{r} = 2\cos\omega t\,\vec{i} + 2\sin\omega t\,\vec{j}$, $\omega = \text{const}$. Який вигляд має траєкторія руху тіла? Визначити вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, їхні модулі v та a, нормальну a_n і тангенціальну a_τ складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії R як функції часу.

1.3.3. Вектор швидкості руху задано рівнянням $\vec{v} = 2\,t\,\vec{i} + 3\,t^2\,\vec{j} + 4\,t^3\,\vec{k}$. Визначити радіус-вектор тіла як функцію часу, ураховуючи, що $x(0) = y(0) = z(0) = 0$. Знайти модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}|$, здійсненого тілом до моменту часу $t_1 = 2$ с.

1.3.4. Знайти шлях і швидкість руху тіла як функції часу, якщо його прискорення $a = \frac{dv}{dt} = -rv$, де r — стала величина, v — швидкість тіла, $s(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

1.3.5. Компоненти вектора швидкості руху тіла змінюються за законами

$$v_x = v_0 \cos\omega t, \qquad v_y = v_0 \sin\omega t,$$

де v_0 і ω — константи. Визначити вектори й модулі швидкості та прискорення, а також кут α між векторами $\vec{a}$ і $\vec{v}$.

Варіант 1.4

1.4.1. Частинка в момент $t_0 = 0$ вийшла з початку координат і далі рухалася прямолінійно таким чином, що її швидкість змінювалася зі спливанням часу за законом

$$v = v_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

де v_0 і τ — сталі величини. Визначити для руху частинки шлях і прискорення як функції часу.

1.4.2. Радіус-вектор частинки задано рівнянням

$$\vec{r} = 3\,t^2\,\vec{i} + 4\,t^2\,\vec{j} + 7\,\vec{k}.$$

Визначити вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, їхні модулі v та a, нормальну a_n і тангенціальну a_τ складові прискорення як функції часу. Знайти шлях, який пройде частинка за десять секунд ($t_f = 10$ с).

1.4.3. Тіло кинуто горизонтально з висоти h зі швидкістю v_0. Визначити радіус-вектор $\vec{r}$, вектори швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, їхні модулі v і a, нормальну a_n і тангенціальну a_τ складові прискорення та радіус кривизни траєкторії як функції часу.

1.4.4. Частинка рухається прямолінійно. Залежність швидкості її руху від шляху підпорядкована закону $v = k\sqrt{s}$, де k — стала величина. Ураховуючи, що в початковий момент часу $s(0) = 0$, визначити швидкість і прискорення частинки як функції часу, а також середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде шлях s_1 з моменту початку руху.

1.4.5. Точка рухається по площині так, що її тангенціальне прискорення $a_\tau = c$, а нормальне прискорення $a_n = bt^4$ (c і b — сталі величини). У момент часу $t = 0$ точка перебувала у стані спокою. Визначити радіус кривизни траєкторії R і повне прискорення a як функції пройденого шляху s. Прийняти, що при $t = 0$ шлях дорівнює нулю.

Задачі для повторення шкільної програми

1.Ш.1. Між двома пунктами, розташованими на протилежних берегах річки на відстані 100 км один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за чотири години, а проти течії — за десять годин. Визначити швидкість v_1 течії річки та швидкість v_2 катера відносно води.

Відповідь: $v_1 = 7.5$ км/год; $v_2 = 17.5$ км/год.

1.Ш.2. Спортсмен перепливає річку шириною d. Під яким кутом до течії він повинен пливти, щоб потрапити на протилежний берег за найкоротший час? Де він у цьому випадку пристане до берега і яку відстань s пропливе, якщо швидкість течії v_1, а швидкість спортсмена відносно води v_2?

Відповідь: $\alpha = 90°$; $s_1 = \frac{v_1}{v_2}d$; $s = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{v_2}d$.

1.Ш.3. На дистанції довжиною $s = 1500$ м одночасно стартують два бігуни. Бігун А пробіг першу половину шляху зі швидкістю $v_1 = 4$ м/с, а другу – зі швидкістю $v_2 = 6$ м/с. Бігун В біг першу половину часу, витраченого на подолання всієї дистанції, зі швидкістю $v_1 = 4$ м/с, а другу – зі швидкістю $v_2 = 6$ м/с. Який з бігунів фінішує першим? На яку відстань він обжене другого бігуна?

Відповідь: першим фінішує бігун В; $\Delta s = 75$ м.

1.Ш.4. Рух матеріальних точок задано такими рівняннями: а) $x_1 = 10t + 0.4t^2$; б) $x_2 = 2t - t^2$. Написати залежності $v_x = v_x(t)$ для кожної точки; побудувати графіки цих залежностей, визначити вид руху в кожному випадку.

Відповідь: а) $v_{1x} = 10 + 0.8t$, прискорений; б) $v_{2x} = 2 - 2t$, сповільнений спочатку, але прискорений після першої секунди.

1.Ш.5. Відстань між двома станціями поїзд проїхав за 20 хвилин ($t = 20$ хв) із середньою швидкістю $v_c = 72$ км/год. Загальна тривалість рівномірних розгону й гальмування становить $t_1 = 4$ хв, а решту часу поїзд рухався рівномірно. Яку швидкість v мав поїзд під час рівномірного руху?

Відповідь: $v = \frac{2v_c t}{2t - t_1} = 80$ км/год.

1.Ш.6. Гальмівний шлях автомобіля, що рухається зі швидкістю $v_1 = 15$ км/год, становить $s_1 = 1.5$ м. Визначити гальмівний шлях s_2 цього автомобіля, якщо він рухатиметься зі швидкістю $v_2 = 90$ км/год. Прискорення в обох випадках однакове.

Відповідь: $s_2 = 54$ м.

1.Ш.7. Тіло кинули вертикально вверх з початковою швидкістю $v_{01} = 40$ м/с. Одночасно з найвищої точки, якої може досягти перше тіло, вертикально вниз кинули друге тіло зі швидкістю $v_{02} = 40$ м/с. На якій висоті зустрінуться тіла? Які швидкості вони матимуть?

Відповідь: $h = 35$ м, $v_1 = 30$ м/с, $v_2 = 50$ м/с.

1.Ш.8. Протягом якого часу і з якої висоти падало тіло, якщо за останні дві секунди воно пролетіло 60 м? Для обчислень взяти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: $t = 4$ с, $h = 80$ м.

1.Ш.9. Відстань між двома зупинками моторний човен проходить за течією річки за 10 хв, а проти течії — за 30 хв. За який час цю відстань пропливе рятувальний круг, що упав у воду?

Відповідь: $t_3 = 30$ хв.

1.Ш.10. Відстань від пункту А до пункту В автомобіль проїхав зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, а назад повертався зі швидкістю $v_2 = 20$ км/год. Яка середня швидкість автомобіля?

Відповідь: $v_c = 30$ км/год.

1.Ш.11. Рух двох мотоциклістів задано рівняннями $x_1 = 15 + t^2$ і $x_2 = 8t$. Описати рух кожного мотоцикліста, визначити час і місце їх зустрічі.

Відповідь: $t_1 = 3$ с, $t_2 = 5$ с; $x_1' = 24$ м, $x_2' = 40$ м.

1.Ш.12. Кабіна ліфта спочатку рівноприскорено піднімається вверх протягом 4 с, досягаючи швидкості 4 м/с. Далі вона рухається рівномірно протягом 8 с, а останні 3 с сповільнює хід до повної зупинки. Побудувати графіки залежностей швидкості й прискорення ліфта від часу. Визначити переміщення ліфта за весь час руху.

Відповідь: $s = 46$ м.

1.Ш.13. Тіло скинули з висоти $h_1 = 10$ м. У той самий момент друге тіло кинули з висоти $h_2 = 20$ м вертикально вниз, надавши йому певної швидкості. Тіла впали на землю одночасно. Визначити початкову швидкість другого тіла.

Відповідь: $v_{02} = 7$ м/с.

1.Ш.14. Тіло, що вільно падає, проходить останню третину свого шляху за 1.1 с. Знайти висоту, з якої падало тіло, і весь час падіння. Для обчислень взяти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: $H = 180$ м, $t = 6$ с.

Розділ 2
ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
2.1	$\vec{p} = m\vec{v}$	Імпульс тіла (матеріальної точки)	$\vec{v}$ – швидкість; m – маса
2.2	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\Sigma}$	Другий закон Ньютона в універсальній формі	$\vec{F}_{\Sigma}$ – рівнодійна сил, що діють на точку
2.3	$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} =$ $= m\vec{a} = \vec{F}_{\Sigma}$	Другий закон Ньютона в диференціальній формі	$\vec{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки
2.4	$M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}_{\Sigma}$	Теорема про рух центра мас системи матеріальних точок	M – загальна маса системи
2.5	$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$	Радіус-вектор центра мас	$\vec{r}_i$ – радіуси-вектори складових системи

1	2	3	4
2.6	$\vec{V}_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{v}_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{\vec{p}_\Sigma}{M}$	Швидкість центра мас системи N матеріальних точок	$\vec{v}_i$ і m_i – відповідно швидкості й маси складових системи; $\vec{p}_\Sigma$ – загальний імпульс системи
2.7	$\vec{F} = m\vec{g}$	Сила тяжіння	$\vec{g}$ – прискорення вільного падіння
2.8	$\vec{F}_A = -\vec{g}\rho V$	Виштовхувальна сила (закон Архімеда)	ρ – густина рідини (газу); V – об'єм витісненої рідини
2.9	$\vec{F} = -k\vec{x}$	Сила пружної взаємодії (закон Гука)	k – коефіцієнт пружності; x – подовження
2.10	$\vec{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$	Сила гравітаційної взаємодії (закон всесвітнього тяжіння)	G – гравітаційна стала; m_1 і m_2 – маси тіл; $\vec{r}_{12}$ – радіус вектор другого тіла відносно першого
2.11	$F = PS$	Сила тиску	P – тиск; S – площа поверхні
2.12	$F = T$	Сила натягу нитки	Діє вздовж нитки
2.13	$F = N$	Сила реакції опори	Перпендикулярна до поверхні зіткнення

1	2	3	4
2.14	$F = \mu N$	Сила тертя ковзання	Діє в напрямку, протилежному напрямку руху; μ – коефіцієнт тертя
2.15	$F_{\text{р}} = u\frac{dm}{dt}$	Реактивна сила	u – відносна швидкість витікання газів
2.16	$\vec{F} = q\vec{E}$	Сила електричної взаємодії	q – заряд; $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля
2.17	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	Сила магнітної взаємодії	$\vec{B}$ – вектор магнітної індукції

Приклад 2.1. На тіло діє сила

$$\vec{F} = F_0\left(3\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\vec{i} + 5\left(\frac{t}{\tau}\right)^4\vec{j}\right),$$

де $F_0 = 5$ Н, $\tau = 1$ с. Визначити зміну вектора імпульсу тіла за проміжок часу $0 \le t \le \tau$.

Розв'язання. Використавши другий закон Ньютона в диференціальній формі, маємо

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt.$$

Для визначення зміни імпульсу за скінченний відрізок часу необхідно зінтегрувати останнє рівняння, підставивши в нього залежності сили від часу:

$$\Delta\vec{p} = \int\limits_0^\tau F_0\left(3\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\vec{i} + 5\left(\frac{t}{\tau}\right)^4\vec{j}\right)dt = F_0\tau(\vec{i} + \vec{j}).$$

Після підстановки числових значень маємо $\Delta\vec{p} = 5\,(\vec{i} + \vec{j})$ — зміну імпульсу тіла, кг·м/с.

Приклад 2.2. Автомобіль рушає з місця стоянки й рухається під дією сталої сили тяги двигуна F_0. Ураховуючи, що загальна сила опору пропорційна швидкості ($\vec{F}_{оп} = -\alpha\vec{v}$, де α — стала величина, кг/с), визначити швидкість автомобіля як функцію часу та його граничну швидкість.

Розв'язання. Основне рівняння динаміки руху для автомобіля має вигляд

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - \alpha v,$$

звідки

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\left(v - \frac{F_0}{\alpha}\right).$$

Щоб розв'язати це диференціальне рівняння, необхідно провести розділення змінних. Для цього помножимо праву й ліву його частини на dt і поділимо на $v - \frac{F_0}{\alpha}$. Як результат одержимо рівнозначне рівняння

$$\frac{dv}{v - \frac{F_0}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}\,dt,$$

кожна частина якого залежить лише від однієї невідомої. Отже, кожна з цих частин може бути зінтегрована незалежно одна від одної:

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{v - \frac{F_0}{\alpha}} = -\int\limits_0^t \frac{\alpha}{m}\,dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\ln\left(\frac{\frac{F_0}{\alpha} - v}{\frac{F_0}{\alpha}}\right) = -\frac{\alpha t}{m}.$$

Після потенціювання остаточно отримуємо рівняння для швидкості автомобіля як функції часу:

$$v = \frac{F_0}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha\, t}{m}\right)\right).$$

Граничну швидкість автомобіля визначаємо при $t \to \infty$:

$$v_\infty = \frac{F_0}{\alpha}.$$

Останній вираз узгоджується з розв'язком основного рівняння руху автомобіля, в якому праву частину прирівняно до 0. (При виході на граничну швидкість зміна швидкості (прискорення) прямує до нуля.)

Приклад 2.3. На тіло одиничної маси, яке перебуває в спокої й знаходиться на початку координат, у нульовий момент часу починає діяти сила, вектор якої залежить від часу відповідно до закону $\vec{F} = 2\,\vec{i} + 6t\,\vec{j}$. Визначити вигляд траєкторії руху тіла.

Розв'язання. Оскільки маса тіла $m = 1$, то основне рівняння динаміки його руху в компонентах має вигляд

$$\frac{dv_x}{dt} = 2, \quad \frac{dv_y}{dt} = 6t.$$

Інтегруючи ці рівняння, одержуємо

$$v_x = v_x(0) + \int_0^t 2\,dt, \quad v_y = v_y(0) + \int_0^t 6t\,dt.$$

Оскільки в початковий момент часу тіло було в стані спокою, то $v_x(0) = v_y(0) = 0$, звідки

$$v_x = 2\,t, \quad v_y = 3\,t^2.$$

Для визначення залежності координат тіла від часу скористаємося означенням компонент швидкості:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\,t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 3\,t^2.$$

Зінтегрувавши ці рівняння, маємо

$$x = x(0) + \int_0^t 2\,t\,dt, \quad y = y(0) + \int_0^t 3\,t^2\,dt.$$

Згідно з умовою спочатку тіло знаходилося на початку координат, отже, $x(0) = y(0) = 0$. Як результат маємо

$$x = t^2, \quad y = t^3.$$

Ці співвідношення задають траєкторію руху тіла в параметричному вигляді. Виразивши з першого рівняння параметр t через координату x ($t = \sqrt{x}$) і підставивши його в друге, отримаємо рівняння траєкторії в декартових координатах:

$$y = x^{3/2}.$$

Варіант 2.1

2.1.1. На тіло масою m, яке лежить на рівній горизонтальній площині, у момент $t_0 = 0$ почала діяти сила, яка залежить від часу: $F = kt$, де k — стала величина. Напрям цієї сили і лінія горизонту утворюють весь час кут α. Знайти швидкість тіла в момент відриву від площини та шлях, який пройшло тіло до цього моменту.

2.1.2. При русі парашутиста у повітрі силу опору можна вважати заданою у вигляді $\vec{F}_{on} = -\alpha\vec{v}$, де $\alpha = \mathrm{const}$, v — швидкість. Уважаючи, що в момент розкриття парашута початкова швидкість руху парашутиста дорівнює нулю, а його маса m, визначити швидкість парашутиста та шлях як функції часу. Знайти швидкість усталеного руху.

2.1.3. На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя μ лежить тіло масою m. У момент часу $t = 0$ до нього приклали горизонтальну силу, яка залежить від часу: $F = bt$, де

$b = \text{const}$. Визначити шлях, який пройшло тіло за перші t секунд дії цієї сили.

2.1.4. Вектор сили задано у вигляді $\vec{F} = 4t^3\vec{i} + 2t\vec{j}$. Визначити зміну імпульсу під дією цієї сили за проміжок часу $0 \le t \le \tau$.

2.1.5. Знайти положення центра мас системи Земля – Місяць. Середня відстань між Землею й Місяцем $L_{Mm} = 3.84 \cdot 10^5$ км, маса Землі $M = 5.96 \cdot 10^{24}$ кг, маса Місяця $m = 7.3 \cdot 10^{22}$ кг.

Варіант 2.2

2.2.1. Знайти модуль і вектор сили, яка діє на частинку масою m під час її руху в площині xy за законом $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, де A, B, ω — сталі величини.

2.2.2. Кульку масою m розташовано у високій посудині з деякою рідиною й відпущено без поштовху. Густина кульки в n разів більша за густину рідини. Під час руху кульки виникає сила опору середовища, пропорційна швидкості руху: $\vec{F} = -r\vec{v}$. Визначити швидкість кульки як функцію часу.

2.2.3. На тіло масою m, яке рівномірно рухалося вздовж осі x зі швидкістю $v_{0x} = v_0$, у деякий момент часу почала діяти сила $\vec{F} = b\,t\,\vec{j}$, де $b = \text{const}$. Уважаючи, що в цей момент тіло знаходилося в точці $x_0 = y_0 = 0$, записати рівняння траєкторії руху тіла в площині xy.

2.2.4. На частинку, яка перебувала в спокої, у момент часу $t_0 = 0$ почала діяти сила $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin\frac{\pi t}{\tau}$, де $\vec{F}_0$ — сталий вектор, τ — час дії сили. Визначити імпульс частинки після закінчення дії сили.

2.2.5. Посередині невагомого стрижня довжиною $2l$ розміщено невелику кульку масою m, на його кінцях — кульки з масами $2m$ і $3m$. Визначити положення центра мас цієї системи відносно її геометричного центра.

Варіант 2.3

2.3.1. Маленькій шайбі, розміщеній на верхній грані клина (кут нахилу до горизонту α) на відстані h від ребра, у початковий момент часу надали швидкості v_0 паралельно до ребра клина. Нехтуючи тертям, визначити траєкторію руху шайби в площині клина. Уважати, що $x(0) = 0$, $y(0) = h$.

2.3.2. Човен під парусом розвив швидкість v_0, а потім парус було спущено. Уважаючи, що сила опору руху човна пропорційна швидкості $\vec{F} = -r\vec{v}$, де $r = \mathrm{const}$, визначити швидкість руху човна й пройдений шлях як функції часу.

2.3.3. Вектор сили задано у вигляді $\vec{F} = 6\,t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$. Для тіла одиничної маси визначити траєкторію руху при початкових умовах $x(0) = y(0) = 0$, $v_x(0) = v_y(0) = 0$.

2.3.4. Тіло масою m кинуто під кутом до лінії горизонту. Під час руху тіла по траєкторії між точками A і B зміна імпульсу за модулем становить $|\Delta\vec{p}|$. Визначити час польоту тіла між точками A і B.

2.3.5. Густина тонкого стрижня довжиною l лінійно збільшується зі збільшенням відстані від одного з його кінців: $\rho = \rho_0(1 + \frac{x}{l})$. Визначити положення центра мас стрижня.

Варіант 2.4

2.4.1. Тіло кинуто з висоти h із початковою швидкістю v_0, напрямленою під кутом α до лінії горизонту. Нехтуючи опором повітря, записати рівняння траєкторії руху тіла.

2.4.2. На тіло масою m, яке рухається прямолінійно з постійною швидкістю v_0, у деякий момент часу в напрямку руху починає діяти сила $F = \alpha/2v$, де $\alpha = \mathrm{const}$, v — миттєва швидкість тіла. Визначити залежність між швидкістю тіла і часом.

2.4.3. Матеріальна точка масою m починає рухатися в момент часу $t_0 = 0$ під дією сили $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega t$, де $\vec{F}_0$ і ω — сталі величини. Визначити шлях, який проходить матеріальна точка, залежно від часу.

2.4.4. Шнур довжиною l покладено на горизонтальну дошку одним кінцем через отвір у дошці так, що частина шнура, яка звисає, має довжину l_0. У початковий момент часу шнур відпускають, і він починає ковзати по дошці. Нехтуючи тертям, визначити, з якою швидкістю зісковзне з дошки кінець шнура.

2.4.5. Визначити положення центра мас однорідного конуса висотою H.

Задачі для повторення шкільної програми

2.Ш.1. Рух матеріальної точки описується рівнянням $x = 5 - 8t + 4t^2$. Уважаючи, що маса точки дорівнює 2 кг, визначити її імпульс через 2 с і 4 с після початку відліку часу, а також силу, що зумовила це змінення імпульсу.

Відповідь: $p_1 = 16$ кг·м/с; $p_2 = 48$ кг·м/с; $F = 16$ Н.

2.Ш.2. Тепловоз масою 100 т тягне два вагони, кожен з яких має масу 50 т, з прискоренням 0.1 м/с^2. Визначити силу тяги тепловоза й силу натягу зчепів, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює 0.006.

Відповідь: $F_{\text{т}} = 32$ кН, $F_{\text{н}1} = 16$ кН, $F_{\text{н}2} = 8$ кН.

2.Ш.3. Визначити силу натягу троса ліфта масою 500 кг на початку і в кінці підйому, якщо прискорення в обох випадках становить 2 м/с^2. Для обчислень взяти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: $F_{\text{н}1} = 6$ кН, $F_{\text{н}2} = 4$ кН.

2.Ш.4. Вантаж масою m за допомогою нитки, перекинутої через невагомий блок, тягне по похилій площині вантаж такої самої маси. Визначити прискорення, з яким рухаються вантажі, якщо похила площина утворює з лінією горизонту кут

$\alpha = 30°$, а коефіцієнт тертя $\mu = 0.05$.

Відповідь: $a = 2.2$ м/с^2.

2.Ш.5. До кінців нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвішено два тіла масою $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг. З яким прискоренням рухаються тіла і з якою силою при цьому натягуватиметься нитка? З яким прискоренням рухатиметься тіло масою $m_1 = 1$ кг, якщо до другого кінця нитки замість підвішеного тіла масою $m_2 = 2$ кг прикласти силу $F = 20$ Н? Масою блока й тертям знехтувати.

Відповідь: $a_1 = g/3$, $F_н = 13$ Н, $a_2 = g$.

2.Ш.6. Дві пружини однакової довжини, які скріплено одними кінцями, розтягують за вільні кінці руками. Пружина жорсткістю 100 Н/м подовжилася на 5 см. Яка жорсткість другої пружини, якщо вона подовжилася на 1 см?

Відповідь: $k = 0.5$ кН/м.

2.Ш.7. Снаряд, що летів у горизонтальному напрямі зі швидкістю $v = 700$ м/с, розірвався на дві частини масами $m_1 = 3$ кг і $m_2 = 5$ кг. Напрям руху більшого куска залишився після вибуху горизонтальним, а його швидкість збільшилася до $v_2 = 1200$ м/с. Визначити швидкість меншої частини й кут між напрямами руху частин.

Відповідь: $v_1 = 133.3$ м/с, $\alpha = \pi$.

2.Ш.8. Порожній вантажний автомобіль масою 4 т почав рухатися з прискоренням 0.3 м/с^2. Якою має бути маса вантажу, щоб автомобіль, маючи таку саму силу тяги, рушав з місця з прискоренням 0.2 м/с^2?

Відповідь: $m_в = 2$ т.

2.Ш.9. На гладкій горизонтальній поверхні лежать три зв'язаних ниткою тіла з однаковими масами $m = 1$ кг. На перше тіло діє сила $F = 9$ Н, напрямлена горизонтально. Знайти прискорення, з яким рухатиметься система цих тіл, а також натяг кожної з ниток. Тертя не враховувати.

Відповідь: $a = 3$ м/с^2, $F_{12} = 6$ Н, $F_{23} = 3$ Н.

2.Ш.10. На вершині похилої площини, що утворює з лінією горизонту кут $\alpha = 30°$, закріплено блок, через який перекинуто нерозтяжну нитку. До одного кінця нитки прив'язано вантаж масою $m_1 = 6$ кг, який лежить на похилій площині. До другого кінця нитки підвішено вантаж масою $m_2 = 5$ кг. З яким прискоренням рухається ця система тіл і чому дорівнює натяг ниток, якщо коефіцієнт ковзання вантажу m_1 по площині становить $\mu = 0.3$?

Відповідь: $a \approx 0.4$ м/с^2, $F_{\text{н}} = 47$ Н.

2.Ш.11. Ліфт спускається з прискоренням $|a| = 3$ м/с^2. Знайти силу тиску вантажу масою $m = 50$ кг на підлогу ліфта.

Відповідь: $F_{\text{т}} = 350$ Н.

2.Ш.12. Дві гирі масою $m_1 = 5$ кг і $m_2 = 3$ кг висять на кінцях нитки, перекинутої через легкий блок, причому легша гиря знаходиться на $h = 10$ см нижче від масивнішої. Через який час гирі будуть на одній висоті, якщо надати гирям можливості рухатися під дією сили тяжіння?

Відповідь: $t \approx 0.2$ с.

2.Ш.13. Визначити подовження буксирного троса, жорсткість якого 100 кН/м, під час буксирування автомобіля масою 2 т з прискоренням 0.5 м/с^2. Тертям знехтувати.

Відповідь: $\Delta x = 1$ см.

2.Ш.14. Човен масою $m_1 = 140$ кг стоїть нерухомо в стоячій воді. Людина масою $m_2 = 60$ кг, що знаходиться в човні, переходить з носа на корму. При цьому човен змістився на відстань $\Delta s = 1.2$ м. Визначити довжину човна, нехтуючи опором води.

Відповідь: $l = 4$ м.

Розділ 3

КІНЕМАТИКА Й ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
3.1	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	Миттєва кутова швидкість	$d\vec{\varphi}$ – елементарний кут повороту
3.2	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Кутове прискорення	Похідна кутової швидкості за часом
3.3	$\nu = \frac{N}{t}$	Частота рівномірного обертання	N – повна кількість обертів за час t
3.4	$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu}$	Період рівномірного обертання	
3.5	$s = \varphi R$	Шлях, пройдений точкою по дузі кола	φ – кут повороту в радіанах; R – радіус кола
3.6	$v = \omega R$	Модуль лінійної швидкості точки	ω – кутова швидкість; R – радіус траєкторії

1	2	3	4
3.7	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	Вектор лінійної швидкості	$\vec{r}$ – радіус-вектор точки, проведений від осі обертання
3.8	$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \varepsilon\, R$	Модуль вектора тангенціального прискорення точки	ε – кутове прискорення
3.9	$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$	Вектор тангенціального прискорення	
3.10	$a_n = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$	Модуль вектора нормального прискорення	
3.11	$\vec{\omega} = \text{const}$, $\vec{\varepsilon} = 0$, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$	Кінематичні рівняння рівномірного обертання	φ_0 – кут повороту в початковий момент часу
3.12	$\vec{\varepsilon} = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	Кінематичні рівняння рівноприскореного обертання	ω_0 – початкова кутова швидкість
3.13	$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt$, $\omega = \omega_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon(t)\, dt$	Загальні кінематичні рівняння обертального руху тіла ($\varepsilon \neq \text{const}$)	

1	2	3	4
3.14	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $M = Fr\sin\alpha$	Вектор моменту сили та його модуль	$\vec{F}$ – вектор сили; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки; α – кут між $\vec{F}$ і $\vec{r}$
3.15	$J = mr^2$	Момент інерції матеріальної точки	m – маса матеріальної точки; r – відстань від осі обертання до точки
3.16	$J = \sum m_i r_i^2$	Момент інерції системи матеріальних точок	
3.17	$J_z = \int\limits_m r^2\,dm = \int\limits_V \rho r^2\,dV$	Момент інерції абсолютно твердого тіла відносно осі z	ρ – густина тіла; dV – елементарний об'єм
3.18	а) $J_z = \frac{1}{12}ml^2$; б) $J_z = \frac{1}{3}ml^2$	Момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, яка є перпендикулярною до нього й проходить через: а) центр мас; б) кінець	m – маса стрижня; l – довжина стрижня

1	2	3	4
3.19	$J_z = mR^2$	Момент інерції тонкого кільця відносно осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до площини кільця	m – маса кільця; R – радіус кільця
3.20	$J_z = \frac{1}{2}mR^2$	Момент інерції круглого однорідного циліндра відносно його осі симетрії	m – маса циліндра; R – радіус циліндра
3.21	$J_z = \frac{2}{5}mR^2$	Момент інерції однорідної кулі відносно осі, що проходить через її центр	m – маса кулі; R – радіус кулі
3.22	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	Вектор моменту імпульсу матеріальної точки	$\vec{p}$ – імпульс матеріальної точки; $\vec{r}$ – її радіус-вектор
3.23	$L_\omega = J_\omega \omega$	Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання	J_ω – момент інерції відносно осі обертання; ω – кутова швидкість

1	2	3	4
3.24	$J_{\text{O}} = J_{\text{C}} + ma^2$	Момент інерції тіла відносно деякої осі (теорема Штейнера)	J_{C} – момент інерції тіла відносно осі, яка є паралельною до вибраної й проходить через центр мас тіла; m – маса тіла; a – відстань між осями
3.25	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$	Рівняння моментів	
3.26	$J_\omega \varepsilon = M_\omega$	Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі	M_ω – момент сили відносно осі обертання; ε – кутове прискорення

Приклад 3.1. Маховик, що обертається зі сталою частотою $\nu_0 = 10$ Гц, під час гальмування почав обертатися рівносповільнено. Коли гальмування закінчилось, обертання маховика знову стало рівномірним, але вже з частотою $\nu = 6$ Гц. Обчислити кутове прискорення ε маховика й час гальмування t, якщо відомо, що протягом дії гальмівного зусилля маховик здійснив 50 обертів ($N = 50$).

Розв'язання. Кутова швидкість ω маховика, що обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням ε, залежить від часу t:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

де ω_0 — кутова швидкість у початковий момент часу.

Кут повороту маховика φ під час такого руху визначається рівнянням

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Виключаючи час з цих співвідношень, можна виразити кутове прискорення через кут повороту й початкове та кінцеве значення кутової швидкості:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi}.$$

Оскільки $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi\nu$, то

$$\varepsilon = \frac{\pi(\nu_0^2 - \nu^2)}{N}.$$

Тривалість гальмування визначимо з першої формули, використовуючи отримані формули для кутового прискорення:

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = (\omega_0 - \omega)\frac{2\varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\varphi}{\omega + \omega_0} = \frac{2N}{\nu + \nu_0}.$$

Підставивши числові значення ν, ν_0 N і виконавши обчислення, маємо

$$\varepsilon = 4.02 \text{ рад/с}^2, \quad t = 6.25 \text{ с}.$$

Приклад 3.2. Вал у вигляді однорідного циліндра масою $m_1 = 10$ кг надіто на горизонтальну вісь. На циліндр накручено нитку, до вільного кінця якої підвішено гирю масою $m_2 = 2.5$ кг. З яким прискоренням опускатиметься гиря, якщо її відпустити?

Розв'язання. У цій задачі поступальний рух гирі й обертальний рух вала зв'язані між собою. Відповідно до другого закону Ньютона прискорення гирі a визначають сили, що діють на неї. На гирю діють сила тяжіння $m_2 g$ і сила натягу нитки T, отже,

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Прискорення гирі a дорівнює тангенціальному прискоренню a_τ точок на циліндричній поверхні вала і зв'язане з кутовим прискоренням вала співвідношенням

$$a = a_\tau = \varepsilon R \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{R},$$

де R – радіус вала.

Відповідно до основного закону динаміки обертального руху кутове прискорення вала ε визначається обертальним моментом M сил, що на нього діють, та його моментом інерції J. Лише сила натягу нитки T створює обертальний момент вала $M = TR$. Для суцільного однорідного циліндра момент інерції $J = m_1 R^2/2$. Отже,

$$J\varepsilon = M.$$

Підставляємо в останнє рівняння вирази для M, J та ε:

$$\frac{m_1 R^2}{2}\frac{a}{R} = TR \rightarrow \frac{m_1 a}{2} = T.$$

Останній вираз для T підставимо в перше рівняння й одержимо рівняння з однією невідомою a:

$$m_2 a = m_2 g - \frac{m_1 a}{2}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно прискорення a, отримуємо

$$a = g\frac{2m_2}{2m_2 + m_1}.$$

Після підстановки числових значень остаточно маємо $a = g/3 \approx 3.3$ м/с^2.

Варіант 3.1

3.1.1. Маховик почав обертатися рівноприскорено, через 10 секунд ($\Delta t = 10$ с) мав частоту обертання $\nu = 300$ хв$^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε й кількість обертів N, які він здійснив протягом цього часу.

3.1.2. Обертання диска радіусом $R = 20$ см описується рівнянням $\varphi = B\,t + C\,t^3$, де $B = -1$ рад/с, $C = 0.1$ рад/с^3. Визначити тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне прискорення точок на ободі диска в момент часу $t = 5$ с.

3.1.3. Під час обертання махового колеса його кутове прискорення змінюється за законом $\varepsilon = a - b\omega$, де a, $b \neq 0$ — сталі величини. Якою буде кутова швидкість маховика через t секунд після початку гальмування, якщо перед гальмуванням вона дорівнювала ω_0?

3.1.4. Яку силу треба прикласти до земної кулі, щоб зупинити її обертання за час $T = 24$ год? Землю вважати однорідною суцільною кулею радіусом $R_з = 6.37 \cdot 10^6$ м і масою $M_з = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг.

3.1.5. Куля й суцільний циліндр, рухаючись з однаковою швидкістю, котяться вгору по похилій площині. Яке з цих тіл підніметься вище? Знайти відношення висот підняття тіл.

Варіант 3.2

3.2.1. Велосипедне колесо обертається з частотою $\nu_0 = 5$ Гц. Під дією сили тертя воно зупинилося через час $t = 1$ хв. Уважаючи обертання колеса рівносповільненим, знайти кутове прискорення ε й кількість обертів N, здійснених колесом протягом цього часу.

3.2.2. На барабан радіусом $R = 0.5$ м накручено нитку, до кінця якої підвішено гирю масою $m = 1$ кг. Визначити момент інерції барабана, якщо відомо, що гиря за час $t = 2$ с опускається на висоту два метри ($h = 2$ м).

3.2.3. Ротор двигуна низького тиску (ТРДД – турбореактивний двоконтурний двигун) обертається з частотою $\nu = 10^4$ хв$^{-1}$. Час зупинки двигуна τ (час з моменту припинення подачі палива в двигун до його повної зупинки) становить 50 с. Уважаючи, що момент сили тертя не залежить від швидкості обертання, і нехтуючи іншими моментами, визначити, яку потужність P розвиває двигун, якщо момент інерції ротора $J = 18$ кг·м^2.

3.2.4. По горизонтальному столу може котитися без ковзання циліндр масою m, на який намотано нитку. До вільного кінця нитки, перекинутої через легкий блок, підвішено вантаж з такою самою масою. Системі надано можливість діяти самостійно. Знайти прискорення вантажу й силу тертя між циліндром і столом. Задачу розв'язати для суцільного й порожнистого циліндрів.

3.2.5. Суцільний однорідний диск радіусом $R = 10$ см, який має початкову кутову швидкість $\omega_0 = 50$ рад/с, обертається відносно своєї осі симетрії. Диск кладуть основою на горизонтальну поверхню. Скільки обертів буде здійснено диском до його зупинки, якщо коефіцієнт тертя між диском і горизонтальною площиною $\mu = 0.1$ не залежить від кутової швидкості обертання диска?

Варіант 3.3

3.3.1. Кут повороту колеса радіусом $R = 5$ см змінюється зі спливанням часу за законом

$$\varphi = A + B\,t + C\,t^2 + D\,t^3,$$

де $D = 1$ рад/с^3. Для точок на ободі колеса знайти зміну тангенціального прискорення Δa_τ за кожну секунду.

3.3.2. Колесо діаметром D обертається таким чином, що лінійна швидкість точок на його ободі як функція часу t має вигляд

$$v = v_0 \frac{\tau^2}{(t+\tau)^2}.$$

Знайти кутову швидкість ω і кутове прискорення ε, а також кут повороту φ (уважаючи, що в початковий момент він дорівнює 0) як функції часу.

3.3.3. Маховик з рівномірно розподіленою масою $m = 6$ кг і діаметром $D = 10$ см вільно обертається навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр. Частота обертання $\nu_0 = 840$ хв$^{-1}$. Маховик починає гальмувати і зупиняється через час $\Delta t = 15$ с. Знайти гальмівний момент і кількість обертів, які здійснює маховик до повної зупинки.

3.3.4. Однорідна куля масою m і радіусом R обертається навколо осі, яка проходить через її центр. Рівняння обертання кулі має вигляд

$$\varphi = B\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

Знайти як функцію часу момент сили M, що діє на кулю.

3.3.5. Вал масою $m = 50$ кг і діаметром $D = 10$ см обертається з частотою $\nu_0 = 16$ Гц. До бокової поверхні вала притиснуто колодку з силою $F = 31.4$ Н, під дією якої вал зупинився через час $\tau = 10$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ.

Варіант 3.4

3.4.1. Диск обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = -2$ рад/c^2. Скільки обертів N здійснив диск при зміненні частоти обертання від $\nu_1 = 240$ хв$^{-1}$ до $\nu_2 = 90$ хв$^{-1}$? Знайти час Δt, протягом якого це відбулося.

3.4.2. Маховик діаметром D обертається навколо своєї осі. При цьому рівняння залежності кута повороту маховика від часу має вигляд

$$\varphi = A + B\,t^2 + C\,t^3.$$

Знайти кутову швидкість ω і кутове прискорення ε обертання маховика, а також лінійну швидкість і тангенціальне прискорення точок на ободі маховика.

3.4.3. Через блок у вигляді диска масою $m = 50$ г перекинуто тонку гнучку нитку, до кінців якої підвішено вантажі масами $m_1 = 100$ г і $m_2 = 75$ г. З яким прискоренням будуть рухатися вантажі, якщо дати системі діяти самостійно?

3.4.4. Порівняти прискорення, з якими будуть котитися без ковзання по похилій площині два циліндри, один з яких порожнистий, а інший — однорідний суцільний. Чи залежить відношення прискорень циліндрів від їхніх геометричних розмірів?

3.4.5. Куля масою $m = 5$ г летить зі швидкістю $v = 200$ м/с і натикається на виступ нерухомого зубчастого колеса, момент інерції якого $J = 0.2$ кг·м^2. Відстань від точки попадання кулі до осі обертання $R = 30$ см. Уважаючи зіткнення непружним, визначити кутову швидкість колеса ω, з якою воно почне обертатися. Куля рухалася в площині обертання колеса.

Задачі для повторення шкільної програми

3.Ш.1. Швидкість точок робочої поверхні наждачного круга, який має діаметр 300 мм, не повинна перевищувати 35 м/с. Чи можна насадити цей круг на вал електродвигуна, що здійснює 1400 обертів за хвилину?

Відповідь: так.

3.Ш.2. Кругла пилка має діаметр 600 мм. На вісь пилки насаджено шків діаметром 300 мм, який приводиться в обертання за допомогою пасової передачі від шківа діаметром 120 мм, насадженого на вал електродвигуна. Яка швидкість зубців пилки, якщо вал електродвигуна здійснює 1200 обертів за хвилину?

Відповідь: $v = 15$ м/с.

3.Ш.3. Якщо радіус колової орбіти штучного супутника Землі збільшити в чотири рази, то період його обертання збільшиться у вісім разів. Як і в скільки разів зміниться швидкість руху супутника на орбіті?

Відповідь: зменшиться вдвічі.

3.Ш.4. Дві матеріальні точки рухаються по колах радіусами R_1 і R_2, причому $R_1 = 2R_2$. Порівняти їхні доцентрові прискорення у таких випадках: а) швидкості однакові; б) періоди обертання точок однакові.

Відповідь: а) 1:2; б) 2:1.

3.Ш.5. Хлопчик кинув горизонтально м'яч з вікна, розташованого на висоті 20 м. Протягом якого часу м'яч летів до землі і з якою швидкістю його було кинуто, якщо він упав на відстані 6 м від фундаменту будинку? Для обчислень взяти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: $t = 2$ с, $v_0 = 3$ м/с.

3.Ш.6. Тіло кинуто з висоти h над поверхнею землі зі швидкістю v_0 під кутом α до лінії горизонту. Знайти: 1) максимальну висоту підняття над поверхнею землі H; 2) час польоту t; 3) горизонтальну дальність польоту s; 4) швидкість тіла v у момент удару об землю.

Відповідь: 1) $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + h$; 2) $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}}$; 3) $s = v_0 t \cos \alpha$; 4) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

3.Ш.7. Якими мають бути радіус колової орбіти штучного супутника та його лінійна швидкість, щоб період обертання супутника був таким самим, як і Землі?

Відповідь: $R = 42\,000$ км; $v = 3.1$ км/с.

3.Ш.8. Літак виходить з пікірування, описуючи у вертикальній площині дугу кола радіусом 800 м і маючи в нижній точці швидкість 200 м/с. Якого перевантаження зазнає льотчик у нижній точці траєкторії? Для обчислень взяти $g = 10$ м/с^2.

Відповідь: 6.

3.Ш.9. Тіло лежить на поверхні диска, що обертається в горизонтальній площині, на відстані $R = 4$ см від осі обертання. Коефіцієнт тертя між поверхнями тіла й диска $\mu = 0.2$.

При якій кутовій швидкості обертання тіло почне сповзати з диска?

Відповідь: $\omega > \sqrt{\mu g/R}$.

3.Ш.10. Радіус робочого колеса гідротурбіни у вісім разів більший, а частота обертання у 40 разів менша, ніж ті самі параметри парової турбіни. Порівняти швидкості й доцентрові прискорення точок обода коліс турбін.

Відповідь: $v_1 : v_2 = 1 : 5$; $a_1 : a_2 = 1 : 200$.

3.Ш.11. Хлопчик стрибає у воду з крутого берега заввишки 3.2 м, маючи після розбігу горизонтально напрямлену швидкість, яка дорівнює 6 м/с. Якими будуть швидкість руху хлопчика й кут між вектором швидкості й поверхнею води в момент часу, коли хлопчик торкнеться води?

Відповідь: $v = 10$ м/с; $\alpha = \arcsin 0.8$.

3.Ш.12. Яку початкову швидкість футболіст має надати м'ячу під час виконання одинадцятиметрового штрафного удару, щоб м'яч попав під верхню перекладину футбольних воріт? Початкова швидкість м'яча напрямлена під кутом $\alpha = 45°$ до лінії горизонту, висота воріт $h = 2.44$ м.

Відповідь: $v_0 \approx 12$ м/с.

3.Ш.13. Супутник рухається навколо планети, що має форму сфери, на висоті $h = 0.12\,R$ (R — радіус планети) над її поверхнею. Визначити середню густину речовини планети, якщо період обертання супутника $T = 1.5$ год?

Відповідь: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3 \approx 6.81 \cdot 10^3$ кг/м^3.

3.Ш.14. На екваторі деякої планети тіло важить удвічі менше, ніж на полюсі. Густина речовини планети $\rho = 3$ г/см^3. Знайти період обертання планети навколо своєї осі.

Відповідь: $T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} \approx 9703$ с $= 2$ год 41 хв 43 с.

Розділ 4
РОБОТА. ЕНЕРГІЯ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
4.1	$\delta A = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$	Елементарна механічна робота	$\vec{F}$ – вектор сили; $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення
4.2	$A = \int\limits_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$	Робота при переміщенні вздовж криволінійної траєкторії	L – траєкторія, уздовж якої відбувається переміщення
4.3	$A = F\, s \cos\alpha$	Робота сталої сили при прямолінійному русі тіла	s – шлях, пройдений тілом; α – кут між напрямком дії сили й переміщенням
4.4	$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Потужність	δA – робота, виконана протягом часу dt

1	2	3	4
4.5	$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Кінетична енергія поступального руху	m, v, p – маса, швидкість та імпульс тіла
4.6	$U = \frac{kx^2}{2}$	Потенціальна енергія деформованого тіла	x – деформація; k – коефіцієнт пружності
4.7	$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок	m_1, m_2 – маси тіл, що взаємодіють; r – відстань між тілами; G – гравітаційна стала
4.8	$U = mgh$	Потенціальна енергія тіла в полі сили тяжіння	h – висота тіла над поверхнею; m – маса тіла
4.9	$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$	Зв'язок сили з потенціальною енергією	$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти
4.10	$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$	Зв'язок центральної сили з її потенціалом	

1	2	3	4
4.11	$E = E_K + U = \text{const}$	Закон збереження механічної енергії	E – повна механічна енергія; E_K – кінетична енергія; U – потенціальна енергія
4.12	$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$	Елементарна робота при обертальному русі	$\vec{M}$ – момент сили; $d\vec{\varphi}$ – елементарний кут повороту
4.13	$E_K = \frac{J\omega^2}{2}$	Кінетична енергія тіла, що обертається	J – момент інерції тіла відносно осі обертання; ω – кутова швидкість обертання

Приклад 4.1. Снаряд, який летів горизонтально на висоті $H = 40$ м зі швидкістю $v = 100$ м/с, розірвався на дві рівні частини. Одна частина через час $t = 1$ с падає на землю точно під місцем розриву. Визначити швидкості руху частин снаряду відразу після вибуху.

Розв'язання. Рух першої частини снаряда після вибуху — це падіння з початковою швидкістю u_1, напрямленою вертикально вниз. Отже, якщо знехтувати опором повітря, то час t і висота падіння H цієї частини будуть зв'язані рівнянням

$$H = u_1 t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2}.$$

Швидкість руху частин снаряда змінюється внаслідок вибуху під дією сил тиску газів, які виникають під час вибуху. Якщо обидві частини снаряда розглядати як систему, то ці сили стануть внутрішніми і тому не будуть змінювати імпульс системи. Сили, які виникають під час вибуху, є настільки великими, що порівняно з ними можна знехтувати дією інших сил (тяжіння, опору повітря) на кожну з частин снаряда. У цьому випадку систему можна вважати замкнутою протягом часу вибуху. Отже, відповідно до закону збереження імпульсу повний імпульс системи не змінюється протягом вибуху:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

де $\vec{p}_0 = m\vec{v}$ — імпульс снаряда до вибуху (m — маса снаряда до вибуху); $\vec{p}_1 = m\vec{u}_1/2$ і $\vec{p}_2 = m\vec{u}_2/2$ — імпульси частин снаряда після вибуху; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — вектори швидкості частин снаряда після вибуху.

Розглядаючи останнє рівняння в проекціях на вертикальну й горизонтальну осі, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} mv &= \frac{m}{2}u_{2x}; \\ 0 &= \frac{m}{2}u_1 - \frac{m}{2}u_{2y}, \end{cases}$$

де u_{2x} і u_{2y} — компоненти вектора швидкості другої частини снаряда після вибуху.

З цієї системи маємо $u_{2x} = 2v$, $u_{2y} = u_1$. Використовуючи теорему Піфагора $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$, виразимо швидкість другої частини снаряда u_2 через швидкість снаряда до вибуху v і швидкість його першої частини u_1:

$$u_2 = \sqrt{4v^2 + u_1^2}.$$

Підставивши числові значення, одержуємо $u_1 \approx 35$ м/с, $u_2 \approx 203$ м/с.

Приклад 4.2. Маховик у вигляді диска масою $m = 50$ кг і радіусом $R = 20$ см спочатку було розкручено до частоти обертання $\nu = 480$ хв$^{-1}$, а потім йому було надано можливість рухатися самостійно. Унаслідок тертя маховик зупинився. Знайти момент M сили тертя, уважаючи його сталим, якщо маховик до повної зупинки здійснив 200 обертів ($N = 200$).

Розв'язання. Уся кінетична енергія, яку мав спочатку маховик, витрачається на роботу проти сили тертя. Отже, робота сили тертя A є початковою кінетичною енергією, яку взято з протилежним знаком:

$$A = -\frac{J\omega^2}{2},$$

де $\omega = 2\pi\nu$ — початкова кутова швидкість маховика, J — його момент інерції.

Оскільки сама сила тертя та її момент M є сталими величинами, можна записати

$$A = M\varphi,$$

де $\varphi = 2\pi N$ — кут, на який повернувся маховик до зупинки.

Ураховуючи, що момент інерції маховика $J = mR^2/2$, запишемо вираз для моменту сили тертя:

$$M = -\frac{J\omega^2}{2\varphi} = -\frac{mR^2}{2}\frac{4\pi^2\nu^2}{2\,2\pi N} = -\frac{\pi m R^2 \nu^2}{2N}.$$

Після підстановки в останню формулу числових значень маємо момент сили тертя $M \approx 0.56$ Н·м.

Варіант 4.1

4.1.1. Куля масою $m = 10$ г, яка летіла зі швидкістю $v = 600$ м/с, улучила в балістичний маятник масою $M = 5$ кг і застрягла в ньому. На яку висоту h, відхилившись після удару, піднявся маятник?

4.1.2. На горизонтальних рейках стоїть платформа з піском загальною масою $m_1 = 5 \cdot 10^3$ кг. У пісок попадає снаряд масою $m_2 = 5$ кг, який летів уздовж рейок. У момент попадання швидкість руху снаряда становила $v_2 = 400$ м/с і була напрямлена зверху вниз під кутом $\alpha = 60^\circ$ до лінії горизонту. Знайти швидкість руху платформи, якщо снаряд застрягне в піску.

4.1.3. На пружині довжиною $l_1 = 30$ см висить вантаж масою $m_1 = 4$ кг. При збільшенні маси вантажу до $m_2 = 10$ кг пружина подовжується до $l_2 = 37$ см. Знайти роботу розтягування пружини.

4.1.4. Швидкість руху поїзда масою $m = 3 \cdot 10^6$ кг змінюється за законом $v = D + B\,t + C\,t^2$. Знайти роботу сили тяги за проміжок часу від $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с, якщо $D = 1$ м/с, $B = 0.1$ м/с^2, $C = 0.01$ м/с^3.

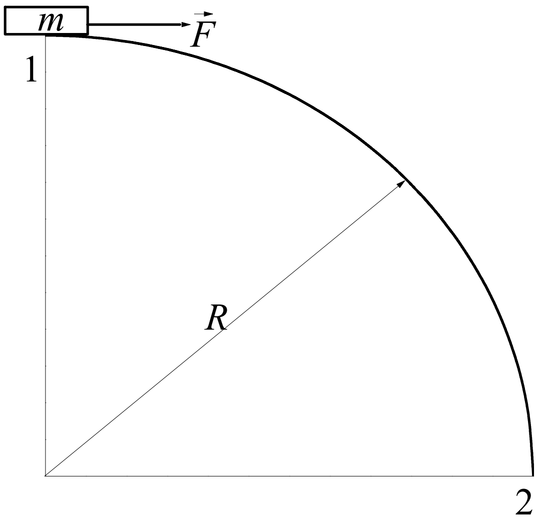

Рис. 4.1

4.1.5. Муфта масою $m = 0.125$ кг (рис. 4.1) рухається по гладкому проводу, зігнутому в горизонтальній площині у вигляді дуги радіусом $R = 0.4$ м.

У точці 1 на муфту, яка мала швидкість $v_1 = 8$ м/с, почала діяти постійна горизонтальна сила $\vec{F}$. Знайти швидкість муфти в точці 2, якщо $F = 30$ Н.

Варіант 4.2

4.2.1. Ланцюжок масою $m = 1.5$ кг і довжиною $l = 1.25$ м підвішено на нитці, його нижній кінець торкається поверхні стола. Після перепалювання нитки ланцюжок упав на стіл. Знайти повний імпульс, переданий від ланцюжка до стола.

4.2.2. Після абсолютно пружного зіткнення тіла масою m_1, яке рухалося поступально, з тілом масою m_2, яке було у спокої, обидва тіла розлетілися симетрично відносно напрямку вектора швидкості першого тіла до удару. При якому значенні відношення мас $n = m_1/m_2$ тіла розлетяться під кутом α?

4.2.3. Брусок масою $m = 1$ кг лежить на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $\mu = 0.2$. У деякий момент часу йому було надано початкової швидкості $v_0 = 1.5$ м/с. Знайти середню потужність $\langle N \rangle$ сили тертя за весь час руху бруска.

4.2.4. Тілу, яке лежало на поверхні Землі, було надано першої космічної швидкості, напрямленої вертикально вверх. На яку висоту $h_{\max}$ підніметься тіло? Опором повітря знехтувати.

4.2.5. Санки, які рухаються по льоду зі швидкістю v_0, виїжджають на асфальт. Довжина полозів санок $l = 1$ м. Коефіцієнт тертя по асфальту $\mu = 0.625$. Уважати, що маса санок рівномірно розподілена по їхній довжині. При якій швидкості санки повністю виїдуть на асфальт? Тертям по льоду знехтувати.

Варіант 4.3

4.3.1. Локомотив масою m починає рухатися від станції зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = \alpha\sqrt{s}$, де α — стала величина, s — пройдений шлях. Знайти сумарну роботу сил, що діють на локомотив, за перші t секунд після початку руху.

4.3.2. Знайти зміну кінетичної енергії системи з двох кульок масами m_1 і m_2 під час їх абсолютно непружного зіткнення. Перед зіткненням кульки мали швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$.

4.3.3. Маховик з моментом інерції $J = 40$ кг·м^2 почав обертатися рівноприскорено із стану спокою під дією моменту сили $M = 20$ Н·м. Момент сил діяв протягом часу $\tau = 20$ с. Знайти кінетичну енергію, якої набув маховик.

4.3.4. Акробат стрибає на сітку з висоти $H_1 = 4$ м над сіткою. На якій граничній висоті h_1 над підлогою потрібно натягнути сітку, щоб акробат не вдарився об підлогу під час стрибка? Відомо, що сітка прогинається на $h_2 = 1$ м, якщо акробат стрибає на неї з висоти $H_2 = 2$ м над сіткою.

4.3.5. Однорідний кубічний ящик переміщають на деяку відстань то волоком, то перекиданням через ребро. При якому коефіцієнті тертя ковзання значення роботи під час переміщення ящика волоком і перекиданням будуть однаковими?

Варіант 4.4

4.4.1. Платформа у вигляді диска радіусом $R = 1.5$ м і масою $m_1 = 180$ кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $\nu_0 = 10$ хв$^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60$ кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

4.4.2. Молотком масою $m_1 = 1$ кг забивають у стіну цвях масою $m_2 = 25$ г. Знайдіть ККД удару молотка. Удар уважати непружним.

4.4.3. Вертикально розміщений однорідний стрижень довжиною l і масою M може обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. У точку, яка знаходиться на відстані $\frac{1}{3}l$ від осі обертання, ударяється кулька масою m, яка летить перпендикулярно до стрижня і його осі обертання. Після удару стрижень відхиляється на кут α, а кулька відлітає назад. Знайти швидкість кульки до удару v_0 і після удару v.

4.4.4. Протягом якого часу буде котитися без ковзання обруч по похилій площині довжиною $l = 2$ м і висотою $h = 10$ см?

4.4.5. Невелика рухома кулька зазнає пружного зіткнення з нерухомою кулькою з такою самою масою. Під яким кутом розлетяться кульки в разі не лобового зіткнення? Уважати, що під час зіткнення обертання не виникає.

Задачі для повторення шкільної програми

4.Ш.1. Тролейбус масою 15 т рушає з місця із прискоренням 1.4 м/с^2. Визначити роботу сили тяги A_1 і роботу сили опору A_2 на перших 10 м шляху, якщо коефіцієнт опору дорівнює 0.02. Якої кінетичної енергії набув тролейбус?

Відповідь: $A_1 = 240$ кДж; $A_2 = -30$ кДж; $W_K = 210$ кДж.

4.Ш.2. Яку мінімальну роботу треба виконати, щоб по похилій площині з кутом нахилу 30° підняти вантаж масою 400 кг на висоту 2 м, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0.3? Визначити ККД похилої площини.

Відповідь: $A = 12$ кДж; $\eta = 66$ %.

4.Ш.3. Визначити середню корисну потужність, яку розвиває літак під час розбігу, якщо маса літака 1 т, довжина розбігу 300 м, злітна швидкість 30 м/с, а коефіцієнт опору 0.03. Рух літака під час розбігу вважати рівноприскореним.

Відповідь: $\langle P \rangle = 27$ кВт.

4.Ш.4. Тіло масою 0.5 кг, яке було кинуто під кутом 45° до лінії горизонту, упало на горизонтальну поверхню на відстані 16 м від місця початку його руху. Знайти роботу, витрачену на кидання тіла.

Відповідь: $A = 40$ Дж.

4.Ш.5. Літак масою 10^3 кг летить горизонтально на висоті 1120 м зі швидкістю 60 м/с. Потім з вимкненим двигуном літак починає знижуватися й приземляється, маючи швидкість 20 м/с. Визначити силу опору повітря під час зниження, уважаючи, що за інерцією літак пролетів 8 км.

Відповідь: $F = 1600$ Н.

4.Ш.6. На візку масою 20 кг, що перебуває у стані спокою, стоїть людина масою 60 кг. Яку швидкість відносно Землі розвине візок, якщо людина піде по візку зі швидкістю 1 м/с відносно його поверхні?

Відповідь: $v_3 = 0.75$ м/с.

4.Ш.7. Два тіла масою 10 кг і 15 кг підвішено на нитках довжиною 2 м так, що вони торкаються одне одного. Одне тіло відвели вбік так, щоб кут між нитками дорівнював 60°, і відпустили. На яку висоту піднімуться тіла після удару, якщо удар був абсолютно непружним?

Відповідь: $h = 0.16$ м.

4.Ш.8. Частинка масою m, що рухається зі швидкістю v, зазнає пружного зіткнення з нерухомою частинкою масою $m/2$ і продовжує рухатися під кутом 30° до напрямку свого початкового руху. З якою швидкістю після зіткнення почала рухатися друга частинка?

Відповідь: $v_2 = v\frac{2}{\sqrt{3}}$.

4.Ш.9. Яку роботу виконує людина, піднімаючи вантаж масою 2 кг на висоту 1 м з прискоренням 3 м/с^2?

Відповідь: $A = 26$ Дж.

4.Ш.10. Сани з'їжджають з гори висотою $h = 10$ м, схил якої утворює з лінією горизонту кут $\alpha = 45°$. Далі сани рухаються по горизонтальній ділянці. Коефіцієнт тертя санок на всьому шляху однаковий і дорівнює $\mu = 0.08$. Визначити відстань, яку пройдуть сани по горизонтальній ділянці до повної зупинки.

Відповідь: $s = 115$ м.

4.Ш.11. Автомобіль масою 1500 кг, двигун якого має потужність 75 кВт, піднімається вгору зі швидкістю 36 км/год. Визначити кут нахилу гори. Тертям знехтувати.

Відповідь: $\alpha = 30°$.

4.Ш.12. Тіло кинуто в горизонтальному напрямі з початковою швидкістю $v = 15$ м/с. Через скільки секунд після початку руху кінетична енергія тіла збільшиться вдвічі?

Відповідь: $t = 1.5$ с.

4.Ш.13. Літак, маса якого становить 2 т, летить у горизонтальному напрямі зі швидкістю 50 м/с на висоті 420 м. Потім з вимкненим двигуном він починає знижуватися й досягає смуги аеродрому, маючи швидкість 30 м/с. Визначити роботу сили опору повітря під час планерного польоту літака.

Відповідь: $A = -10^7$ Дж.

4.Ш.14. На невагомій нитці довжиною $l = 90$ см підвішено ящик з піском масою 2.5 кг. Куля масою 20 г, яка летіла горизонтально, улучила в ящик і загрузла в піску, унаслідок чого ящик відхилився так, що нитка утворила з вертикаллю кут 60°. Визначити, з якою швидкістю v летіла куля і яку швидкість u набув ящик з піском після того, як в нього влучила куля.

Відповідь: $v = 375$ м/с; $u = 3$ м/с.

4.Ш.15. Під час центрального абсолютно непружного удару двох кульок з масами $m_1 = 0.25$ кг і $m_2 = 1$ кг, які рухалися назустріч одна одній з однаковою швидкістю, на внутрішню енергію перетворилося $Q = 160$ Дж їхньої механічної енергії. Визначити швидкість кульок перед ударом.

Відповідь: $v = 20$ м/с.

Розділ 5

ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
5.1	$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $y = y'$; $z = z'$; $t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Перетворення Лоренца координат (x, y, z) і часу t при переході від однієї інерціальної системи до іншої	V – швидкість руху системи вздовж осі x; c – швидкість світла у вакуумі; (x', y', z', t') – координати й час у рухомій системі відліку; $\beta = V/c$
5.2	$u_x = \frac{v_x + V}{1 + \frac{v_x V}{c^2}}$	Релятивістський закон додавання швидкостей	u_x – швидкість тіла в нерухомій системі відліку; v_x – швидкість тіла в рухомій системі; V – швидкість руху однієї системи відносно іншої

1	2	3	4
5.3	$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$	Релятивістське скорочення довжини	l_0 – довжина стрижня у власній системі відліку; l – довжина стрижня в системі, відносно якої він рухається зі швидкістю V
5.4	$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивістське сповільнення часу	τ – проміжок часу в системі, зв'язаній з об'єктом події; τ_0 – проміжок часу в системі, що рухається відносно об'єкта події зі швидкістю V
5.5	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивістська маса тіла, що рухається зі швидкістю v	m_0 – маса спокою тіла (частинки); $\beta = v/c$
5.6	$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивістський імпульс	$\vec{v}$ – швидкість руху тіла (частинки)
5.7	$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Повна енергія тіла (формула Ейнштейна)	m – релятивістська маса
5.8	$E_0 = m_0c^2$	Енергія спокою	

1	2	3	4
5.9	$E_K = E - E_0$	Кінетична енергія	E – повна енергія; E_0 – енергія спокою
5.10	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$; $\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}$	Зв'язок між енергією й імпульсом релятивістської частинки	E – повна енергія

Приклад 5.1. Стрижень пролітає без прискорення повз мітку в нерухомій системі відліку K за час $\Delta t = 0.4$ фс (1 фс (фемптосекунда) = 10^{-15} с), визначений в цій системі. У системі відліку K', зв'язаній зі стрижнем, мітка рухається відносно стрижня протягом часу $\Delta t_0 = 0.5$ фс. Знайти швидкість руху стрижня v у нерухомій системі K та його власну довжину.

Розв'язання. Нехай стрижень у системі відліку K рухається зі швидкістю v, його довжина в цій системі $l = v\Delta t$. З іншого боку, відповідно до принципу відносності можна вважати, що мітка рухається з тією самою швидкістю v, але в протилежному напрямку відносно стрижня. Тоді довжина стрижня у власній системі (системі K') буде $l_0 = v\Delta t_0$.

Одним із наслідків перетворень Лоренца є так зване скорочення довжини, що виражається формулою

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Підставляючи значення l і l_0, маємо

$$v\Delta t = v\Delta t_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Після скорочення на v і простих перетворень виражаємо швидкість руху стрижня через проміжки часу Δt і Δt_0:

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{0.4}{0.5}\right)^2} = \frac{3}{5}c = 0.6c.$$

Власна довжина стрижня

$$l_0 = v\Delta t_0 = c\Delta t_0\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2} = c\sqrt{(\Delta t_0)^2-(\Delta t)^2}.$$

Після підстановки маємо $l_0 = 9\cdot 10^{-8}$ м$=90$ нм.

Приклад 5.2. Частинка масою m_0, яка летіла зі швидкістю $v_1 = 0.8$c, непружно вдарилася об нерухому частинку з такою самою масою. Унаслідок зіткнення утворилася нова частинка. Уважаючи систему замкненою, знайти масу спокою M_0 і швидкість частинки v_2, яка утворилася внаслідок удару.

Розв'язання. У спеціальній теорії відносності в замкненій системі виконуються закони збереження імпульсу й енергії. Перед зіткненням частинка, що рухалася, мала повну енергію

$$E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}m_0 c^2 = \frac{5}{3}E_0,$$

де $E_0 = m_0 c^2$ — енергія спокою частинки (нерухомої частинки). Відповідно до закону збереження енергії повна енергія новоутвореної частинки E_2 буде сумою повних енергій частинок перед зіткненням:

$$E_2 = E_1 + E_0 = \frac{8}{3}E_0.$$

Імпульс новоутвореної частинки дорівнює імпульсу частинки, що рухалася: $\vec{p}_2 = \vec{p}_1$.

У спеціальній теорії відносності повна енергія E частинки, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$, та її імпульс $\vec{p}$ зв'язані співвідношенням

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c}.$$

Згідно з законом збереження імпульсу імпульс $\vec{p}_1$ рухомої частинки має дорівнювати імпульсу $\vec{p}_2$ новоутвореної частинки:

$$\vec{p}_1 = \frac{E_1\vec{v}_1}{c} = \vec{p}_2 = \frac{E_2\vec{v}_2}{c}.$$

З останнього виразу маємо

$$v_2 = v_1\frac{E_1}{E_2} = v_1\frac{E_1}{E_1 + E_0} = v_1\frac{\frac{5}{3}E_0}{\frac{8}{3}E_0} = \frac{5}{8}v_1 = 0.5c.$$

Для знаходження маси спокою новоутвореної частинки M_0 скористаємося формулою Ейнштейна:

$$E_2 = Mc^2 = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Підставивши $0.5c$ замість v_2, маємо

$$E_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,M_0c^2 = \frac{8}{3}E_0 = \frac{8}{3}m_0c^2,$$

звідки виражаємо масу спокою новоутвореної частинки $M_0 = 4/\sqrt{3}\,m_0 \approx 2.309\,m_0$.

Варіант 5.1

5.1.1. Є дві системи відліку S і S', відносна швидкість яких невідома. Паралельно до вектора швидкості відносного руху систем рухається стрижень. У системі S' він має довжину $l' = 1.1$ м і швидкість $v'_x = 0.1c$. У системі S довжина стрижня $l = 1$ м. Знайти швидкість руху стрижня v_x у системі S і швидкість руху v_0 системи S' відносно системи S .

5.1.2. Яку роботу необхідно здійснити, щоб збільшити швидкість руху частинки з масою спокою m_0 від $v_1 = 0.6c$ до $v_2 = 0.8c$? Порівняти одержаний результат зі значенням, розрахованим за класичною формулою.

5.1.3. Власний час життя τ_0 мезона дорівнює 2 мкс. Від точки народження до точки розпаду в лабораторній системі відліку мезон пролетів відстань $l = 6$ км. З якою швидкістю v рухався мезон?

5.1.4. Пучок релятивістських частинок з кінетичною енергією E_K падає на поглинальну мішень. Сила струму в пучку становить I, заряд і маса спокою частинки — e і m_0. Знайти силу тиску пучка на мішень і його потужність.

5.1.5. Обчислити прискорення електрона, який рухається під дією сталої сили F уздовж лінії її дії, у той момент, коли його кінетична енергія E_K удвічі менша за енергію спокою електрона.

Варіант 5.2

5.2.1. Довжину космічного корабля $l_0 = 10$ м було виміряно перед стартом. Яку швидкість повинен мати корабель, щоб його довжина в системі відліку, зв'язаній із Землею, змінилася на $\Delta l = 5$ мкм? Порівняти зі швидкістю обертання Землі навколо Сонця ($V_3 = 30$ км/с).

5.2.2. На космічному кораблі-супутнику знаходиться годинник, який перед польотом було синхронізовано з годинником на Землі. Швидкість супутника $v = 9$ км/с. Наскільки відстане годинник на супутнику за вимірюваннями земного спостерігача відносно земного годинника, який показав час $\tau = 1$ рік?

5.2.3. Частинка з масою спокою m_0, яка рухається зі швидкістю $v_1 = 0.8c$, зазнає непружного зіткнення з такою самою частинкою, що рухається зі швидкістю $v_2 = 0.6c$. Якими будуть маса спокою M_0 і швидкість v новоутвореної частинки? Розглянути два випадки: а) частинки рухаються назустріч одна одній; б) перша частинка наздоганяє другу.

5.2.4. Частинка з масою спокою m у деякий момент часу починає рухатись під дією сталої сили $\vec{F}$. Визначити швидкість частинки $\vec{v}$ і пройдений шлях s як функції часу. Порівняти з результатом класичної теорії.

5.2.5. У лабораторній системі відліку π-мезон з моменту народження до моменту розпаду пролетів відстань $l = 75$ м. Швидкість π-мезона $v = 0.995c$. Визначити власний час життя мезона.

Варіант 5.3

5.3.1. Яку швидкість v повинно мати тіло, щоб його поздовжній лінійний розмір зменшився на 20 %, тобто у 0.8 раза ($n = 0.8$)?

5.3.2. Яку різницю потенціалів U мусить пройти електрон, щоб його поздовжній розмір став у K разів меншим від поперечного?

5.3.3. Кінетична енергія релятивістської частинки дорівнює її енергії спокою. У скільки разів збільшиться імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться в чотири рази ($K = 4$)?

5.3.4. Заряджена частинка з повною енергією $E = 50$ кеВ рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю $v = 0.6c$ по колу радіусом $R = 3.6$ см. Визначити силу Лоренца F_L, яка діє на частинку з боку поля.

5.3.5. У системі S' знаходиться стрижень у стані спокою, його власна довжина $l_0 = 1$ м. Стрижень розташовано так, що він утворює кут $\varphi_0 = 45°$ з віссю x'. Визначити довжину стрижня в системі S, якщо швидкість системи S відносно S'

дорівнює $v_0 = 0.6c$.

Задачі для повторення шкільної програми

5.Ш.1. Яку масу має протон, що летить зі швидкістю $2.4 \cdot 10^8$ м/с? Уважати, що маса протона у стані спокою дорівнює 1 а.о.м.

Відповідь: $m = 1.67$ а.о.м.

5.Ш.2. У чайник налили 2 л води й нагріли її від 10 °C до кипіння. Як і наскільки зміниться маса води? Питома теплоємність води $c = 4.2$ кДж/(кг·К).

Відповідь: збільшиться на $8.4 \cdot 10^{-12}$ кг.

5.Ш.3. Наскільки збільшиться маса α-частинки внаслідок руху зі швидкістю $0.9c$? Уважати, що маса спокою α-частинки становить 4 а.о.м.

Відповідь: на 5.18 а.о.м.

5.Ш.4. Як і наскільки змінюється маса 1 кг льоду під час його плавлення ($\lambda = 333$ кДж/кг)?

Відповідь: збільшується на $3.7 \cdot 10^{-12}$ кг.

Розділ 6

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
6.1	$T = \frac{t}{N}$; $\nu = \frac{1}{T}$	Період T і частота коливань ν	N – кількість повних коливань за час t
6.2	$\omega = 2\pi\nu$	Циклічна частота коливань	
6.3	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$	Диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань	ω_0 – циклічна частота власних незгасаючих коливань
6.4	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$	Зміщення при гармонічних коливаннях	x – відхилення від положення рівноваги; A – амплітуда коливань; φ_0 – початкова фаза коливань

1	2	3	4
6.5	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	Період коливань математичного маятника	l – довжина математичного маятника
6.6	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Період коливань пружинного маятника	k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса тягаря
6.7	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$	Період коливань фізичного маятника	J – момент інерції тіла відносно осі обертання; l – відстань від осі обертання до центра мас тіла
6.8	$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$	Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань	β – коефіцієнт згасання; ω_0 – циклічна частота власних незгасаючих коливань
6.9	$x = A_0\exp(-\beta t)\times$ $\times\cos(\omega t+\varphi_0)$	Зміщення при згасаючих коливаннях	$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – циклічна частота згасаючих коливань

1	2	3	4
6.10	$\xi(x,t) = A\times$ $\times\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, $k = 2\pi/\lambda$	Рівняння плоскої хвилі	$\xi(x,t)$ – зміщення точки середовища з координатою x у момент часу t; λ – довжина хвилі
6.11	$v = \lambda\nu = \omega/k$	Фазова швидкість поширення хвилі	ν – частота коливань
6.12	$v_\parallel = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Швидкість звукових хвиль у пружному середовищі	E – модуль Юнга; ρ – густина речовини
6.13	$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$	Швидкість звукових хвиль у газах	γ – показник адіабати; T – температура газу; μ – молярна маса; P – тиск; ρ – густина
6.14	$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$	Середня об'ємна густина енергії хвилі	A – амплітуда хвилі; ω – циклічна частота; ρ – густина середовища
6.15	$\vec{j} = \langle w\rangle\vec{v}$	Вектор густини потоку енергії хвилі	$\vec{v}$ – вектор швидкості поширення хвилі

1	2	3	4
6.16	$\langle\Phi\rangle = \langle w\rangle v S_\perp$	Середній потік енергії хвилі	$S_\perp$ – площа, перпендикулярна до напрямку поширення хвилі, через яку переноситься енергія

Приклад 6.1. Тіло, яке можна вважати матеріальною точкою, масою $m = 5$ г здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 0.5$ Гц. Амплітуда коливань $A = 0.03$ м. Визначити: 1) швидкість точки в момент часу, коли її зміщення $x = 1.5$ см; 2) максимальну силу F_{max}, що діє на точку.

Розв'язання:

1. Рівняння гармонічних коливань має вигляд

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Швидкість точки, що рухається, визначається як похідна за часом від координати:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

де $\omega = 2\pi\nu$ — колова частота коливань тіла.

Користуючись основною тригонометричною тотожністю ($\sin^2 + \cos^2 = 1$), можна виключити час t з цих двох рівнянь і зв'язати швидкість v і координати x тіла в довільний момент часу:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно v, знайдемо

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Підставивши числові значення, маємо $v \approx \pm 8.16 \cdot 10^{-2}$ м/с. Знак "плюс" відповідає випадку, коли точка відхиляється від положення рівноваги (напрямки зміщення й швидкості збігаються), знак "мінус" — випадку, коли точка повертається в положення рівноваги (напрямки зміщення й швидкості протилежні один одному).

2. Силу, яка діє на тіло, виразимо через прискорення за другим законом Ньютона:

$$F = m\frac{dv}{dt} = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x.$$

Сила буде максимальною тоді, коли відхилення тіла x від положення рівноваги є максимальним, а отже, дорівнює амплітуді коливань A:

$$F_{max} = m\omega^2 A = 4\pi^2\nu^2 mA.$$

Після підстановки числових значень отримуємо $F_{max} \approx 148 \cdot 10^{-5}$ Н.

Приклад 6.2. Частинка масою $m = 0.02$ кг здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 2\pi$ с. Повна енергія частинки при коливанні $E = 10^{-4}$ Дж. Визначити амплітуду коливань A.

Розв'язання. Повну енергію частинки, що здійснює гармонічні коливання, можна виразити через її максимальну швидкість:

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Максимальна швидкість частинки v_{max} зв'язана з амплітудою коливань A й коловою частотою ω: $v_{max} = A\omega$, де $\omega = 2\pi/T$ (див. розв'язання попередньої задачі). Амплітуду коливань частинки виразимо через повну енергію:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Підставивши числові значення, маємо $A = 0.1$ м.

Варіант 6.1

6.1.1. Рівняння коливань точки має вигляд $x = 0.02 \sin 5t$. Визначити максимальні швидкість v_{max} і прискорення a_{max} точки.

6.1.2. Матеріальна точка масою $m = 0.04$ кг здійснює гармонічні коливання, рівняння яких має вигляд $x = 0.1 \sin 5t$. Знайти силу F, що діє на точку в момент, коли фаза коливань $\varphi = \frac{\pi}{6}$, і в положенні найбільшого відхилення точки.

6.1.3. Гиря масою $m = 500$ г, яку підвішено на пружині жорсткістю $k = 20$ Н/м, здійснює пружні коливання у в'язкому середовищі. Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 6.93 \cdot 10^{-3}$. Скільки коливань має здійснити гиря, щоб амплітуда A коливань зменшилася в два рази? За який час t відбудеться це зменшення?

6.1.4. Складаються два коливання, однакові за напрямком: $x_1 = \sin \pi t$ і $x_2 = \sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$. Визначити амплітуду A_Σ і початкову фазу $\varphi_{0\Sigma}$ результуючого коливання.

6.1.5. Циліндричний брусок висотою h знаходиться у вертикальному положенні на межі розділу двох рідин (ρ_1 — густина нижньої рідини, ρ_2 — верхньої). Густина матеріалу бруска ρ. Знайти період малих коливань бруска, якщо знехтувати силами опору.

Варіант 6.2

6.2.1. Точка здійснює коливання згідно із синусоїдальним законом. Найбільше зміщення точки $A = 10$ см, найбільша швидкість $v_{max} = 20$ м/с. Визначити період коливань і максимальне прискорення точки.

6.2.2. Матеріальна точка бере участь у двох коливаннях, які здійснюються в одному напрямку: $x_1 = \sin t$, $x_2 = 2 \cos t$.

Знайти амплітуду A_Σ результуючого коливання й початкову фазу $\varphi_{0\Sigma}$. Записати рівняння руху.

6.2.3. На середині горизонтально натягненої струни довжиною l закріплено тягар масою m. Порівняно з масою тягаря масою струни можна знехтувати. Знайти період T вільних малих коливань тягаря, які здійснюються у горизонтальному напрямку за умови, що натяг струни F є незмінним і значно перевищує вагу тягаря.

6.2.4. Матеріальна точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях: $x = \sin\frac{\pi t}{2}$, $y = \frac{1}{2}\cos\pi t$. Визначити траєкторію точки.

6.2.5. Тягар, коливаючись на пружині, за період втрачає 3.14 % механічної енергії ($\eta = 3.14$ %). Визначити відносну різницю циклічної частоти його коливань і циклічної частоти вільних незгасаючих коливань такої системи.

Варіант 6.3

6.3.1. Матеріальна точка масою $m = 10$ г здійснює коливання за синусоїдальним законом з періодом $T = \frac{1}{5}$ с та амплітудою $A = 20$ см. Знайти повертальну силу F в момент часу $\tau = \frac{1}{12}$ с, а також повну енергію E точки.

6.3.2. Визначити період малих коливань суцільної однорідної кульки радіусом r, що може котитися без ковзання по внутрішній поверхні горизонтально розміщеного циліндра радіусом R.

6.3.3. Знайти логарифмічний декремент згасання коливань математичного маятника довжиною $l = 144$ см, якщо він за час $\tau = 10$ хв втрачає 99 % своєї енергії ($\eta = 99$ %).

6.3.4. Брусок масою m підвішено на двох однакових паралельних пружинах з коефіцієнтом жорсткості k. Визначити період малих вертикальних коливань системи.

6.3.5. Знайти значення циклічної частоти вимушених коливань ω , при якому система з коефіцієнтом згасання β і частотою вільних коливань ω_0 матиме резонансний максимум. Відомо, що амплітуда вимушених коливань визначається формулою

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

де F_0 — амплітуда зовнішньої сили,m — маса тіла.

Варіант 6.4

6.4.1. Точка здійснює гармонічні коливання. У деякий момент часу τ точка має зміщення $x = 5$ см, швидкість $v = 20$ см/с і прискорення $a = -80$ см/с^2. Знайти амплітуду A, циклічну частоту ω, період T і фазу φ коливань у цей момент часу.

6.4.2. На гладкому горизонтальному столі лежить тіло масою M, яке прикріплено до пружини з коефіцієнтом жорсткості k. Другим кінець пружини жорстко прикріплено до вертикальної стінки. У тіло попадає куля масою m, яка має в момент удару швидкість v_0, напрямлену вздовж осі пружини. Уважаючи удар абсолютно непружним і нехтуючи масою пружини й опором повітря, визначити амплітуду й період коливань системи.

6.4.3. Якщо до невагомої пружини підвісити тягар масою m, то її довжина збільшиться на Δ. На цей тягар, який перебуває в стані спокою, з висоти Δ падає другий тягар з такою самою масою, зіткнення тягарів непружне. Знайти період та амплітуду коливань, які виникають при цьому.

6.4.4. Невеликий тягар здійснює коливання за законом $x = 0.02\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$. Визначити амплітуду, період, початкову фазу коливань, а також максимальні значення швидкості й прискорення тягаря. Через який час після початку відліку тягар пройде положення рівноваги?

6.4.5. Визначити період коливань тіла, яке рухається в уявному прямолінійному тунелі, що з'єднує дві точки на поверхні Землі й проходить через її центр. Силами опору знехтувати. Землю вважати однорідною кулею.

Варіант 6.5

6.5.1. По циліндричній трубі діаметром $d = 20$ см і довжиною $l = 5$ м, яку заповнено повітрям, поширюється звукова хвиля з середньою густиною потоку енергії $j = 50$ мВт/м^2. Знайти енергію звукового поля в трубі. Температура повітря $T = 293$ К.

6.5.2. Від джерела коливань поширюється хвиля вздовж прямої лінії з амплітудою коливань $A = 10$ см. Яким буде зміщення ξ точки, віддаленої від джерела хвилі на відстань $x = \frac{5}{3}\lambda$, у момент, коли від початку коливань пройшов час $t = \frac{1}{3}T$?

6.5.3. Дві точки розташовані на відстані $\Delta x = 50$ см одна від одної на прямій, уздовж якої поширюється хвиля зі швидкістю $v = 50$ м/с. Період коливань $T = 0.05$ с. Знайти різницю фаз коливань $\Delta\varphi$ у цих точках.

6.5.4. Середня об'ємна густина енергії $\langle w \rangle = 3$ мДж/м^3. Визначити густину потоку енергії j звукової хвилі, якщо звук поширюється в сухому повітрі при нормальних умовах.

6.5.5. Потужність ізотропного точкового джерела звукових хвиль $N = 10$ Вт. Якою буде середня об'ємна густина $\langle w \rangle$ енергії на відстані $R = 10$ м від джерела хвиль? За температуру повітря взяти $T = 250$ К.

Задачі для повторення шкільної програми

6.Ш.1. У скільки разів час проходження точкою, що коливається, першої половини амплітуди менший від часу проходження нею другої половини амплітуди?

Відповідь: $t_2/t_1 = 2$.

6.Ш.2. Протягом певного часу перший математичний маятник здійснює 50 коливань, а другий — 30. Визначити довжини цих маятників, якщо один з них на 32 см коротший за інший.

Відповідь: $l_1 = 18$ см, $l_2 = 50$ см.

6.Ш.3. Якщо до певного тягаря, що коливається на пружині, причепити гирю масою 300 г, то частота коливань зменшиться в 2 рази. Визначити масу тягаря.

Відповідь: $m_1 = 100$ г.

6.Ш.4. На яку відстань від положення рівноваги треба відвести тягарець масою 640 г, який закріплено на пружині жорсткістю 0.4 кН/м, щоб він проходив це положення зі швидкістю 1 м/с?

Відповідь: $x = 4$ см.

6.Ш.5. Поперечна хвиля поширюється вздовж пружного шнура зі швидкістю 15 м/с. Період коливань точок шнура становить 1.2 с, амплітуда коливань — 2 см. Визначити довжину хвилі, фазу коливань і зміщення точки, розташованої на відстані 66 м від джерела коливань, у момент часу 5 с.

Відповідь: $\lambda = 18$ м, $\varphi = \pi$, $x = -2$ см.

6.Ш.6. Амплітуда незгасаючих коливань точки струни дорівнює 1 мм, а частота — 1 кГц. Який шлях пройде точка за 0.2 с?

Відповідь: $s = 0.8$ м.

6.Ш.7. Два маятники починають коливатися одночасно. Протягом певного часу перший маятник здійснив 15 коливань, другий — 10. Визначити відношення довжин цих маятників.

Відповідь: $l_1/l_2 = 4/9$.

6.Ш.8. Визначити масу тягаря, який на пружині жорсткістю 250 Н/м здійснює 20 коливань протягом 16 с.

Відповідь: $m = 4$ кг.

6.Ш.9. Знайти масу тягарця, який коливається на пружині жорсткістю 500 Н/м, якщо при амплітуді коливань 6 см його максимальна швидкість становить 3 м/с.

Відповідь: $m = 200$ г.

6.Ш.10. Хвиля поширюється від джерела коливань уздовж натягнутого шнура зі швидкістю 3 м/с. Визначити різницю фаз коливань двох точок, які віддалені від джерела на відстані $l_1 = 4$ м і

Відповідь: $\Delta\varphi = 2.5$ рад.

Розділ 7
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
7.1	$PV = \nu RT$	Рівняння Клапейрона – Менделєєва	P – тиск; V – об'єм; ν – кількість речовини; $R = 8.31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала; T – абсолютна температура
7.2	$P = nkT$	Тиск ідеального газу	n – концентрація частинок газу; $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана
7.3	$P = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon_\text{п}\rangle = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle$	Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів	$\langle\varepsilon_\text{п}\rangle = \frac{3}{2}kT$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули масою m

1	2	3	4
7.4	$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT$	Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекули	$\langle\varepsilon\rangle$ – середня кінетична енергія руху молекул; i – число ступенів вільності молекули
7.5	$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = A v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$; $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$	Розподіл Максвелла молекул ідеального газу за абсолютним значенням швидкості	dN – кількість молекул, які мають швидкості в інтервалі від v до $v+dv$; N – загальна кількість молекул
7.6	$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$	Середня квадратична швидкість молекул ідеального газу	$m = \mu/N_A$ – маса молекули; $N_A = R/k$ – число Авогадро
7.7	$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$	Найімовірніша швидкість руху молекул	Швидкість, при якій функція Максвелла має максимум
7.8	$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$	Середня арифметична швидкість молекул ідеального газу	
7.9	$P(z) = P_0 \exp^{-\frac{\mu g z}{RT}}$	Барометрична формула	$P(z)$ – тиск на висоті z; P_0 – тиск біля поверхні Землі

1	2	3	4
7.10	$n(z) = n_0 \exp^{-\frac{mgz}{kT}} = = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right)$	Розподіл Больцмана молекул ідеального газу в полі тяжіння Землі	n_0 – концентрація молекул біля поверхні Землі; z – координата, відлічена від поверхні Землі

Приклад 7.1. Посудина об'ємом $V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 містить кисень масою $m = 10^{-2}$ кг під тиском $P = 4 \cdot 10^5$ Па. Знайти кількість молекул N кисню в посудині, їхню середню квадратичну швидкість $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ і густину кисню ρ.

Розв'язання. Відповідно до молекулярно-кінетичної теорії газів середня квадратична швидкість молекул газу визначається формулою

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

де молярна маса кисню μ відома ($\mu = 0.032$ кг/моль), а температура газу T невідома. Визначимо її із рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$T = \frac{PV\mu}{mR}.$$

Тоді

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3PV}{m}} = 490 \text{ м/с}.$$

Кількість молекул кисню знайдемо як

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

де m/μ — кількість молей газу, N_A — число Авогадро. Підставимо числові значення:

$$N = \frac{10^{-2} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{3.2 \cdot 10^{-2}} = 1.9 \cdot 10^{23}.$$

Густину газу розраховуємо за формулою $\rho = \frac{m}{V} = 5$ кг/м^3.

Приклад 7.2. У повітрі знаходяться деякі легкі частинки пилу, що мають масу m та об'єм V. Як змінюється концентрація цих частинок з висотою h?

Розв'язання. Фізична система складається із частинок пилу й повітря, які знаходяться в полі тяжіння Землі. Отже, концентрація і частинок пилу, і молекул повітря підпорядковується розподілу Больцмана. Але якщо для молекул повітря цей розподіл можна використовувати безпосередньо, то застосування його до частинок пилу може призвести до помилкового результату. Справа в тому, що на частинки пилу крім сили тяжіння mg діє виштовхувальна сила Архімеда F_A, яка за порядком величини може бути порівняною з mg. Якщо сила Архімеда мало відрізняється від сили тяжіння, то треба знайти ефективну масу частинок пилу:

$$m_{\text{еф}} g = mg - F_A = mg - \rho g V,$$

де ρ — густина повітря, яку, у свою чергу, визначимо із рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Таким чином,

$$m_{\text{еф}} g = mg - \frac{P\mu}{RT} gV.$$

Використовуючи розподіл Больцмана, знайдемо зміну концентрації частинок з висотою h:

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{m_{\text{еф}} gh}{kT}\right) = \exp\left[-\frac{\left(m - \frac{P\mu V}{RT}\right)gh}{kT}\right].$$

Варіант 7.1

7.1.1. Яка кількість молекул N двохатомного газу міститься в об'ємі $V = 10$ см^3 під тиском $P = 5.3$ кПа при температурі $T = 27$ °C? Яку енергію теплового руху E мають ці молекули?

7.1.2. У скільки разів середня квадратична швидкість $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ пилинки масою $m = 1.2 \cdot 10^{-11}$ кг, яка зависла в повітрі, менша від імовірної швидкості v_{im} молекул повітря? Повітря вважати однорідним газом з молярною масою $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.1.3. Знайти середнє значення величини, оберненої до швидкості руху молекул газу $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$.

7.1.4. Визначити відносну кількість молекул азоту $\frac{\Delta N}{N}$, які при температурі T мають швидкості від $v_{\text{ім}}$ до $v_{\text{ім}} + \Delta v$, де $\Delta v = 20$ м/с, якщо: а) $T = 400$ К; б) $T = 900$ К.

7.1.5. Уважаючи атмосферу ізотермічною ($T = 290$ К), а прискорення вільного падіння таким, що не залежить від висоти, знайти атмосферний тиск на висоті $h_1 = 5$ км і в шахті на глибині $h_2 = 2$ км. Тиск на рівні поверхні Землі $P_0 = 10^5$ Па.

Варіант 7.2

7.2.1. Деякий газ, молекули якого мають середню квадратичну швидкість $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 450$ м/с, перебуває під тиском $P = 50$ кПа. Знайти густину газу при цих умовах.

7.2.2. При нормальних умовах ($T = 273$ К, $P = 101.4$ кПа) суміш гелію й азоту має густину $\rho = 0.6$ кг/м^3 . Знайти концентрацію атомів гелію в суміші.

7.2.3. Азот перебуває під тиском $P = 10^5$ Па при температурі $T = 300$ К. Знайти відносну кількість молекул азоту $\frac{\Delta N}{N}$, модулі швидкостей яких лежать в інтервалі від $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + \Delta v$, де $\Delta v = 1$ м/с. Зовнішні сили відсутні.

7.2.4. На якій висоті h тиск повітря становить $\eta = 0.8$ від тиску на рівні моря? Температуру $T = 290$ К уважати сталою величиною.

7.2.5. Джерело атомів срібла утворює вузький циліндричний пучок, який попадає на внутрішню поверхню нерухомого циліндра радіусом $R = 30$ см і створює на ній пляму. Циліндр починає обертатися з кутовою швидкістю $\omega = 100\pi$ рад/с. Знайти швидкість атомів срібла, якщо пляма змістилася на кут $\varphi = 18^\circ$ від початкового положення.

Варіант 7.3

7.3.1. Знайти кінетичну енергію поступального руху молекул повітря масою $m = 1$ г при температурі $T = 15$ °C. Молекулярна маса повітря $\mu = 29$ г/моль.

7.3.2. Знайти середню квадратичну, середню арифметичну та ймовірну швидкості молекул газу, який при $P = 40$ кПа має густину $\rho = 0.3$ кг/м^3.

7.3.3. Суміш водню й гелію має температуру $T = 300$ К. При якій швидкості v молекул значення функцій розподілу молекул цих газів за швидкостями $f(v)$ будуть однаковими?

7.3.4. Відношення концентрації молекул водню до концентрації молекул азоту на рівні поверхні Землі становить η_0, а на висоті $h = 3000$ м — η. Знайти відношення η/η_0 при температурі $T = 280$ К. Уважати, що прискорення й температура не залежать від висоти.

7.3.5. Під час спостереження в мікроскопі завислих частинок гумігуту було визначено, що середня кількість їх в шарах, відстань між якими $\Delta h = 40$ мкм, відрізняється одна від одної в два рази ($\alpha = 2$). Температура середовища $T = 290$ К. Діаметр частинок $d = 0.40$ мкм, густина гумігуту на величину $\Delta\rho = 0.22$ г/см^3 більша від густини навколишнього середовища. За цими даними знайти число Авогадро.

Варіант 7.4

7.4.1. При нормальних умовах молекули деякого газу рухаються з середньою квадратичною швидкістю $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 461$ м/с. Яку кількість молекул n містить одиниця маси цього газу?

7.4.2. Знайти температуру азоту, при якій швидкостям молекул $v_1 = 300$ м/с і $v_2 = 600$ м/с відповідають однакові значення функцій розподілу $f(v)$ молекул газу за швидкостями.

7.4.3. Двохатомний газ, який має масу $m = 1$ кг і густину $\rho = 4$ кг/м^3, перебуває під тиском $P = 80$ кПа. Знайти енергію теплового руху E молекул газу при цих умовах.

7.4.4. Біля поверхні Землі кількість молекул гелію майже в $\alpha = 10^5$ разів менша від кількості молекул азоту. На якій висоті кількість молекул гелію дорівнюватиме кількості молекул азоту? За середню температуру атмосфери взяти $T = 0$ °C. Прискорення вільного падіння $g = 9.81$ м/с^2.

7.4.5. Молекули азоту, який міститься в дуже високій посудині, знаходяться в однорідному полі тяжіння при температурі T. Температуру збільшили в η разів. На якій висоті h концентрація молекул залишилася незмінною?

Задачі для повторення шкільної програми

7.Ш.1. Уважаючи, що діаметр молекули водню становить близько $2.3 \cdot 10^{-10}$ м, визначити, яку довжину мав би рядок, якщо б молекули, що містяться в 1 мг водню, можна було розташувати в один ряд щільно одна до одної.

Відповідь: $l = 6.9 \cdot 10^{10}$ м.

7.Ш.2. Визначити середню кінетичну енергію молекули одноатомного газу й концентрацію молекул при температурі 290 K і під тиском 0.6 МПа.

Відповідь: $W_K = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж; $n = 1.5 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$.

7.Ш.3. Визначити густину суміші, яка складається з 50 г кисню й 20 г водню, при температурі 20 °C і під тиском $9 \cdot 10^4$ Па.

Відповідь: $\rho \approx 0.23$ кг/м^3.

7.Ш.4. Тиск повітря всередині щільно закритої пляшки при температурі 280 K становить 10^5 Па. На скільки градусів треба нагріти пляшку, щоб з неї вилетіла пробка, якщо відомо, що з холодної пляшки без нагрівання пробку можна витягти, приклавши силу 10 Н? Площа перерізу пробки становить 4 см^2.

Відповідь: $\Delta T = 70$ K.

7.Ш.5. Циліндричну посудину висотою $h = 40$ см поділили на дві частини невагомим поршнем, який ковзає без тертя. Поршень розташували на висоті $h_1 = 26.7$ см над дном циліндра. Під поршнем міститься водень, а над ним – деякий газ. Визначити молярну масу μ газу, якщо його маса дорівнює масі водню.

Відповідь: $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.Ш.6. Баластний резервуар підводного човна об'ємом 5 м^3 заповнено водою. Який тиск повітря необхідно створити в балоні об'ємом 0.2 м^3, щоб при приєднанні балона до резервуара підводний човен міг повністю звільнитися від баласту на глибині 100 м? Температура повітря не змінюється. Атмосферний тиск становить $1.01 \cdot 10^5$ Па, густина морської води — 1030 кг/м^3.

Відповідь: $P \approx 3 \cdot 10^7$ Па.

7.Ш.7. Відкриту з обох кінців скляну трубку довжиною 1 м наполовину занурюють у ртуть. Потім трубку закривають зверху й виймають із ртуті. Якою буде довжина X стовпчика ртуті, що залишилася в трубці? Атмосферний тиск становить 750 мм рт. ст.

Відповідь: $X = 25$ см.

7.Ш.8. На дні посудини, заповненої повітрям, лежить порожниста кулька радіусом 2 см. Маса кульки становить 5 г. Який тиск необхідно створити в посудині, щоб кулька піднялася вгору? Уважати, що при великих тисках для повітря можна застосовувати рівняння стану ідеального газу. Стиснення повітря вважати квазистатичним. Температура повітря становить 20 °C.

Відповідь: $124 \cdot 10^5$ Па.

7.Ш.9. Налита у склянку вода масою 200 г повністю випаровується протягом 20 діб. Скільки в середньому молекул вилітало з поверхні води щосекунди?

Відповідь: $N = 3.87 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$.

7.Ш.10. Якою є середня квадратична швидкість руху молекул газу об'ємом 5 м^3 і масою 6 кг при тиску $2 \cdot 10^5$ Па?

Відповідь: $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 707$ м/с.

7.Ш.11. У балоні знаходився газ при температурі 313 K і під тиском $1.6 \cdot 10^7$ Па. Визначити тиск у балоні після того, як 30 % маси газу випустили, а температура стала 283 K.

Відповідь: $P \approx 10^7$ Па.

7.Ш.12. Балон об'ємом 20.5 л містить суміш водню й гелію. Маса суміші становить 13 г, температура — 27 °C, тиск — $5.4 \cdot 10^5$ Па. Визначити масу зазначених газів.

Відповідь: $m_{\text{H}_2} = 4.76$ г; $m_{\text{He}} = 8.24$ г.

7.Ш.13. Закритий з обох країв циліндр наповнено газом, тиск якого становить 10^5 Па, а температура — 30 °C. Циліндр поділено легким рухомим поршнем на дві рівні частини довжиною 50 см кожна. На яку величину ΔT треба підвищити температуру газу в одній половині циліндра, щоб поршень змістився на відстань 20 см, якщо в другій половині циліндра температура газу не змінюється? Визначити тиск газу після зміщення поршня.

Відповідь: $\Delta T = 404$ K; $P_2 = 1.67 \cdot 10^5$ Па.

Розділ 8
ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
8.1	$\delta Q = dU + \delta A$	Перший закон термодинаміки	δQ – елементарна кількість теплоти, переданої термодинамічній системі; dU – елементарний приріст внутрішньої енергії системи; δA – елементарна робота, яка виконується системою над зовнішніми тілами
8.2	$\delta A = PdV$	Елементарна робота, виконана газом	P – тиск газу; dV – елементарна зміна об'єму

1	2	3	4
8.3	$C = \frac{\delta Q}{dT}$	Теплоємність тіла	δQ – кількість теплоти, переданої тілу; dT – зміна температури тіла
8.4	$U = N\langle\varepsilon\rangle = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{\mu}C_{\text{V}}T$	Внутрішня енергія ідеального газу	N – кількість молекул ідеального газу; $\langle\varepsilon\rangle$ – середня енергія молекули; m – маса газу; μ – молярна маса газу; C_V – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі
8.5	$c = \frac{C}{m}$	Питома теплоємність речовини	C – теплоємність тіла; m – маса тіла
8.6	$C_\mu = \mu c = \frac{\mu}{m}C$	Молярна теплоємність речовини	
8.7	$C_V = \frac{\mu}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{i}{2}R$	Молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі	$\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V$

1	2	3	4
8.8	$C_P = \frac{\mu}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R$	Молярна теплоємність ідеального газу при сталому тиску	
8.9	$C_P = C_V + R$	Рівняння Майєра	Тільки для ідеального газу
8.10	$PV^{\gamma} = \text{const};$ $TV^{\gamma-1} = \text{const};$ $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$	Рівняння Пуассона для адіабатичного процесу	$\gamma = C_P/C_V$ – показник адіабати; $\gamma = \frac{i+2}{i}$; $i = \frac{2}{\gamma-1}$
8.11	$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_1}{P_2}$	Робота газу при ізотермічному процесі	P_1 і P_2 – початкове й кінцеве значення тиску газу; V_1 і V_2 – початкове й кінцеве значення об'єму газу
8.12	$A = \frac{m}{\mu}C_V(T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{\mu}{m}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$	Робота газу при адіабатичному процесі	T_1 і T_2 – початкове й кінцеве значення температури газу
8.13	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$	Коефіцієнт корисної дії циклу Карно	T_1 – температура нагрівника; T_2 – температура охолодника

1	2	3	4
8.14	$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$	Коефіцієнт корисної дії теплової машини	Q_1 – кількість теплоти, переданої робочому тілу від нагрівника; Q_2 – кількість теплоти, яку віддає робоче тіло охолоднику
8.15	$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}$	Зміна ентропії	

Приклад 8.1. Ідеальний двохатомний газ спочатку ізохорно нагрівають доти, доки абсолютна температура газу не збільшиться на третину ($\alpha = 1/3$). Потім газ ізотермічно розширюється, і настає момент, коли його тиск дорівнює початковому значенню. Після цього здійснюють ізобарне стиснення газу, унаслідок чого газ набуває початкового стану. Знайти ККД циклу.

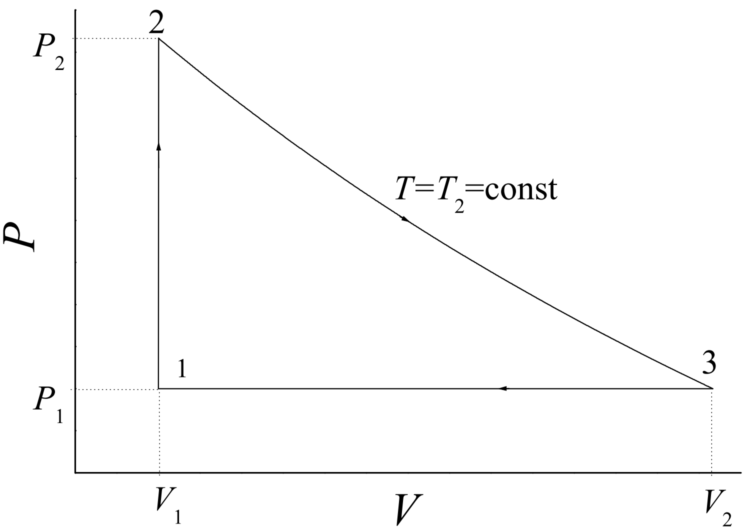

Рис. 8.1

Розв'язання. Позначимо початкові термодинамічні параметри системи: P_1, V_1, T_1 — тиск, об'єм і температура відповідно.

На рис. 8.1 зображено PV-діаграму циклу, яка складається з ізохори, ізотерми й ізобари.

Коефіцієнт корисної дії циклу

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (\text{П}8.1)$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку одержує газ від нагрівника за цикл; Q_2 — кількість теплоти, яку газ віддає за цикл охолоднику.

Газу передається теплота Q_1 на двох етапах циклу: $Q_{1\to2}$ — на етапі 1—2 (ізохорний процес); $Q_{2\to3}$ — на етапі 2—3 (ізотермічний процес). Таким чином,

$$Q_1 = Q_{1\to2} + Q_{2\to3}.$$

Кількість теплоти, яка передається газу в ізохорному процесі:

$$Q_{1\to2} = C_V \nu (T_2 - T_1)$$

де C_V — молярна теплоємність газу при сталому об'ємі, ν — кількість молів газу, а T_2 — кінцеве значення температури на цій ділянці циклу. Відповідно до умови задачі $T_2 = T_1(1+\alpha)$, тоді

$$Q_{1\to2} = C_V \nu T_1 \alpha.$$

Згідно з першим законом термодинаміки кількість теплоти, яка передається газу в ізотермічному процесі, дорівнює роботі, виконаній газом:

$$Q_{2\to3} = A_{2\to3} = \nu R T_2 \ln\frac{V_2}{V_1},$$

де V_2 — об'єм газу при температурі T_2 і тиску P_1. На етапі 3—1 газ віддає кількість теплоти

$$Q_2 = Q_{3\to1} = C_P \nu (T_2 - T_1) = C_P \alpha \nu T_1,$$

де C_P — молярна теплоємність газу при сталому тиску.

Підставимо знайдені значення Q_1 і Q_2 у формулу (П8.1):

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_P \alpha T_1}{\nu C_V \alpha T_1 + \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Замінимо відношення V_2/V_1 на T_2/T_1, яке дорівнює $1+\alpha$. Виразимо C_V і C_P через число ступенів вільності i (для двохатомного ідеального газу $i=5$). Тоді після скорочення на ν і $R/2$ одержимо

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)\alpha}{i\alpha + 2(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}.$$

Після підстановки числових значень маємо $\eta = 0.041 = 4.1\ \%$.

Приклад 8.2. Знайти зміну ентропії ΔS під час нагрівання води масою $m = 100$ г від $T_1 = 0$ °C до $T_2 = 100$ °C і наступного перетворення води на пару.

Розв'язання. Знайдемо окремо зміну ентропії $\Delta S'$ під час нагрівання води й зміну ентропії $\Delta S''$ під час перетворення її на пару. Повна зміна ентропії виражатиметься сумою $\Delta S'$ і $\Delta S''$.

Запишемо зміну ентропії загальною формулою

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{П8.2}$$

При нескінченно малій зміні температури dT витрачається кількість теплоти $dQ' = c\,m\,dT$, де m — маса тіла, c — його питома теплоємність. Підставивши вираз dQ' у рівняння (П8.2), одержимо формулу для зміни ентропії під час нагрівання води:

$$\Delta S' = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{c\,m\,dT}{T} = c\,m \ln \frac{T_2}{T_1},$$

де $c = 4200$ Дж/(кг·К).

Числове значення зміни ентропії $\Delta S' = 131$ Дж/К.

Визначаючи за формулою (П8.2) зміну ентропії у випадку перетворення води на пару, сталу температуру T_2 виносять за знак інтеграла:

$$\Delta S'' = \frac{1}{T_2}\int_1^2 dQ'' = \frac{Q''}{T_2}, \tag{П8.3}$$

де Q'' — кількість теплоти, витраченої на перетворення води на пару.

Підставивши в рівняння (П8.3)

$$Q'' = rm,$$

де r — питома теплота пароутворення ($r = 2.26 \cdot 10^6$ Дж/кг), маємо

$$\Delta S'' = \frac{rm}{T_2} = 606 \text{ Дж/К}.$$

Отже, маємо повну зміну ентропії під час нагрівання води і перетворенні її на пару:

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = 737 \text{ Дж/К}.$$

Варіант 8.1

8.1.1. Визначити питому теплоємність c_P суміші кисню й азоту, якщо кількість речовини ν_1 першого компонента дорівнює 2 молям, а кількість речовини ν_2 другого — 4 молям.

8.1.2. Кисень нагрівається при сталому тиску $P = 80$ кПа. Його об'єм збільшується від $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії кисню ΔU; 2) роботу A, виконану газом під час розширення; 3) кількість теплоти Q, переданої газу.

8.1.3. Азот масою $m = 2$ г, який мав температуру $T_1 = 300$ К, був адіабатно стиснутий так, що його об'єм зменшився в 10 разів ($n = 10$). Знайти кінцеве значення температури T_2 газу й роботу A стиснення.

8.1.4. Вуглекислий газ масою $m = 0.22$ кг ізобарно нагрівається від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Знайти зміну ентропії газу.

8.1.5. Внаслідок нагрівання азоту масою $m = 2.2$ г його температура збільшилася в два рази ($n = 2$), а ентропія — на $\Delta S = 1.6$ Дж/К. За яких умов проходило нагрівання: при $V = \text{const}$ чи при $P = \text{const}$?

Варіант 8.2

8.2.1. Деякий газ при нормальних умовах має густину $\rho = 8.94 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Визначити його молярну масу, хімічну формулу, а також питомі теплоємності c_V і c_P.

8.2.2. Певну масу азоту стиснули в п'ять разів ($n = 5$) за об'ємом: перший раз — адіабатно, другий — ізотермічно. Початковий стан газу в обох випадках однаковий. Знайти відношення робіт, затрачених на стискання газу в першому й другому випадках.

8.2.3. Три молі ($\nu = 3$ моль) ідеального газу, який мав температуру $T = 273$ К, ізотермічно розширили в п'ять разів ($n = 5$), а далі ізохорно нагріли так, що тиск став дорівнювати його початковому значенню. Протягом усього процесу газ одержав кількість теплоти $Q = 80$ кДж. Визначити показник адіабати γ цього газу.

8.2.4. Воду масою $m_1 = 5$ кг і $T_1 = 280$ К змішали з водою масою $m_2 = 8$ кг і $T_2 = 350$ К. Знайти: 1) температуру суміші θ; 2) зміну ентропії ΔS під час змішування. Питома теплоємність води $c = 4.2$ кДж/(кг·К).

8.2.5. Парова машина потужністю $P = 14.7$ кВт витрачає за одну годину роботи вугілля масою $m = 8.1$ кг з теплотворною здатністю $q = 3.3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температура котла $T_1 = 473$ К, охолодника $T_2 = 331$ К. Знайти фактичний ККД машини й порівняти його з ККД ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно в інтервалі тих самих температур.

Варіант 8.3

8.3.1. Знайти ефективний показник адіабати γ для суміші газів, яка містить гелій масою $m_1 = 10$ г і водень масою $m_2 = 4$ г.

8.3.2. Кисень займає об'єм $V_1 = 1$ м^3 і знаходиться під тиском $P_1 = 0.2$ МПа. Спочатку газ було нагріто при сталому тиску до об'єму $V_2 = 3$ м^3, а потім при сталому об'ємі — до тиску $P_2 = 0.5$ МПа. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії газу ΔU; 2) виконану газом роботу A; 3) кількість теплоти Q, переданої газу.

8.3.3. Повітря, що перебувало під тиском $P_1 = 100$ кПа, було адіабатично стиснуте до $P_2 = 1$ МПа. Розрахувати тиск P_3, який установиться, коли стиснуте повітря охолоне до початкової температури при незмінному об'ємі.

8.3.4. Обчислити зміну ентропії, якщо повітря масою $m = 2$ г переходить від об'єму $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 при тиску $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па до об'єму $V_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3 при тиску $P_2 = 10^5$ Па.

8.3.5. У машині, що працює за циклом Карно, температура нагрівника в n разів більша за температуру охолодника. Яку частину теплоти, одержану за один цикл від нагрівника, робоче тіло віддає охолоднику?

Варіант 8.4

8.4.1. Яка кількість теплоти Q виділиться, якщо азот масою $m = 1$ г при температурі $T = 280$ К і початковому тиску

$P_1 = 10^5$ Па ізотермічно стиснути до $P_2 = 1$ МПа?

8.4.2. Знайти молярну масу газу, якщо для ізобарного нагрівання півкілограма ($m = 0.5$ кг) цього газу на $\Delta T = 10$ К потрібно тепла на $\Delta Q = 1.48$ кДж більше, ніж для ізохорного нагрівання тієї самої маси газу до тієї самої температури.

8.4.3. Кисень нагрівають при сталому тиску від $T_1 = 323$ К до $T_2 = 373$ К. Маса кисню $m = 0.16$ кг. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU та ентропії ΔS у цьому процесі.

8.4.4. Холодильна машина, що працює за оберненим циклом Карно, виконує за один цикл роботу $A = 37$ кДж. При цьому вона відбирає тепло від тіла з температурою $T_2 = -10$ °C і передає його тілу з температурою $T_1 = 17$ °C. Знайти ККД циклу, кількість теплоти Q_2, відібраної від холодного тіла за один цикл, і кількість теплоти Q_1, переданої більш гарячому тілу за один цикл.

8.4.5. Зміна ентропії між адіабатами в циклі Карно $\Delta S = 4200$ Дж/К. Різниця температур між ізотермами $\Delta T = 100$ К. Яка кількість теплоти перетворюється на роботу в цьому циклі?

Задачі для повторення шкільної програми

8.Ш.1. При зменшенні об'єму одноатомного газу в 3,6 раза його тиск збільшився на 20 %. Як змінилася внутрішня енергія газу?

Відповідь: зменшилася в три рази.

8.Ш.2. Повітря, що знаходиться в циліндричній посудині під невагомим поршнем, займає об'єм 7 л і має температуру 280 К. Обчислити роботу, виконану повітрям під час його нагрівання до 296 К, за умови, що атмосферний тиск залишався незмінним і дорівнював 10^5 Па.

Відповідь: $A = 40$ Дж.

8.Ш.3. Об'єм кисню масою 160 г, температура якого становить 27 °C, під час ізобарного нагрівання збільшився вдвічі. Визначити роботу газу при розширенні, кількість теплоти, яку було витрачено на нагрівання кисню, і зміну його внутрішньої енергії. Питома теплоємність кисню при сталому тиску дорівнює 920 Дж/(кг·K).

Відповідь: $A = 12.5$ кДж; $Q = 43.63$ кДж; $\Delta U = 31.16$ кДж.

8.Ш.4. Щоб охолодити 200 г води, яка має температуру 25 °C, у неї кидають куски льоду об'ємом 6.4 см^3 кожний, температура яких -5 °C. Скільки треба кинути кусків для охолодження води до 5 °C? Для розрахунку використати: $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·K); $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·K); $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м^3; $\lambda_{\text{л}} = 3.3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Відповідь: 8 кусків.

8.Ш.5. В алюмінієвий чайник, маса якого 400 г, налили 2 кг води при температурі 10 °C і поставили на газовий пальник, що має ККД 40 %. Яка потужність пальника, якщо через 10 хв вода закипіла, причому 20 г її википіло? Для розрахунку взяти: $c_{\text{Al}} = 380$ Дж/(кг·K); $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·K); $r_{\text{в}} = 2.3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Відповідь: $P = 3.4$ кВт.

8.Ш.6. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. При цьому 80 % теплоти, одержаної від нагрівника, передається охолоднику, температура якого 0 °C. Визначити температуру нагрівника й коефіцієнт корисної дії теплової машини.

Відповідь: $T_1 = 341$ K; $\eta = 0.2$.

8.Ш.7. Ідеальна теплова машина, для якої охолодником є повітря при нормальних умовах, піднімає вантаж масою 400 кг. Робоче тіло машини одержує від нагрівника, температура якого становить 200 °C, кількість теплоти $8 \cdot 10^4$ Дж. На яку максимальну висоту піднімає вантаж теплова машина? Тертям знехтувати.

Відповідь: $h = 8.46$ м.

8.Ш.8. Визначити внутрішню енергію гелію, що заповнює аеростат об'ємом 60 м^3 при тиску 10^5 Па.

Відповідь: $U = 9 \cdot 10^6$ Дж.

8.Ш.9. Яку кількість теплоти необхідно передати водню масою $m = 12$ г, щоб нагріти його на $\Delta T = 50$ К за умов сталості: а) тиску; б) об'єму? (Питома теплоємність водню при сталому тиску $c_P = 14 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).)

Відповідь: $Q_P = 8.4$ кДж; $Q_V = 6.23$ кДж.

8.Ш.10. Кисень масою 3 кг при температурі 320 К охолоджують ізохорно, унаслідок чого його тиск зменшується в три рази. Потім газ ізобарно розширюють так, що його температура досягає початкового значення. Яку роботу виконав газ? Знайти зміну його внутрішньої енергії.

Відповідь: $A = 166$ кДж; $\Delta U = 0$.

8.Ш.11. Кисень нагрівають при сталому тиску 80 кПа. При цьому його об'єм збільшується від $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Визначити: збільшення внутрішньої енергії кисню; роботу, виконану киснем під час розширення; кількість теплоти, переданої кисню.

Відповідь: $\Delta U = 400$ кДж; $A = 160$ кДж; $Q = 560$ кДж.

8.Ш.12. Яку масу сталі, температура якої становить 20 °С, можна розплавити в печі з ККД 50 %, спаливши 2 т кам'яного вугілля? Для розрахунку взяти $c_{\text{ст}} = 460$ Дж/(кг·К); $\lambda_{\text{ст}} = 82 \cdot 10^3$ Дж/кг; $t_{\text{пл}} = 1400$ °С; питома теплота згорання вугілля $q = 2.9 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Відповідь: $m_{\text{ст}} = 4$ т.

Розділ 9

ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

Номер формули	Формула	Назва формули	Пояснення
1	2	3	4
9.1	$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 n\langle v\rangle$	Кількість зіткнень молекул газу за одиницю часу	$d_{\text{еф}}$ – ефективний діаметр молекули; $\langle v\rangle$ – середня арифметична швидкість молекул
9.2	$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 n}$	Середня довжина вільного пробігу молекули	n – концентрація молекул
9.3	$dM = -D\frac{d\rho}{dx}dS_\perp dt$	Рівняння дифузії (закон Фіка)	dM – маса газу, що переноситься через площадку $dS_\perp$ за час dt; ρ – густина газу
9.4	$D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle$	Коефіцієнт дифузії	

1	2	3	4
9.5	$dF=\eta\left\|\frac{du}{dz}\right\|dS$	Сила внутрішнього тертя (закон Ньютона)	$\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості руху шарів; u – швидкість руху шару
9.6	$\eta=\frac{1}{3}\rho\langle\lambda\rangle\langle v\rangle=\rho D$	Коефіцієнт в'язкості	ρ – густина середовища
9.7	$dQ=-\varkappa\frac{dT}{dx}dSdt$	Рівняння теплопровідності (закон Фур'є)	dQ – кількість тепла, яке переноситься через площадку dS за час dt; $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури
9.8	$\varkappa=\frac{1}{3}c_V\rho\langle\lambda\rangle\langle v\rangle=$ $=\eta c_V=\rho c_V D$	Коефіцієнт теплопровідності газу	c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі

Приклад 9.1. Знайти середню довжину вільного пробігу $\langle\lambda\rangle$ молекул гелію при температурі $T = 273$ K і тиску $P = 101.3$ кПа, якщо коефіцієнт в'язкості гелію $\eta = 13$ мкПа·с.

Розв'язання. Коефіцієнт в'язкості визначається формулою

$$\eta=\frac{1}{3}\left\langle v\right\rangle\left\langle \lambda\right\rangle\rho,$$

де
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \tag{П9.1}$$
— середня арифметична швидкість молекул.

Густину ρ знайдемо з рівняння Клапейрона – Менделєєва ($\rho = m/V$):
$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \tag{П9.2}$$
де $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярна маса гелію.

З формули (9.6) виразимо $\langle \lambda \rangle$ і підставимо це рівняння в формули (П9.1), (П9.2):
$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\langle v \rangle \rho} = \frac{3\eta}{2P}\sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}.$$

Числовий розрахунок дає $\langle \lambda \rangle = 1.82 \cdot 10^{-9}$ м.

Приклад 9.2. Літак має швидкість $v = 720$ км/год. Уважаючи, що шар повітря біля крила літака, який захоплюється внаслідок в'язкості, має товщину $\Delta z = 4$ см, знайти дотичну силу, яка діє на кожний квадратний метр поверхні крила. Ефективний діаметр як молекули азоту, так і молекули кисню $d_{\text{еф}} = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Температура повітря $T = 0$ °C.

Розв'язання. Сила внутрішнього тертя визначається формулою
$$F = \left|\frac{dp}{dt}\right| = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z}S.$$

При цьому сила тертя на одиницю поверхні крила буде такою:
$$\frac{F}{S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z}.$$

У цих формулах η — коефіцієнт в'язкості, який можна розрахувати за формулою (9.6):
$$\eta = \frac{1}{3}\langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho,$$

де $\langle\lambda\rangle$ — середня довжина вільного пробігу молекул,

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 n}.$$

Крім того, коефіцієнт в'язкості η залежить від середньої арифметичної швидкості руху молекул повітря

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Густина визначається рівнянням стану ідеального газу:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Градієнт швидкості $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ у цій задачі можна записати таким чином: $\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{v}{\Delta z}$, оскільки $\Delta v = v - 0 = v$. Тоді остаточно будемо мати

$$\frac{F}{S} = \frac{2}{3\pi d_{\text{еф}}^2 N_A}\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}\frac{v}{\Delta z} = 9 \cdot 10^{-2}\ \text{Н/м}^2.$$

Варіант 9.1

9.1.1. Густину газу збільшили в два рази ($k_1 = 2$), температуру зменшили в чотири рази ($k_2 = 4$). Як зміниться середня кількість зіткнень молекул за одиницю часу?

9.1.2. Знайти середню довжину вільного пробігу й частоту зіткнень молекул вуглекислого газу CO_2 при температурі $T = 300$ К і тиску $P = 10$ Па. Ефективний діаметр молекули CO_2 $d_{\text{еф}} = 3.2$ Å.

9.1.3. Знайти коефіцієнт теплопровідності гелію, з якого складається атмосфера Сонця. Температура сонячної поверхні $T = 6 \cdot 10^3$ К. Ефективний діаметр атома гелію $d_{\text{еф}} = 2.18$ Å.

9.1.4. Знайти коефіцієнт дифузії водню при нормальних умовах. Як зміниться ця величина, якщо підвищити температуру водню до $T_2 = 600$ К при сталому тиску? Ефективний діаметр молекули водню $d_{\text{еф}} = 2.3$ Å.

9.1.5. Обчислити коефіцієнт теплопровідності водню, коефіцієнт в'язкості якого $\eta = 8.6$ мкПа·с.

Варіант 9.2

9.2.1. Знайти середню частоту зіткненнь $\langle z \rangle$, яких зазнають атоми аргону ($\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) при $T = 290$ К і $P = 15$ Па. Ефективний діаметр атома аргону $d_{\text{еф}} = 2.9 \cdot 10^{-10}$ м.

9.2.2. Посудина об'ємом $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3 містить $N = 10^{23}$ молекул одноатомного газу. Коефіцієнт теплопровідності газу $\varkappa = 8.4 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м·К). Знайти коефіцієнт дифузії газу.

9.2.3. При нормальних умовах коефіцієнт внутрішнього тертя азоту $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Розрахувати середню довжину вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ молекул азоту.

9.2.4. Якою повинна бути гранична концентрація n молекул газу всередині сферичної посудини, щоб вони не зіштовхувалися одна з одною? Ефективний діаметр молекул газу $d_{\text{еф}} = 3 \cdot 10^{-10}$ м, діаметр посудини $D = 15$ см.

9.2.5. Яка сила опору виникає при в'язкому терті в умовах обтікання повітрям крил літака Ан-225 "Мрія" при швидкості $v = 792$ км/год, якщо на відстані $\Delta z = 4.4$ см від поверхні крила повітря є нерухомим, а площа крила $S = 905$ м^2? Температура повітря $T = -23$ °C. Ефективний діаметр молекул азоту й кисню $d_{\text{еф}} = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Молекулярна маса повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

ДОДАТОК

Універсальні фізичні сталі

$G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2	Гравітаційна стала	Закон всесвітнього тяжіння
$c = 299\,792\,458$ м/с	Швидкість поширення світла у вакуумі	$c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с
$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Стала Больцмана	Ентропія термодинамічної системи
$N_\text{А} = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	Число Авогадро	Кількість молекул (атомів) в 1 молі речовини
$R = 8.31$ Дж/(К·моль)	Універсальна газова стала	$R = k\,N_A$

Деякі характеристики планети Земля

$M_\text{з} = 6.0 \cdot 10^{24}$ кг	Маса Землі	
$L_\text{з} = 4.0 \cdot 10^{7}$ м	Довжина меридіана	Застаріле означення метра
$R_\text{з} = L_\text{з}/(2\pi)$	Радіус Землі (середній)	$R_\text{з} \approx 6.4 \cdot 10^6$ м
$g = GM_\text{з}/R_\text{з}^2$	Прискорення вільного падіння	$g \approx 10$ м/с^2 (у розрахунках)
$\mu_\text{пов} = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Молярна маса повітря	
$\gamma_\text{пов} = 1.4$	Показник адіабати	N_2:$O_2 \approx 80:20$ – склад повітря
$T_\text{норм} = 0$ °C	Нормальні умови	$T_\text{норм} \approx 273$ K
$P_\text{норм} = 1$ атм	Нормальні умови	$P_\text{норм} \approx 10^5$ Па

Похідні. Загальні правила

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad \frac{d(Cf)}{dx} = C\frac{df}{dx} \quad (C = \mathrm{const})$$

$$\frac{d(f\,g)}{dx} = \frac{df}{dx}\,g + f\,\frac{dg}{dx} \qquad \frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\,g - f\,\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} \qquad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} \ \left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$$

Похідні деяких функцій

$$\frac{dC}{dx} = 0 \qquad \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\right) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\exp^{x}\right) = \exp^{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Формула Ньютона – Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ де } F(x) \, - \text{ первісна функції } f(x)$$

Невизначені інтеграли (первісні) деяких функцій[1]

$$\int dx = x \qquad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int \exp^{x}\,dx = \exp^{x}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

[1]До правої частини кожної рівності може буде додано довільну сталу.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

1.1.1. $\langle v\rangle = -B + C(t_1+t_2) = 7$ м/с, $\langle a\rangle = 2C = 4$ м/с^2. **1.1.2.** $y = C\sqrt{(x-A)/B}$, $\vec{v} = 2Bt\vec{i} + C\vec{j}$, $\vec{a} = 2B\vec{i}$, $v = \sqrt{4B^2t^2+C^2}$, $a = 2|B|$, $a_\tau = \frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}}$, $a_n = 2\frac{|B||C|}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}}$, $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4B^2t^2+C^2)^{3/2}}{2|B||C|}$. **1.1.3.** $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha\beta t^2\vec{j}$, $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \alpha\beta t\vec{j}$, $\vec{a} = \alpha\beta\vec{j}$. **1.1.4.** $\langle v\rangle = \pi R/\tau = \frac{\pi}{10}$ м/с, $|\langle\vec{v}\rangle| = \frac{2R}{\tau} = 0.2$ м/с, $|\langle\vec{a}\rangle| = \frac{2\pi R}{\tau^2} = \frac{\pi}{50}$ м/с^2. **1.1.5.** $s(t) = \frac{1}{\nu}\left(1-e^{-\nu t}\right)$.

1.2.1. $\langle v\rangle = B + Ct_f = 12$ м/с, $\langle a\rangle = 1$ м/с^2.
1.2.2. $\vec{v} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{a} = 6\vec{i}$, $v = 2\sqrt{9t^2+1}$, $a = 6$, $a_\tau = \frac{2\cdot 9t}{\sqrt{9t^2+1}}$, $a_n = \frac{6}{\sqrt{9t^2+1}}$, $R = \frac{2}{3}(9t^2+1)^{3/2}$.
1.2.3. $\vec{a} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$, $a = 2\sqrt{1+9t^2}$, $\Delta\vec{r} = t_f\vec{i} + t_f^2\vec{j} + t_f^3\vec{k} = 2\vec{i} + 4^2\vec{j} + 8\vec{k}$, $|\Delta\vec{r}| = t_f\sqrt{1+t_f^2+t_f^4} = 2\sqrt{21}$.
1.2.4. $S = \frac{k^2t^2}{4}$, $v = \frac{k^2t}{2}$, $a = \frac{k^2}{2}\sqrt{1+\frac{k^4t^4}{4R^2}}$, $\cos\alpha = \frac{2R}{\sqrt{4R^2+k^4t^4}}$.
1.2.5. $v = \frac{2}{\pi}(1-\cos\pi t)$, $s = \frac{2}{\pi}\left(t - \frac{\sin\pi t}{\pi}\right)$, $R = \frac{2}{\pi^2}\frac{(1-\cos\pi t)^2}{\cos\pi t}$.
1.3.1. $t_f = \frac{a_f-2C}{6D}$, $\langle a\rangle = C + \frac{a_f}{2} = 0.64$ м/с^2.
1.3.2. $\vec{v} = 2\omega(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})$, $\vec{a} = -2\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$, $v = 2\omega$, $a = 2\omega^2$, $a_\tau = 0$, $a_n = 2\omega^2$, $R = 2$. **1.3.3.** $\vec{r} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + t^4\vec{k}$, $|\Delta\vec{r}| = t_1^2\sqrt{1+t_1^2+t_1^4} = 4\sqrt{21}$. **1.3.4.** $v = v_0e^{-rt}$, $s = \frac{v_0}{r}\left(1-e^{-rt}\right)$. **1.3.5.** $\vec{v} = v_0(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$, $\vec{a} = -v_0\omega\sin\omega t\,\vec{i} + v_0\omega\cos\omega t\,\vec{i}$, $v = v_0$, $a = v_0\omega$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
1.4.1. $a = -\frac{v_0}{\tau}$, $s(t<\tau) = v_0t - \frac{v_0t^2}{2\tau}$, $s(t>\tau) = v_0(\tau - t) + \frac{v_0t^2}{2\tau}$. **1.4.2.** $\vec{v} = 6\,t\,\vec{i} + 8\,t\,\vec{j}$, $v = 10t$, $\vec{a} = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$, $a = 10$, $a_\tau = 10$, $a_n = 0$, $s(t_f) = 5t_f^2 = 500$.

1.4.3. $\vec{a} = -g\vec{j}$, $a = g$, $\vec{v}(t) = v_0\vec{i} - gt\vec{j}$, $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$, $\vec{r}(t) = v_0 t\vec{i} + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}$, $a_\tau = g\frac{gt}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$, $a_n = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$, $R = \frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$. **1.4.4.** $a = \frac{k^2}{2}$, $v = \frac{k^2t}{2}$, $\langle v\rangle = \frac{k\sqrt{S_1}}{2}$.
1.4.5. $R = \frac{c^3}{2bS}$, $a = \sqrt{c^2 + b^2\left(\frac{2S}{c}\right)^4}$.

Розділ 2

2.1.1. $v = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $s = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.
2.1.2. $v = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right)$, $s = \frac{mg}{\alpha}\left[t + \frac{m}{\alpha}\left(\exp(-\frac{\alpha}{m}t) - 1\right)\right]$, $v_\infty = \frac{mg}{\alpha}$. **2.1.3.** $t \le \frac{\mu mg}{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow s = 0$, $t > \frac{\mu mg}{b} \Rightarrow s = \frac{b}{6m}\left(t - \frac{\mu mg}{b}\right)^3$. **2.1.4.** $\Delta\vec{p} = \tau^4\vec{i} + \tau^2\vec{j}$.
2.1.5. $R_C = \frac{m}{M+m}L_{Mm} \approx 4600$ км. **2.2.1.** $\vec{F} = -m\omega^2(x\vec{i}+y\vec{j})$, $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$. **2.2.2.** $v = \frac{mg}{r}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1 - \exp(-\frac{r}{m}t)\right)$.
2.2.3. $y = \frac{b\,x^3}{6mv_0^3}$. **2.2.4.** $\vec{p} = \frac{2\tau}{\pi}\vec{F}_0$. **2.2.5.** $X_C = \frac{1}{6}l$.
2.3.1. $y = h - \frac{gx^2\sin\alpha}{2v_0^2}$. **2.3.2.** $v(t) = v_0\exp\left(-\frac{r}{m}\,t\right)$, $s(t) = \frac{v_0 m}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r}{m}\,t\right)\right)$. **2.3.3.** $y = x^{2/3}$.
2.3.4. $t_B - t_A = \frac{|\Delta\vec{p}|}{mg}$. **2.3.5.** $X_C = \frac{5}{9}l$.
2.4.1. $y = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. **2.4.2.** $v(t) = \sqrt{v_0^2 + \frac{\alpha}{m}t}$.
2.4.3. $s(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t)$. **2.4.4.** $v = \sqrt{g\frac{l^2-l_0^2}{l}}$.
2.4.5. $X_C = \frac{3}{4}H$.

Розділ 3

3.1.1. $\varepsilon = \frac{2\pi\nu}{\Delta t} = \pi$ рад/с^2, $N = \frac{\nu\Delta t}{2} = 25$ с.
3.1.2. $a_n = (B + 3C\,t^2)^2\,R = 115.2$ м/с^2, $a_\tau = 6R\,C\,t = 0.6$ м/с^2, $a = R\sqrt{(B+3C\,t^2)^4 + 36\,C^2\,t^2} = 115.2$ м/с^2.
3.1.3. $\omega(t) = \frac{a}{b} + \left(\omega_0 - \frac{a}{b}\right)\exp^{-bt}$.
3.1.4. $F = \frac{4\pi}{5}\frac{M_3R_3}{T^2} = 1.28\cdot 10^{22}$ Н.
3.1.5. $h_ц/h_к = \left(1 + \frac{J_ц}{m_ц R_ц^2}\right)\Big/\left(1 + \frac{J_к}{m_к R_к^2}\right) = 15/14$.

3.2.1. $\varepsilon = \frac{2\pi\nu_0}{t} = \frac{\pi}{6}$ рад/с^2, $N = \frac{\nu_0 t}{2} = 150$. **3.2.2.** $J = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = 2.25$ кг·м^2.
3.2.3. $P = J\frac{4\pi^2\nu^2}{\tau} \approx 400$ кВт. **3.2.4.** $a = g\frac{4mR^2}{J+5mR^2} \Rightarrow a_{\text{п}} = \frac{2}{3}g$, $a_{\text{с}} = \frac{8}{11}g$, $F = mg\frac{mR^2-J}{J+5mR^2} \Rightarrow F_{\text{п}} = 0$, $F_{\text{с}} = \frac{1}{11}mg$. **3.2.5.** $N = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g} = 15$. **3.3.1.** $\frac{\Delta a_\tau}{dt} = 6DR = 0.3$ м/с^3. **3.3.2.** $\omega = \frac{2v_0}{D}\frac{\tau^2}{(t+\tau)^2}$, $\varepsilon = -\frac{4v_0}{D}\frac{\tau^2}{(t+\tau)^3}$, $\varphi = \frac{2v_0\tau}{D}\frac{t}{t+\tau}$. **3.3.3.** $N = \frac{1}{2}\nu_0\Delta t = 105$, $M = \frac{\pi\nu_0 mD^2}{4\Delta t} \approx 0.044$ Н·м. **3.3.4.** $M = -\frac{2}{5}mR^2\frac{B}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. **3.3.5.** $\mu = \frac{\pi\nu_0 mD}{2F\tau} = 0.4$. **3.4.1.** $N = \pi\frac{\nu_2^2-\nu_1^2}{\varepsilon} \approx 21.6$, $\Delta t = 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{\varepsilon} \approx 7.85$ с. **3.4.2.** $\omega = 2B\,t+3C\,t^2$, $v = \frac{1}{2}D\,(2B\,t+3C\,t^2)$, $\varepsilon = 2B+6C\,t$, $a_\tau = D\,(B + 3C\,t)$. **3.4.3.** $a = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m} = \frac{1}{8}g$.
3.4.4. $a_1/a_2 = \left(1+\frac{J_2}{m_2R_2^2}\right)\Big/\left(1+\frac{J_1}{m_1R_1^2}\right) = \frac{3}{4}$.
3.4.5. $\omega = \frac{mvR}{J+mR^2} \approx \frac{mvR}{J} = 1.5$ рад/с.

Розділ 4

4.1.1. $h = \frac{m^2v^2}{2g(M+m)^2} = 72$ мм. **4.1.2.** $v_1 = \frac{m_2v_2\cos\alpha}{m_1} = 0.2$ м/с. **4.1.3.** $A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g(l_2 - l_1) = 4.9$ Дж. **4.1.4.** $A = \frac{m}{2}\left((D + B\,t_2 + C\,t_2^2)^2 - (D + B\,t_1 + C\,t_1^2)^2\right) = 60$ МДж. **4.1.5.** $v_2 = \sqrt{\frac{2FR}{m} + v_1^2} = 16$ м/с.
4.2.1. $p_\Sigma = \frac{2}{3}m\sqrt{2gl} = 5$ кг·м/с.
4.2.2. $\frac{m_1}{m_2} = 2\cos\alpha + 1$. **4.2.3.** $\langle N\rangle = \frac{1}{2}\mu mgv_0 = 1.5$ Вт. **4.2.4.** $h_{\max} = R_3$. **4.2.5.** $v_0 = \sqrt{\mu gl} = 2.5$ м/с. **4.3.1.** $A_\Sigma(t) = \frac{m\alpha^4t^2}{8}$. **4.3.2.** $\Delta E_K = -\frac{m_1m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)}$.
4.3.3. $E_K = \frac{M^2\tau^2}{2J} = 2$ кДж.
4.3.4. $h_1 = \frac{h_2}{2(H_2+h_2)}\left(h_2 + \sqrt{h_2^2 + 4(H_2 + h_2)H_1}\right) \approx 1.33$ м.
4.3.5. $\mu = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.2$. **4.4.1.** $v = 2\pi\nu_1 R\frac{m_1}{m_1+2m_2} \approx 0.942$ м/с.

4.4.2. $\eta = \frac{m_1}{m_1+m_2} = 97.5\%$. **4.4.3.** $v = \left(\frac{M}{2m} - \frac{1}{6}\right)\sqrt{6gl}\sin\frac{\alpha}{2}$, $v_0 = \left(\frac{M}{2m} + \frac{1}{6}\right)\sqrt{6gl}\sin\frac{\alpha}{2}$. **4.4.4.** $t = \frac{2l}{\sqrt{gh}} = 4$ с. **4.4.5.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Розділ 5

5.1.1. $v_x = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2}\right)\left(\frac{l}{l'}\right)^2} \approx 0.426c$, $v_0 = \frac{v_x - v_x'}{1 - v_x v_x'/c^2} \approx$ $\approx 0.341c$. **5.1.2.** $A = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = \frac{5}{12}m_0c^2$, $A_K = \frac{m_0(v_2^2 - v_1^2)}{2} = 0.14\ m_0c^2$, $A_K < A$.

5.1.3. $v \approx c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c\tau_0}{l}\right)^2\right) = 0.995c$.

5.1.4. $F = \frac{I}{ec}\sqrt{E_K(E_K + 2m_0c^2)}$, $P = \frac{IE_K}{e}$.

5.1.5. $a = \frac{F}{m_e}\frac{1}{(1+E_K/m_ec^2)^3} = \frac{8}{27}\frac{F}{m_e}$.

5.2.1. $v = c\sqrt{\frac{2\Delta l}{l_0}} = 10^{-3}c = 10 \cdot V_3$.

5.2.2. $\Delta\tau = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\tau \approx 14$ мс. **5.2.3.** $M_r = \frac{35}{12}m_0$, $v = \frac{16\pm 9}{35}c$, $M_{0+} = \frac{5\sqrt{6}}{6}m_0 \approx 2.04\,m_0$, $M_{0-} = \frac{7\sqrt{6}}{6}m_0 \approx 2.86\,m_0$.

5.2.4. $s(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1\right)$, $\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}t}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$, $v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{mc}{Ft}\right)^2}}$. **5.2.5.** $\tau_0 \approx \frac{l}{c}\sqrt{\frac{2(c-v)}{c}} = 25$ нс.

5.3.1. $v = c\sqrt{1-n^2} = 0.6\,c$. **5.3.2.** $U = \frac{m_ec^2}{e}(K-1)$.

5.3.3. $\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{K(K+2)}{3}} = 2\sqrt{2}$. **5.3.4.** $F_L = \frac{E}{R}\left(\frac{v}{c}\right)^2 =$ $= 8 \cdot 10^{-14}$ Н. **5.3.5.** $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ м.

Розділ 6

6.1.1. $v_{\max} = 0.1$ м/с, $a_{\max} = 0.5$ м/с^2.

6.1.2. $F_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}m\omega^2A = 0.05$ Н, $F_{\max} = m\omega^2A = 0.1$ Н.

6.1.3. $N_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 100$, $t_{1/2} = \frac{2\pi\ln 2}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 100$ с.

6.1.4. $A_\Sigma = \sqrt{2}$, $\varphi_{0\Sigma} = \frac{\pi}{4}$. **6.1.5.** $T = 2\pi\left(\frac{\rho}{\rho_1 - \rho_2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{h}{g}}$.

6.2.1. $T = 2\pi\frac{A}{v_{max}} = 0.03$ с, $a_{max} = \frac{v_{max}^2}{A} = 4000$ м/с^2. **6.2.2.** $x_\Sigma = A_\Sigma \sin(t + \varphi_{0\Sigma})$, $A_\Sigma = \sqrt{5}$, $\varphi_{0\Sigma} = \operatorname{arctg} 2$. **6.2.3.** $T = \pi\sqrt{\frac{ml}{F}}$. **6.2.4.** $y = \frac{1}{2} - x^2$ $(-1 \le x \le 1)$. **6.2.5.** $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\eta^2}{32\pi^2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. **6.3.1.** $F = \frac{4\pi^2 mA}{T^2}\sin\frac{2\pi\tau}{T} \approx$ ≈ 1 Н, $E = \frac{2mA^2\pi^2}{T^2} \approx 0.2$ Дж. **6.3.2.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$. **6.3.3.** $\lambda = \frac{\pi|\ln(1-\eta)|}{\tau}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$. **6.3.4.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{m}}$. **6.3.5.** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. **6.4.1.** $\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}} = 4$ с$^{-1}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1.57$ с, $A = \sqrt{x^2 - \frac{v^2 x}{a}} \approx 7.07$ см, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{x\omega}\right) = \frac{\pi}{4}$ рад. **6.4.2.** $A = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$. **6.4.3.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\Delta}{g}}$, $A = \Delta\sqrt{2}$. **6.4.4.** $A = 2$ м, $T = 2$ с, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_{\max} \approx 6.28$ м/с, $a_{\max} \approx 20$ м/с^2, $\tau(x = 0) = 0.5$ с. **6.4.5.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 5 \cdot 10^3$ с. **6.5.1.** $E = \frac{\pi d^2}{4} lj\sqrt{\frac{\mu}{\gamma RT}}$. **6.5.2.** $\xi\left(\frac{5}{3}\lambda, \frac{1}{3}T\right) = -\frac{A}{2}$. **6.5.3.** $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{vT}$. **6.5.4.** $j = \langle w\rangle\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$. **6.5.5.** $\langle w\rangle = \frac{N}{4\pi R^2}\sqrt{\frac{\mu}{\gamma RT}}$.

Розділ 7

7.1.1. $N = \frac{PV}{kT} = 1.28 \cdot 10^{19}$, $E = \frac{5}{2}PV = 133$ мДж. **7.1.2.** $\frac{v_i}{\langle v_{\text{кв}}\rangle} = \sqrt{\frac{2mN_A}{3\mu}} = 1.29 \cdot 10^7$. **7.1.3.** $\left\langle\frac{1}{v}\right\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$. **7.1.4.** $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}\Delta v$, а) $\frac{\Delta N}{N} = 3.4$ %, б) $\frac{\Delta N}{N} = 2.3$ %. **7.1.5.** $P_1 = P_0\exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT}\right) = 5.54 \cdot 10^4$ Па,
$P_2 = P_0\exp\left(\frac{\mu g h_2}{RT}\right) = 1.27 \cdot 10^5$ Па.
7.2.1. $\rho = \frac{3P}{\langle v_{\text{кв}}\rangle^2} = 0.74$ кг/м^3.
7.2.2. $n_{He} = \left(\frac{P}{kT} - \frac{\rho N_A}{\mu_{N_2}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\mu_{He}}{\mu_{N_2}}\right) \approx 1.64 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.
7.2.3. $\frac{\Delta N}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\pi RT}}\ e^{-\frac{4}{\pi}}\Delta v = 1.9 \cdot 10^{-3}$.

7.2.4. $h = -\frac{RT\ln\eta}{\mu g} = 1890$ м. **7.2.5.** $v = \frac{\omega R}{\varphi} = 300$ м/с.
7.3.1. $E = \frac{3mRT}{2\mu} = 124$ Дж. **7.3.2.** $\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = 632$ м/с,
$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8P}{\pi\rho}} = 582$ м/с, $v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} = 516$ м/с.
7.3.3. $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2-\mu_1}}\sqrt{\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 1610$ м/с.
7.3.4. $\frac{\eta}{\eta_0} = \exp\frac{(\mu_2-\mu_1)gh}{RT} = 1.398$.
7.3.5. $N_A = \frac{6RT\ln\alpha}{\pi d^3 g\Delta\rho\Delta h} = 6.35\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.
7.4.1. $n = \frac{\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{3kT} = 1.88\cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.
7.4.2. $T = \frac{\mu(v_2^2-v_1^2)}{4R\ln\frac{v_2}{v_1}} = 328$ К. **7.4.3.** $E = \frac{5mP}{2\rho} = 50$ кДж.
7.4.4. $h = \frac{RT\ln\alpha}{(\mu_1-\mu_2)g} = 111$ км. **7.4.5.** $h = \frac{RT}{\mu g}\frac{\eta\ln\eta}{(\eta-1)}$.

Розділ 8

8.1.1. $c_P = \frac{(i+2)(\nu_1+\nu_2)R}{2(\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2)} = 992$ Дж/(кг·К).
8.1.2. $\Delta U = \frac{i}{2}P(V_2 - V_1) = 400$ кДж,
$A = P(V_2 - V_1) = 160$ кДж, $Q = \frac{i+2}{2}P(V_2 - V_1) = 560$ кДж.
8.1.3. $T_2 = T_1 n^{2/i} = 754$ К, $A = \frac{imRT_1}{2\mu}(n^{2/i} - 1) = 673$ Дж.
8.1.4. $\Delta S = \frac{(i+2)mR}{2\mu}\ln\frac{T_2}{T_1} = 115.2$ Дж/К. **8.1.5.** $P = \text{const}$.
8.2.1. $\mu = \frac{\rho RT}{P} = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль, H_2, $c_V = 10.37$ кДж/(кг · К), $c_P = 14.54$ кДж/(кг · К).
8.2.2. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{i(n^{2/i}-1)}{2\ln n} \approx 1.4$.
8.2.3. $\gamma=1 + (n-1)\Big/\left(\frac{Q}{\nu RT} - \ln n\right)\approx 1.4$.
8.2.4. $\theta = \frac{m_1T_1+m_2T_2}{m_1+m_2} = 323$ К, $\Delta S = c(m_1\ln\frac{\theta}{T_1} - m_2\ln\frac{T_2}{\theta}) =$
$= 303$ Дж/К. **8.2.5.** $\eta_1 = \frac{Pt}{qm} = 19.8\%$. $\eta_2 = \frac{T_2-T_1}{T_1} = 30.0\%$.
8.3.1. $\gamma = 1 + 2\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\Big/\left(i_1\frac{m_1}{\mu_1} + i_2\frac{m_2}{\mu_2}\right) = 1.51$.
8.3.2. $\Delta U = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = 3.25$ МДж,
$A = P_1(V_2 - V_1) = 0.4$ МДж, $Q = \Delta U + A = 3.65$ МДж.

8.3.3. $P_3 = P_2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{2}{i+2}} = 518$ кПа.
8.3.4. $\Delta S = \frac{mR}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1} = 0.63$ Дж/К.
8.3.5. $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n}$. **8.4.1.** $Q = \frac{mRT}{\mu}\ln\frac{P_2}{P_1} = 191$ Дж.
8.4.2. $\mu = \frac{mR\Delta T}{\Delta Q} = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль.
8.4.3. $\Delta U = \frac{imR}{2\mu}(T_2 - T_1) = 5.19$ кДж. $\Delta S = \frac{(i+2)mR}{2\mu}\ln\frac{T_2}{T_1} = 21$ Дж/К. **8.4.4.** $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 0.093$, $Q_2 = \frac{AT_2}{T_1 - T_2} = 360$ кДж, $Q_1 = \frac{AT_1}{T_1 - T_2} = 397$ кДж.
8.4.5. $A = \Delta S\Delta T = 4.2\cdot 10^5$ Дж.

Розділ 9

9.1.1. Не зміниться. **9.1.2.** $\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 P} = 9.1\cdot 10^{-4}$ м, $\langle z\rangle = \frac{4d_{\text{еф}}^2 P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{\mu T}} = 4.2\cdot 10^5$ с$^{-1}$.
9.1.3. $\varkappa = \frac{k}{\pi d_{\text{еф}}^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} = 0.185$ Вт/(м·К).
9.1.4. $D_1 = \frac{2}{3}\frac{kT_1}{\pi d_{\text{еф}}^2 P}\sqrt{\frac{RT_1}{\pi\mu}} = 9.1\cdot 10^{-5}$ м^2/с, $\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = 3.26$. **9.1.5.** $\varkappa = \frac{i\eta R}{2\mu} = 89$ мВт/(м·К).
9.2.1. $\langle\nu\rangle = \frac{4d_{\text{еф}}^2 P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{\mu T}} = 5.5\cdot 10^5$ с$^{-1}$.
9.2.2. $D = \frac{2\varkappa V}{3Nk} \approx 2\cdot 10^{-5}$ м^2/с.
9.2.3. $\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{2P}\sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}} = 9.1\cdot 10^{-6}$ м.
9.2.4. $n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 D} = 1.67\cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.
9.2.5. $F = \frac{2}{3\pi d_{\text{еф}}^2 N_A}\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}\frac{v}{\Delta z}S \approx 77$ Н.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Иродов И.Е. Задачи по физике / И.Е. Иродов. — М. : Наука, 1988. — 416 с.
2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. — М. : Наука, 1988. — 288 с.
3. Чертов А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. — М. : Высш. шк., 1981. — 496 с.
4. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка : навч. посіб. до практ. занять / Б.Г. Падалка, Л.С. Завертанна, П.А. Комозинський, А.О. Таран. — Х. : Держ. аерокосм. ун-т “Харк. авіац. ін-т”, 1999. — 84 с.
5. Дущенко В.П. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка / В.П. Дущенко, І.М. Кучерук. — К. : Вища шк., 1993. — 431 с.
6. Пастушенко С.М. Загальна фізика. Механіка / С.М. Пастушенко. — К. : НАУ, 2002. — 284 с.
7. Воловик П.М. Фізика для університетів / П.М. Воловик. — К. ; Ірпінь : Перун, 2005. — 864 с.
8. Савельев И.В. Курс общей физики : в 3 т. / И.В. Савельев. — СПб. : Лань, 2008. — Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. — 432 с.
9. Джанколи Д. Физика : в 2 т. / Д. Джанколи. — М. : Мир, 1989. — Т. 1. — 656 с.

ЗМІСТ

Охрімовський Андрій Михайлович
Комозинський Петро Адамович
Подшивалова Оксана Володимирівна
Чугай Олег Миколайович

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2010
Підписано до друку 17.03.2010
Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 6. Обл.-друк. арк. 6,75. Наклад 500 прим.
Замовлення 73. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр “ХАІ”
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu