ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к выполнению лабораторных работ № 1–9

Санкт-Петербург
2006

Составители: М. В. Бураков, Т. Г. Полякова, А. В. Подзорова
Рецензент *С. А. Гусев*

Методические указания содержат описание лабораторных работ по ряду базовых разделов теории автоматического управления, краткие теоретические сведения, а также описание возможностей пакета MatLab, которые могут быть использованы при выполнении каждой работы.

Предназначены для студентов специальности 220201 «Управление и информатика в технических системах», изучающих дисциплину «Теория автоматического управления».

Подготовлены кафедрой управления и информатики в технических системах и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Редактор *А. М. Смирнова*
Верстальщик *С. Б. Мацапура*

Подписано к печати 11.10.05. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Уч. -изд. л. 3,2. Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Отдел электронных публикаций и библиографии
Отдел оперативной полиграфии
ГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

© ГОУ ВПО «СПбГУАП», 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие указания составляют учебно-методическую базу для выполнения лабораторных работ по курсу «Теория автоматического управления» (ТАУ) студентами направления «Автоматизация и управление».

Цель работы: развить и закрепить у студентов навыки практического анализа и проектирования систем управления.

Тематика лабораторных работ охватывает базовые разделы линейной теории автоматического управления.

В процессе выполнения лабораторных работ студенты должны исследовать такие вопросы, как:

– изучение динамических свойств и построение динамических характеристик различных звеньев автоматических систем во временной и частотной областях;

– исследование устойчивости замкнутых систем;

– определение ошибок и показателей точности замкнутых систем;

– изучение частотных, корневых и других методов синтеза корректирующих устройств для улучшения динамических свойств и повышения показателей качества.

Выполнение лабораторных работ предполагает использование популярного мощного пакета моделирования MatLab с расширениями Control System Toolbox и Simulink. Каждая работа содержит описание команд MatLab, которые могут быть использованы при выполнении заданий.

При подготовке и выполнении лабораторных работ рекомендуется использовать классические учебные пособия по теории автоматического управления [1, 2], а также [3–6].

Для углубленного знакомства с возможностями системы MatLab могут быть рекомендованы учебные пособия [7–9].

Лабораторная работа №1

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

1. Методические указания

Рассмотрим систему автоматического управления (САУ), описываемую линейным дифференциальным уравнением вида:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \qquad (1)$$

где $u(t)$ – входной процесс; $y(t)$ – выходной процесс; a_i, b_j, – постоянные коэффициенты; n, m ($n >= m$) – постоянные числа.

Если ввести обозначение p для оператора дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, то можно записать (1) в операторной форме:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) =$$
$$= (b^m p^m + b^{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) u(t), \qquad (2)$$

откуда получается:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(p)}{A(p)} = W(p),$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – полиномы из формулы (2).

Выражение (2) по виду совпадает с определением передаточной функции (ПФ) как отношения преобразования по Лапласу выходной переменной к преобразованию по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \qquad (3)$$

где s – комплексная переменная.

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена $B(s)$, называются *нулями* передаточной функции, а корни многочлена $A(s)$ – *полюсами*.

Описание типовых динамических звеньев приведено в таблице.

Таблица

Типовые динамические звенья

[1]	Название звена	ПФ звена
1	Интегрирующее	$W(s)=\dfrac{K}{s}$
2	Дифференцирующее	$W(s)=Ks$
3	Усилительное (безынерционное)	$W(s)=K$
4	Апериодическое 1-го порядка (инерционное)	$W(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$
5	Апериодическое 2-го порядка (все корни вещественные)	$W(s)=\dfrac{K}{T_2^2s^2+T_1s+1};\ T_1\geq 2T_2$
6	Колебательное*	$W(s)=\dfrac{K}{T_2^2s^2+T_1s+1};\ T_1<2T_2$
7	Консервативное	$W(s)=\dfrac{K}{Ts^2+1}$
8	Интегрирующее с запаздыванием (реальное интегрирующее)	$W(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$
9	Дифференцирующее с запаздыванием (реальное дифференцирующее)	$W(s)=\dfrac{Ks}{Ts+1}$
10	Форсирующее	$W(s)=K(Ts+1)$
11	Изодромное	$W(s)=\dfrac{K(Ts+1)}{s}$

* ×àñòî è ñ ïîëüçóåòñÿ îïèñàíèå êî ëåáàòåëüíîãî çâåíà â âèäå:

$$W(s)=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1};\quad T=T_2,\quad \xi=\frac{T_1}{2T_2}\ .$$

Временные характеристики динамического звена представляют собой зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход некоторого типового воздействия. Обычно выполняется анализ выхода системы на единичный скачок (функция Хевисайда) и импульсную функцию (функция Дирака или δ-функция).

Единичный скачок $1(t)$ определяется условиями:

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le 0, \\ 1 \text{ при } t > 0. \end{cases}$$

Реакция САУ на единичный скачок называется *переходной функцией* системы и обозначается $h(t)$. При неединичном ступенчатом воздействии $g(t)=N1(t)$, где $N = \text{const}$, в соответствии с принципом суперпозиции выходная реакция системы будет

$$y(t) = Nh(t) .$$

Импульсная функция $\delta(t)$ определяется условиями:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ при } t = 0, \\ 0 \text{ при } t \ne 0. \end{cases}$$

Очевидно:

$$\delta(t) = 1'(t).$$

Реакция САУ на импульсную функцию называется *импульсной переходной функцией системы* (функцией веса) и обозначается $w(t)$.

Импульсная и переходная функции системы связаны соотношением

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)\, d\tau.$$

2. Использование пакета MatLab

В пакете MatLab имеется два основных варианта для исследования передаточных функций и моделирования САУ:

– использование команд пакета расширения Control System Toolbox;

– использование пакета Simulink.

Control System Toolbox [8, 9] предназначен для работы с LTI-моделями (Linear Time Invariant Models – линейные модели с постоянными параметрами) систем управления.

Команда, создающая LTI-систему с одним входом и одним выходом в виде передаточной функции, имеет следующий синтаксис:

$$\text{TF}([b_m, ..., b_1, b_0], [a_n, ..., a_1, a_0]),$$

где $b_m, ..., b_1, b_0$ и $a_n, ..., a_1, a_0$ – значения коэффициентов полиномов B и A в (3).

Например, если требуется описать ПФ вида

$$W = \frac{s+1}{2s^2+8s+5}$$

и узнать значения ее нулей и полюсов, то нужно ввести в окне команд MatLab следующие команды:

```
>> w=tf([1 1],[2 8 5])
>> zero(w)
>> pole(w)
```

Исследовать реакцию LTI-модели на типовые входные воздействия можно с помощью команд

```
>> step(w)
>> impulse(w)
```

Можно получить на одном графике реакцию сразу нескольких динамических звеньев, если использовать команды вида:

```
>> step(w,w1,w2)
>> impulse(w, w1,w2)
```

В приведенных примерах время моделирования выбирается автоматически. При необходимости его можно явно указать в команде

```
>> step(w, w1, w2, t),
```

где t – время моделирования в секундах.

На рис. 1 показан пример моделирования динамики колебательного звена при различных параметрах:

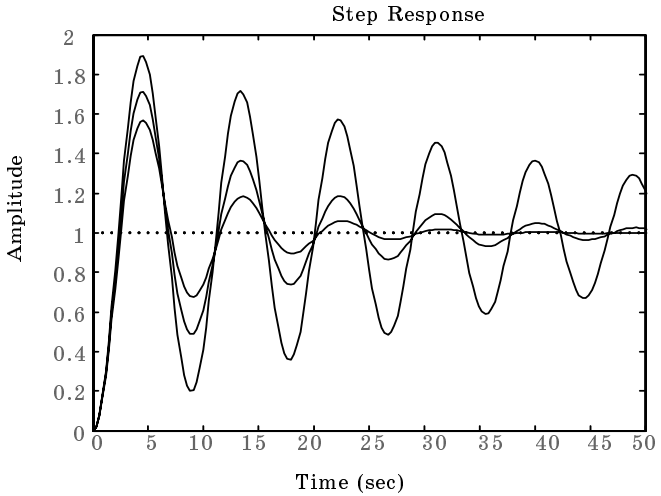


Рис. 1. Исследование реакции колебательного звена

```
>> w=tf([1],[2 0.3 1]);
>> w1=tf([1],[2 0.5 1]);
>> w2=tf([1],[2 0.1 1]);
>> step(w,w1,w2,50).
```

В Simulink MatLab ПФ можно описать с помощью блока Transfer fcn в разделе библиотеки Continuous. Для подачи типовых воздействий надо использовать блок Step из раздела Sources. Импульсную переходную характеристику звена можно получить, подавая на вход импульс маленькой длительности и большой амплитуды (приближение δ-функции) при нулевых начальных условиях.

3. Задание на лабораторную работу

С помощью пакета MatLab построить реакцию каждого типового звена (см. таблицу) на ступенчатое и импульсное входное воздействие. Определить влияние коэффициентов, входящих в описание каждого звена на параметры переходного процесса.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– передаточные функции и схемы моделирования исследуемых звеньев;

– экспериментально полученные характеристики при вариации параметров каждого звена;

– выводы, обобщающие проделанные эксперименты по каждому звену.

Лабораторная работа №2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

1. Методические указания

Для наглядного представления сложной системы как совокупности элементов и связей между ними используются структурные схемы.

Структурной схемой называется схема САУ, изображенная в виде соединения ПФ составляющих ее звеньев.

Структурная схема показывает строение автоматической системы, наличие внешних воздействий и точки их приложения, пути распространения воздействий и выходную величину. Динамическое или статическое звено изображается прямоугольником, в котором указывается ПФ звена или ее математическое выражение. Воздействия на систему и влияние звеньев друг на друга (сигналы) изображаются стрелками. В каждом звене воздействие передается только от входа звена к его выходу.

На динамическое звено может воздействовать лишь одна входная величина, поэтому используются блоки суммирования и сравнения сигналов. Суммироваться и сравниваться могут лишь сигналы одной и той же физической природы.

Структурная схема может быть составлена по уравнению системы в пространстве состояний или по дифференциальным уравнениям системы. При составлении структурной схемы удобно начинать с изображения задающего воздействия и располагать динамические звенья, составляющие прямую цепь системы, слева направо до регулируемой величины. Тогда основная обратная связь и местные обратные связи будут направлены справа налево.

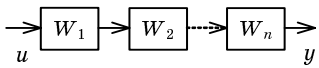
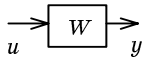
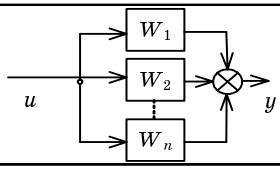
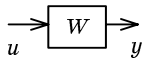
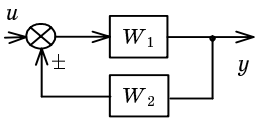
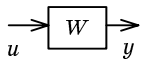
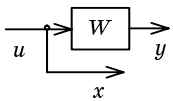
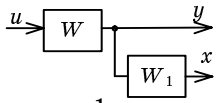
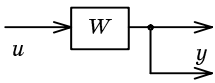
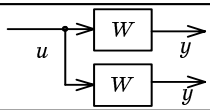
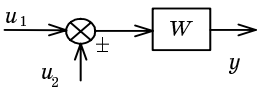
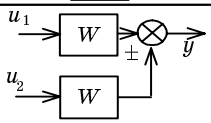
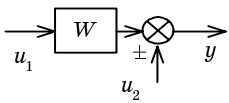
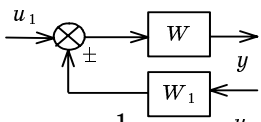
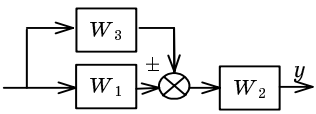
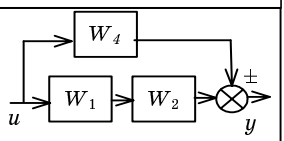
Различные способы преобразования структурных схем облегчают определение ПФ сложных САУ и дают возможность привести многоконтурную систему к эквивалентной ей одноконтурной схеме.

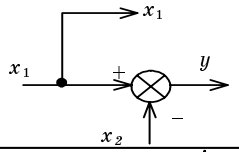
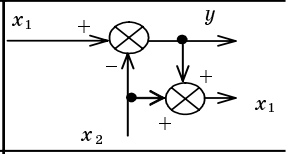
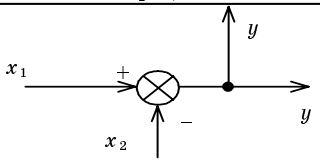
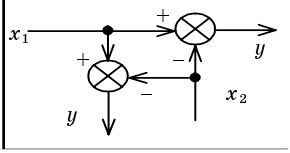
Преобразование структурной схемы должно осуществляться на основании правил. Правила преобразования структурных схем можно найти в справочной литературе [1, 2], основные из них приведены в табл. 1.

При выполнении преобразований следует каждое имеющееся в схеме типовое соединение заменить эквивалентным звеном. Затем можно выполнить перенос точек разветвления и сумматоров, чтобы

Таблица 1

Основные правила преобразования структурных схем

Преобразование	Структурная схема	
	Исходная	Эквивалентная
Свертывание последовательного соединения		 $W = W_1 W_2 ... W_n$
Свертывание параллельного соединения		 $W = W_1 + W_2 + ... + W_n$
Свертывание обратной связи		 $W = \dfrac{W_1}{1 \pm W_1 W_2}$
Перенос узла через звено вперед		 $W_1 = \dfrac{1}{W}$
Перенос узла через звено назад		
Перенос сумматора через звено вперед		
Перенос сумматора через звено назад		 $W_1 = \dfrac{1}{W}$
Перенос прямой связи через звено		

Преобразование	Структурная схема	
	Исходная	Эквивалентная
Перенос узла через сумматор вперед		
Перенос узла через сумматор назад		

в преобразованной схеме образовались новые типовые соединения звеньев. Эти соединения опять заменяются эквивалентными звеньями, затем вновь может потребоваться перенос точек разветвления и сумматоров и т. д.

Пример. Пусть необходимо получить эквивалентное представление для структуры, приведенной на рис. 1.

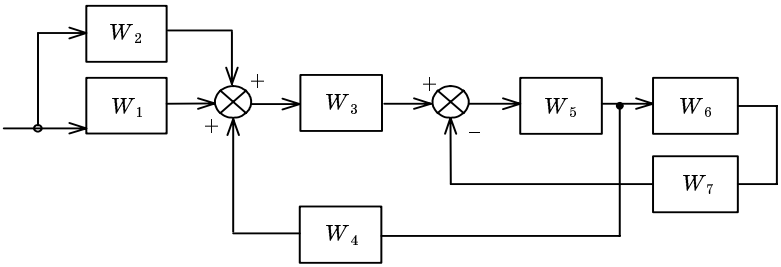


Рис. 1. Исходная структура САУ

Преобразование включает несколько этапов, показанных на рис. 2–5.

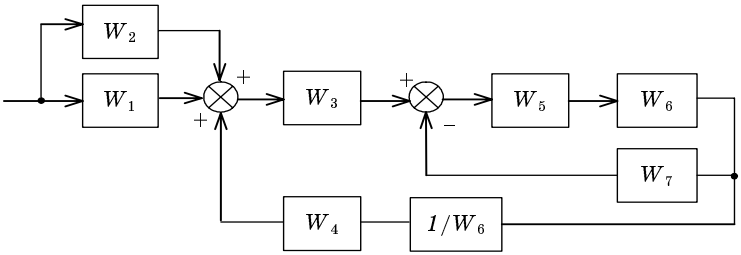
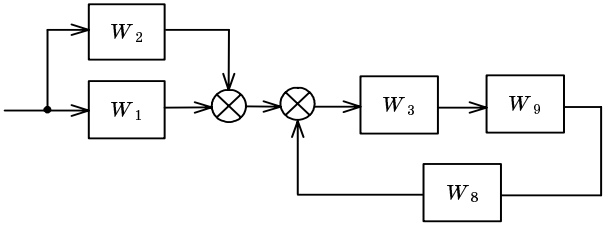


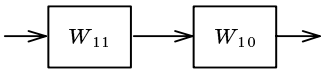
Рис. 2. Перенос узла через сумматор



$$W_9 = \frac{W_5 W_6}{1 + W_7 W_6 W_5}$$

$$W_8 = \frac{W_4}{W_6}$$

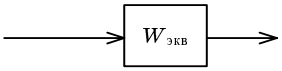
Рис. 3. Свертывание обратной связи и последовательного соединения



$$W_{10} = \frac{W_3 W_9}{1 - W_8 W_3 W_9}$$

$$W_{11} = W_1 + W_2$$

Рис. 4. Свертывание обратной связи и параллельного соединения



$$W_{экв} = W_{10} W_{11} = \frac{W_1 W_3 W_5 W_6 + W_2 W_3 W_5 W_6}{1 - W_5 W_6 W_7 - W_3 W_4 W_5}$$

Рис. 5. Свертывание последовательного соединения

Таким образом, первый способ преобразования структурных схем заключается в непосредственном использовании правил, приведенных в табл.1. Неудобство использования этого подхода заключается в том, что порядок применения формул здесь достаточно произволен, возможны ошибочные шаги, усложняющие поиск решения.

Второй способ для получения ПФ многоконтурной системы заключается в использовании модели системы в виде сигнального графа.

Сигнальный граф позволяет графически описать линейные связи между переменными, он состоит из *узлов* (вершин) и соединяющих их направленных *ветвей*.

Ветвь соответствует блоку структурной схемы, она отражает зависимость между входной и выходной переменными. Сумма всех сигналов, входящих в узел, образует соответствующую этому узлу переменную.

Последовательность ветвей между двумя узлами называется *путем*.

Контуром называется замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, причем ни один узел не встречается на этом пути дважды. *Коэффициент передачи контура* – это произведение всех входящих в него дуг.

Контуры называются некасающимися, если они не имеют общих узлов.

Сигнальный граф однозначно соответствует структурной схеме.

Пусть $X(s)$ и $Y(s)$ – входная и выходная переменные системы. Тогда для вычисления ПФ системы управления по ее графу можно воспользоваться формулой Мейсона:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta},$$

где P_i – i-й путь от входа к выходу; N – количество путей; Δ – определитель графа; Δ_i – дополнительный множитель для пути.

Определитель графа получается по формуле:

$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^{K} L_k + \sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q - \sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l + \ldots,$$

где $\sum_{k=1}^{K} L_k$ – сумма коэффициентов передачи всех отдельных контуров; $\sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q$ – сумма произведений всех возможных комбинаций из двух некасающихся контуров; $\sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l$ – сумма произведений всех возможных комбинаций из трех некасающихся контуров.

Дополнительный множитель для i-го пути равен определителю графа, в котором приравнены нулю коэффициенты передачи контуров, касающихся этого пути.

Рассмотрим пример получения ПФ многоконтурной системы с использованием формулы Мейсона для структуры рис. 1, которой соответствует граф, показанный на рис. 6.

От входа к выходу ведут два пути:

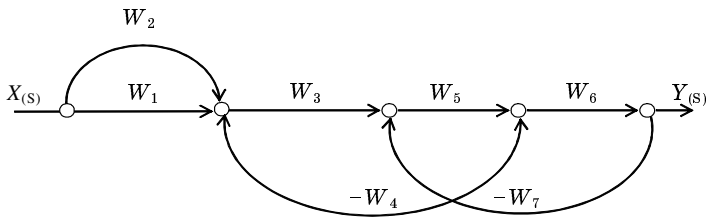


Рис. 6. Описание системы управления сигнальным графом

$$P_1 = W_1 W_3 W_5 W_6$$
$$P_2 = W_2 W_3 W_5 W_6 .$$

В графе есть два контура:

$$L_1 = -W_3 W_5 W_4$$
$$L_2 = -W_5 W_6 W_7 .$$

Контур L_1 касается контура L_2, поэтому определитель графа вычисляется по формуле:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) .$$

Контуры в этом примере касаются всех путей, поэтому дополнительные множители путей

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

Окончательно можно записать:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{W_1 W_3 W_5 W_6 + W_2 W_3 W_5 W_6}{1 - W_3 W_5 W_4 + W_5 W_6 W_7}.$$

Таким образом, использование сигнальных графов и применение формулы Мейсона позволяет алгоритмизировать процесс упрощения структурной схемы.

2. Использование пакета MatLab

В пакете MatLab имеется ряд функций, с помощью которых можно выполнять структурные преобразования:

– series(w1,w2) – последовательное соединение динамических звеньев;

– parallel(w1,w2) – параллельное соединение динамических звеньев;

– feedback(w1,w2) – включение звена w2 в контур отрицательной обратной связи к w1;

– feedback(w1,w2) – включение звена w2 в контур отрицательной обратной связи звена w1;

– feedback(w1,w2,sign) – включение звена w2 в контур обратной связи звена w1 с указанием знака + или – (очевидно, feedback(w1,w2)= =feedback(w1,w2,-1));

Пример:

```
>> w=tf([1 2],[1 2 2])
Transfer function:
  s + 2
```

```
————————
s^2 + 2 s + 2
>> w1=tf([1 2 3],[1 2 2])
Transfer function:
s^2 + 2 s + 3
————————
s^2 + 2 s + 2
>> w2=series(w,w1)
Transfer function:
s^3 + 4 s^2 + 7 s + 6
————————————————————
s^4 + 4 s^3 + 8 s^2 + 8 s + 4
>> w3=parallel(w,w1)
Transfer function:
s^4 + 5 s^3 + 13 s^2 + 16 s + 10
————————————————————————————
s^4 + 4 s^3 + 8 s^2 + 8 s + 4
>> w4=feedback(w,w1)
Transfer function:

s^3 + 4 s^2 + 6 s + 4
————————————————————————————
s^4 + 5 s^3 + 12 s^2 + 15 s + 10
```

Для проверки правильности проведенных преобразований необходимо собрать схему исходной САУ и соответствующую ей эквивалентную схему в MatLab Simulink. Задача считается решенной, если при подаче на вход обоих схем одинаковых тестовых воздействий наблюдаются одинаковые выходные сигналы.

3. Задание на лабораторную работу

Выполнить преобразование заданного варианта структурной схемы САУ в эквивалентную ПФ двумя способами:

– непосредственно используя правила табл. 1;

– используя представление в виде сигнального графа и формулу Мейсона.

Варианты заданий приведены в табл. 2.

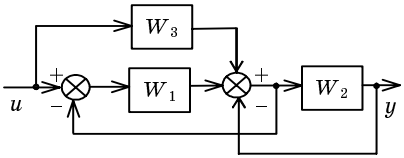
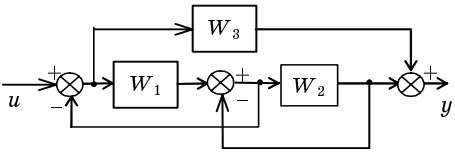
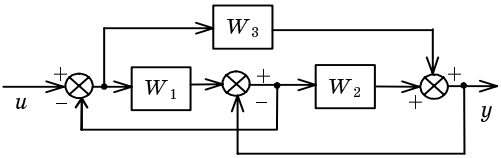
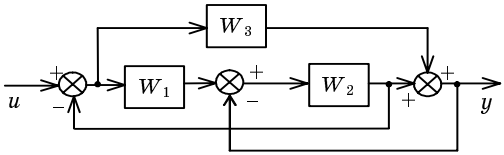
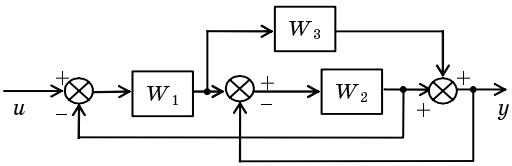
В качестве звеньев $W_1 - W_3$ использовать типовые динамические звенья с параметрами, выбранными в лабораторной работе № 1.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– описание всех этапов преобразования исходной схемы и получающихся промежуточных результатов, включающее моделирование реакции схемы на типовое воздействие (скачок) до и после преобразования;

Таблица 2

Варианты структур САУ

№ п/п	Исходная схема
1	
2	
3	
4	
5	

– сигнальный граф системы, описание путей, контуров и расчет ПФ по формуле Мейсона;

– схемы экспериментов в Simulink MatLab и протокол команд MatLab.

– графики переходных процессов при подаче на вход исходной и эквивалентной схемы типовых тестирующих воздействий воздействий (импульс, скачок, синусоида).

Лабораторная работа №3

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

1. Методические указания

Сущность метода частотных характеристик заключается в том, что на вход исследуемой системы подается гармонический сигнал (синусоидальные колебания) в широком диапазоне частот. Реакция системы при разных частотах позволяет судить о ее динамических свойствах.

Пусть входной сигнал системы имеет амплитуду a и частоту ω, т. е. описывается формулой

$$x = a\sin(\omega t).$$

Выходной сигнал будет иметь амплитуду A_1 и отличаться от входного по фазе на величину ψ (фазовый сдвиг):

$$y = A_1 \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом, можно рассчитать усиление по амплитуде

$$A = \frac{A_1}{a}.$$

Для каждой частоты входного сигнала ω будут свои A и ψ.

Изменяя ω в широком диапазоне, можно получить зависимость $A(\omega)$ – амплитудную частотную характеристику (АЧХ) и $\psi(\omega)$ – фазовую частотную характеристику (ФЧХ).

Главное достоинство метода частотных характеристик заключается в том, что АЧХ и ФЧХ объекта могут быть получены экспериментально. Для этого необходимо иметь генератор гармонических колебаний, который подключается к входу объекта, и измерительную аппаратуру для измерения амплитуды и фазового сдвига колебаний на выходе объекта.

Частотные характеристики САУ могут быть получены по ее ПФ $W(s)$. Для суждения о реакции звена на синусоидальный сигнал достаточно исследовать его реакцию на гармонический сигнал вида [1]

$$x(j\omega) = e^{j\omega t}.$$

Тогда выходной сигнал

$$y(j\omega) = A(\omega)e^{j(\omega t + \psi(\omega))},$$

и частотная ПФ

$$W(j\omega)=\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}=A(\omega)e^{j\psi(\omega)}.$$

Формально для получения частотной ПФ надо сделать в $W(s)$ подстановку $s = j\omega$, и тогда полученная $W(j\omega)$ является комплексным выражением, которое можно представить в виде:

$$W(j\omega)=\frac{a_1(\omega)+jb_1(\omega)}{a_2(\omega)+jb_2(\omega)}.$$

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо домножить числитель и знаменатель на сопряженную знаменателю величину, а затем провести разделение:

$$W(j\omega)=\frac{a_1(\omega)+jb_1(\omega)}{a_2(\omega)+jb_2(\omega)}=\frac{(a_1(\omega)+jb_1(\omega))\ \ (a_2(\omega)-jb_2(\omega))}{(a_1(\omega)+jb_2(\omega))\ \ (a_2(\omega)-jb_2(\omega))}=$$

$$=\frac{a_1(\omega)a_2(\omega)+b_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega)+b_2^2(\omega)}+j\frac{a_2(\omega)b_1(\omega)-a_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega)+b_2^2(\omega)}=$$

$$=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

$$\psi(\omega)=\arg(W(j\omega))=\mathrm{arctg}\left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right]=\mathrm{arctg}\left[\frac{b_1}{a_1}\right]-\mathrm{arctg}\left[\frac{b_2}{a_2}\right].$$

Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной характеристиками*.

В практических расчетах удобно применять графики частотных характеристик, построенных в логарифмическом масштабе – *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) определяется следующим выражением:

$$L(\omega) = 20\ \lg A(\omega).$$

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называется график зависимости $\psi(\omega)$, построенный в логарифмическом масштабе частот.

Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей логарифма частоты – декада. *Декадой* называют интервал частот, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду. Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega = 0$. Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg\omega \to -\infty$ при $\omega \to 0$.

Основное преимущество использования ЛЧХ заключается в том, что приближенные (асимптотические) ЛАЧХ типовых динамических звеньев изображаются отрезками прямых.

Пример. Построим ЛЧХ апериодического звена первого порядка.

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(1-Tj\omega)}{(T\omega)^2+1},$$

$$U = \frac{k}{(T\omega)^2+1}, \quad V = -\frac{kT\omega}{(T\omega)^2+1}.$$

Следовательно, АЧХ описывается формулой

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}},$$

ФЧХ строится по формуле

$$\psi(\omega) = -\mathrm{arctg}(T\omega).$$

ЛАЧХ апериодического звена 1-го порядка

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}.$$

По этой формуле можно построить две асимптоты – прямые, к которым стремится ЛАЧХ при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$. Так, при $\omega \to 0$ второе слагаемое близко к нулю, и этот участок ЛАЧХ представляет собой горизонтальную прямую

$$L(\omega) = 20\lg k.$$

При $\omega \to \infty$ получаем наклонную прямую:

$$L(\omega) \approx -20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1} \to -\infty.$$

Для определения наклона этой прямой можно рассмотреть границы декады:

$$\omega = \frac{1}{T} \text{ и } \omega = \frac{10}{T}.$$

Изменение ЛАЧХ между этими точками:

$$\Delta L(\omega) \approx -20\lg\sqrt{\left(T\frac{10}{T}\right)^2+1} + 20\lg\sqrt{\left(T\frac{1}{T}\right)^2+1} \approx -20 \text{ (дБ/дек)}.$$

ЛЧХ часто называют *диаграммами Боде*.

2. Использование пакета MatLab

В пакете MatLab ЛЧХ объекта, заданного с помощью ПФ, можно получить с командой bode.

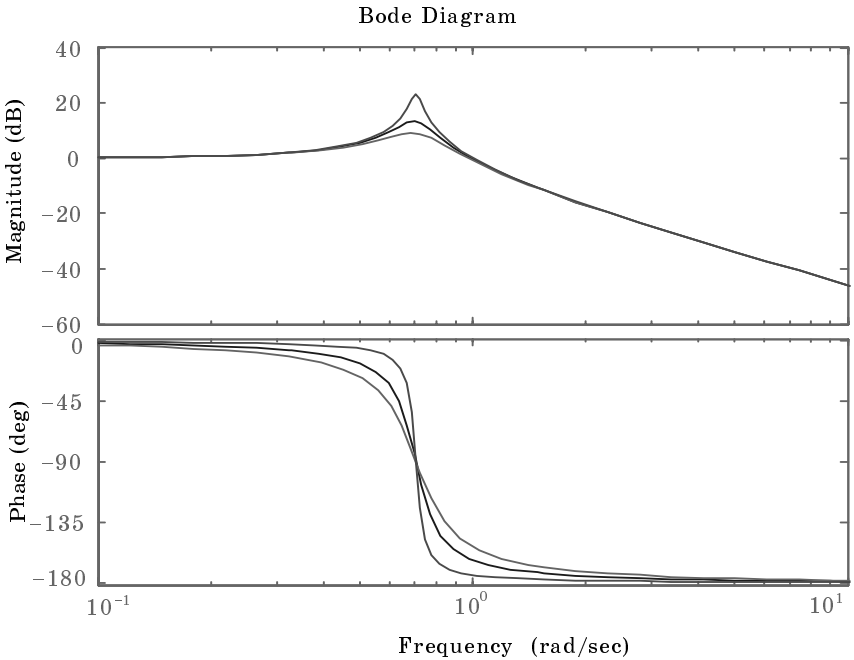


Рис. 1. Частотные характеристики динамических звеньев

Пример:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5])
>> bode(w)
```

Для нескольких вариантов передаточной функции можно использовать вариант команды вида:

```
>> bode(w,w1,w2)
```

Например, построим диаграмму Боде при различных параметрах колебательного звена (рис. 1):

```
>> w=tf([1],[2 0.3 1]);
>> w1=tf([1],[2 0.5 1]);
>> w2=tf([1],[2 0.1 1]);
>> bode(w,w1,w2)
```

3. Задание на лабораторную работу

С помощью пакета MatLab построить ЛЧХ каждого типового звена (см. табл. лабораторной работы № 1).

Определить влияние коэффициентов, входящих в описание каждого звена, на параметры ЛАЧХ и ЛФЧХ, в том числе:

– как меняется ширина асимптотических участков ЛАЧХ и ЛФЧХ;

– как меняется положение точек пересечения осей ЛАЧХ.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– экспериментально полученные характеристики при вариации параметров каждого звена;

– выводы, обобщающие проделанные эксперименты по каждому звену.

Лабораторная работа №4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. Методические указания

Устойчивость САУ является одним из основных условий ее работоспособности и включает требование затухания во времени переходных процессов.

Система является устойчивой, если при ограниченном входном сигнале её выходной сигнал также является ограниченным. Если система устойчива, то она противостоит внешним воздействиям, а выведенная из состояния равновесия возвращается снова к нему. Система с расходящимся переходным процессом будет неустойчивой и неработоспособной.

Впервые свойства устойчивости были исследованы русским ученым А. М. Ляпуновым в 1892 г. в работе «Общая задача об устойчивости движения». Необходимое и достаточное условие устойчивости заключается в том, чтобы все корни характеристического уравнения (полюсы передаточной функции системы) имели отрицательные вещественные части. Иначе говоря, условием устойчивости системы является расположение всех полюсов в левой комплексной полуплоскости. Тогда все полюсы будут давать затухающую реакцию.

Выше сформулированное условие устойчивости справедливо как для линейных, так и для линеаризованных систем. Однако в случае нулевых или чисто мнимых корней характеристического уравнения вопрос об устойчивости линеаризованной системы может быть решен только на основании исследования ее нелинейных уравнений.

В конце XIX и первой половине XX в. задача вычисления корней характеристического уравнения высокого порядка вызывала большие проблемы. Поэтому были предложены несколько косвенных методов оценки устойчивости, позволяющих обойтись без вычисления корней – по значениям коэффициентов характеристического уравнения.

Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. В частности, к алгебраическим критериям относится критерий Гурвица, к частотным критерия – критерий Найквиста.

Критерий Гурвица является алгебраическим критерием и применяется к коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы.

Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют матрицу по правилу:

1. По диагонали записываются коэффициенты от $a_{n\text{-}1}$ до $a_{0.}$

2. Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами.

3. В случае отсутствия индекса, а также, если он меньше 0 или больше n, на его место пишется 0.

Таким образом, матрица Гурвица приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий устойчивости формулируется так:

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_{n\,\text{В}} > 0$ были положительными все n диагональных определителей, получаемых из матрицы Гурвица.

Первые три определителя матрицы Гурвица имеют следующий вид:

$$\Delta_1 = a_{n\text{-}1}\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix};\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, критерий Гурвица позволяет судить об абсолютной устойчивости, но не дает возможности оценивать относительную устойчивость по корням характеристического уравнения.

Частотный критерий устойчивости Найквиста анализирует АФЧХ разомкнутой системы.

Пусть имеется ПФ разомкнутой системы $W(j\omega)$.

Для нахождения вещественной и мнимой части частотной ПФ нужно освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, а затем выполнить разделение на вещественную и мнимую части (см. с. 20). Передаточная функция приобретает вид

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Задаваясь различными значениями частоты, можно найти множество пар: $\{P(\omega_1); jQ(\omega_1)\}$, $\{P(\omega_2); jQ(\omega_2)\}$, ..., $\{P(\omega_n); jQ(\omega_n)\}$. Затем по этим парам строится АФЧХ на комплексной плоскости.

Основные свойства АФЧХ разомкнутой системы:

1. Если разомкнутая система не имеет интегрирующих звеньев, то при $\omega = 0$ ее АФЧХ начинается на вещественной оси в точке $P(\omega)=K$ (где K – коэффициент усиления разомкнутой системы). Заканчивается АФЧХ в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис. 1, *а*).

2. Если разомкнутая система имеет одно интегрирующее звено, то ее АФЧХ начинается при $\omega = 0$ в бесконечности на отрицательной мнимой полуоси, а заканчивается в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис. 1, *б*).

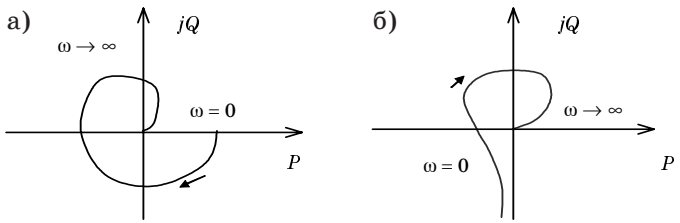


Рис. 1. АФЧХ разомкнутой системы

Критерий устойчивости Найквиста формулируется так:

1. Если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $-1, j0$.

2. Если разомкнутая система неустойчива, а ее передаточная функция имеет m полюсов справа от мнимой оси на комплексной плоскости, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала m раз точку с координатами $-1, j0$.

При использовании этого критерия нужно учитывать две особенности:

1. Если разомкнутая система находится на границе устойчивости, то ее АФЧХ уходит в бесконечность. Для проверки критерия Найквиста нужно мысленно соединить конец АФЧХ дугой бесконечно большого радиуса с положительной вещественной полуосью.

2. На практике АФЧХ может строиться только для положительных частот ($0 \le \omega < +\infty$). При применении критерия Найквиста считается, что ветвь АФЧХ для отрицательных частот симметрична относительно вещественной оси.

Физический смысл критерия устойчивости Найквиста заключается в том, что система будет неустойчива, если фаза выходного сигнала противоположна фазе входного сигнала, а коэффициент усиления >1. Поэтому для анализа устойчивости можно использовать не АФЧХ, а ЛАХ системы (для минимально-фазовых систем). Система устойчива, если на частоте среза значение фазы не превышает $-\pi$. Соответственно для устойчивой системы можно рассматривать на ЛФЧХ запас устойчивости по фазе – расстояние от значения фазы на частоте среза до уровня $-\pi$, и запас устойчивости по амплитуде – расстояние от оси частот ЛАЧХ до значения усиления на частоте, где фаза становится равной $-\pi$.

2. Использование MatLab

Для проверки устойчивости САУ по Гурвицу постройте матрицу Гурвица и найдите ее детерминант (функция det). Затем, последовательно уменьшая размер матрицы, найдите значения всех диагональных детерминантов.

Пример:

```
>> A=[1 14 18; 2 5 2; 3 4 3]
A =
1 14 18
2 5 2
3 4 3
>> det(A)
ans = -119
>> A1=A(1:2, 1:2)
A1 =
1 14
2 5
>> det(A1)
ans = -23
```

Для проверки устойчивости САУ по Найквисту сначала нужно выяснить, является ли устойчивой разомкнутая система.

Пример. Пусть дана передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{2p+1}{2p^4+3p^3+2p^2+3p+1}.$$

Рассмотрим реакцию на скачок:

```
>> w=tf([2 1],[2 3 2 3 1])
>> step(w)
```

График переходного процесса показан на рис. 2.

Разомкнутая система неустойчива, и, согласно критерию Найквиста, надо, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку $-1, j0$ столько раз, сколько полюсов имеется справа от мнимой оси.

Для построения АФЧХ достаточно вызвать команду nyquist

```
>> nyquist(w)
```

Диаграмма Найквиста показана на рис. 3.

Как показывает рис. 3, АФЧХ ни разу не охватывает точку $-1, j0$, поэтому замкнутая система будет неустойчивой. Частотный критерий Найквиста можно использовать и в том случае, когда рассматривается не АФЧХ, а ЛАЧХ разомкнутой системы:

Замкнутая минимально-фазовая система устойчива, если при достижении ЛФЧХ значения $-\pi$ ЛАЧХ будет отрицательной.

Используя ЛАЧХ и ЛФЧХ, можно оценить запасы устойчивости системы по амплитуде и по фазе с помощью команды

```
>> margin(w)
```

Пример:

```
>> w=tf([10],[2 2 3 1]);
>> margin(w)
```

Соответствующий график показан на рис. 4.

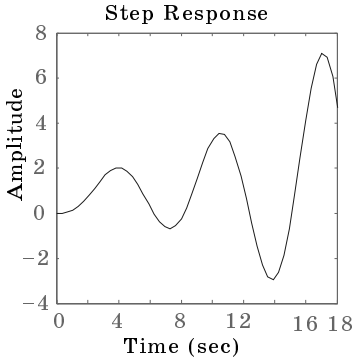


Рис. 2. Переходная реакция неустойчивой системы

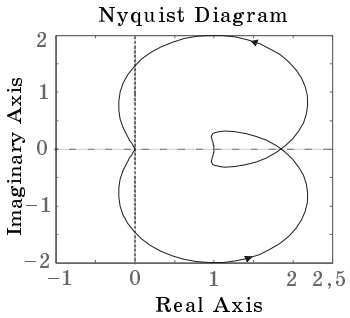


Рис. 3. Диаграмма Найквиста для неустойчивой системы

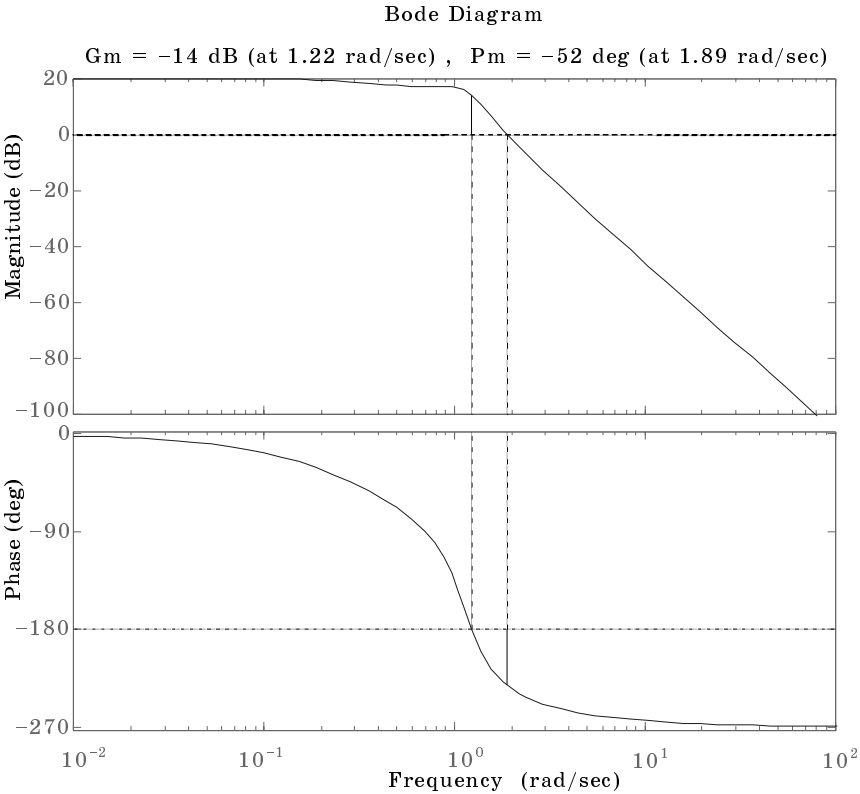


Рис. 4. Определение запасов устойчивости по амплитуде и по фазе

3. Задание на лабораторную работу

Выполнить исследование устойчивости замкнутой САУ по заданной передаточной функции разомкнутой системы. Варианты заданий приведены в таблице.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– переходную функцию разомкнутой системы;

– расчет передаточной функции замкнутой системы;

– расчетные выражения для обоснования устойчивости замкнутой системы по алгебраическому критерию Гурвица;

– годограф Найквиста разомкнутой системы, на основании которого делается вывод об устойчивости замкнутой системы;

– переходную функцию замкнутой системы;

Таблица

Варианты заданий

№	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$W = \dfrac{2}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 3s + 1}$
2	$W = \dfrac{1}{0,05s^4 + 0,1s^3 + s^2 + s + 1}$
3	$W = \dfrac{1}{0,1s^3 + 0,1s^2 + s + 1}$
4	$W = \dfrac{100}{5s^4 + 0,1s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$
5	$W = \dfrac{1}{8s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$
6	$W = \dfrac{10}{s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
7	$W = \dfrac{3}{0,1s^3 + 0,01s^2 + 0,1s + 1}$
8	$W = \dfrac{10}{2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
9	$W = \dfrac{1}{s^3 + 0,1s^2 + 0,1s + 1}$
10	$W = \dfrac{10}{2s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 0,5s^2 + 0,5s + 1}$

– проверку полученных результатов путем компьютерного моделирования переходных процессов разомкнутой и замкнутой системы в MatLab Simulink;

– выводы по всем полученным результатам.

Лабораторная работа № 5

ЧАСТОТНЫЙ СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

1. Методические указания

Пусть задана исходная (располагаемая) динамическая система, описываемая ПФ $W(s)$ (рис. 1, *а*). Если эта система является неустойчивой или не удовлетворяет заданным показателям качества, то ее поведение можно улучшить при включении последовательного корректирующего устройства с ПФ $K(s)$ (рис. 1, *б*).

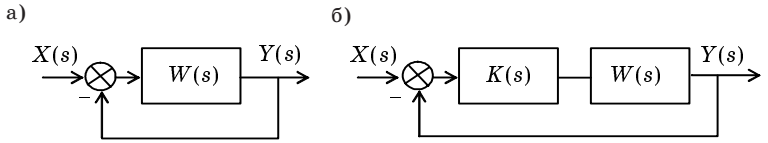


Рис. 1. Исходная и скорректированная система

Частотный метод синтеза основан на построении реальных и желаемых частотных характеристик системы, их сопоставлении и выборе на этой основе структуры и параметров корректирующих устройств.

Важнейшим этапом частотного синтеза является формирование желаемой АЧХ системы. ПФ скорректированной (желаемой) системы можно представить в виде произведения

$$G(s) = W(s)K(s)\ ,$$

откуда следует

$$K(s) = \frac{G(s)}{W(S)}. \qquad (1)$$

При использовании ЛАЧХ имеем

$$L_K = 20\lg\left|K(j\omega)\right|,\ L_G = 20\lg\left|G(j\omega)\right| \text{ и } L_W = 20\lg\left|W(j\omega)\right|,$$

откуда следует

$$L_K = L_G - L_W\,.$$

Рассмотрим требования к желаемой ЛАЧХ.

Низкочастотная часть ЛАЧХ формируется в соответствии с требованиями к точности, которую можно оценить по воспроизведению системой гармонического входного сигнала. Пусть на вход подан сигнал

$$g_1(t) = g_{\max} \sin(\omega_g t) \ ,$$

где $g_{\max}$ – амплитуда гармонического сигнала.

Известно, что ЛАХ системы в области низких частот должна быть расположена не ниже контрольной точки A_k с координатами

$$\omega_k = \omega_g \ ; \qquad L(\omega_k) = 20\lg \frac{g_{\max}}{x_{\max}} \ , \tag{2}$$

где $x_{\max}$ – максимальная ошибка следящей системы (рис. 2).

Для нахождения частоты и амплитуды эквивалентного гармонического воздействия можно воспользоваться требуемыми значениями максимальной скорости и ускорения системы

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_{\max}}{\Omega_{\max}}; \ g_{\max} = \frac{\Omega^2{}_{\max}}{\varepsilon_{\max}}. \tag{3}$$

где $\Omega_{\max}$ – максимальная скорость, $\varepsilon_{\max}$ – максимальное ускорение.

Среднечастотная часть ЛАХ должна пересекать ось частот с наклоном –20 дБ/дек, причем этот отрезок ЛАХ обычно ограничивается с левой стороны отрезком с наклоном –40 дБ/дек, а с правой –40 или –60 дБ/дек, в зависимости от наклона ЛАХ нескорректированной системы.

Для определения границ среднечастотного участка вводится понятие базовой частоты

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{x_{\max}}} \ .$$

По базовой частоте вычисляется частота среза

$$\omega_{-} = \sqrt{\frac{M}{M-1}}\omega_0 \ .$$

По частоте среза определяются частоты ω_2, ω_3, соответствующие началу и концу среднечастотного участка:

$$\omega_2 \le \frac{M-1}{M}\omega_c; \ \ \omega_3 \ge \frac{M+1}{M}\omega_c.$$

Типовая структура желаемой ЛАЧХ изображена на рис. 3.

Высокочастотная часть ЛАЧХ (справа от щ$_3$) не оказывает влияния на точность системы и ее динамические характеристики. Обычно наклоны высокочастотной и низкочастотной частей желаемой ЛАЧХ стремятся сделать такими же, как у исходной динамической системы.

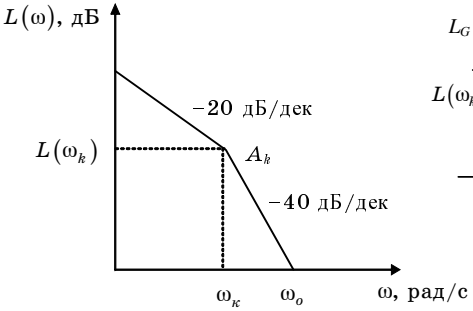


Рис. 2. Запретная область на плоскости ЛАЧХ

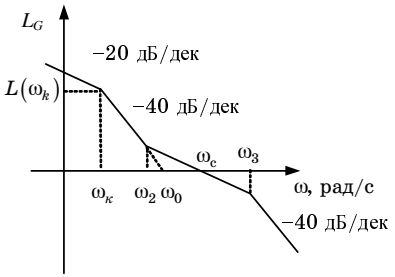


Рис. 3. Построение желаемой ЛАЧХ

Желаемой ПФ на рис. 3 соответствует структура

$$G(s)=\frac{k(\tau_2 s+1)}{s(T_k s+1)(T_3 s+1)}\ , \tag{4}$$

где k – коэффициент усиления; T и τ – постоянные времени, соответствующие сопрягающим частотам:

$$\tau_2=\frac{1}{\omega_2},\ T_k=\frac{1}{\omega_k},\ T_3=\frac{1}{\omega_3}.$$

В общем случае структура ПФ, соответствующей желаемой ЛАХ, будет иметь вид

$$G(s)=\frac{k\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{\omega_k}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_4}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_5}s+1\right)\ldots}, \tag{5}$$

где k – коэффициент передачи желаемой системы:

$$k=10^{\frac{L_G(\omega=1)}{20}}. \tag{6}$$

В случае когда величина $\omega_k < 1$ с$^{-1}$, величина коэффициента передачи должна быть больше, чем получается по выражению (4) [1].

При построении желаемой ПФ следует помнить, что изменение коэффициента усиления k поднимает или опускает всю ЛАЧХ, полиномы числителя изменяют наклоны асимптот ЛАЧХ на +20 дБ/дек, а каждый полином знаменателя изменяет наклоны на −20 дБ/дек.

ПФ нескорректированной системы, в общем случае, будет иметь следующий вид:

$$W(s)=\frac{(\tau_1 s+1)}{s^r(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)\ldots}, \qquad (7)$$

где r – порядок астатизма нескорректированной системы, τ_1, T_1, T_2, T_3... – постоянные времени числителя и знаменателя, соответственно.

Тогда ПФ корректирующего устройства в соответствии с формулой (1) будет определяться выражением

$$W_k(s)=\frac{k\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{\omega_k}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_4}s+1\right)\ldots}\times$$

$$\times\frac{s^r(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)\ldots}{(\tau_1 s+1)}. \qquad (8)$$

Пример. Пусть система описывается ПФ вида

$$W(s)=\frac{20}{s(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)}.$$

Необходимо провести частотный синтез корректирующего звена, исходя из следующих требований к системе:

$x_{\max}$ = 0,033 град;
$\omega_{\max}$ = 30 град/с;
$\varepsilon_{\max}$ = 30 град/с^2;
M = 1,5.

Определим параметры желаемой ПФ.

Амплитуда и частота гармонического воздействия определяется по выражению (3):

$$\omega_k=\frac{30}{30}=1\ \text{с}^{-1};\ g_{\max}=\frac{30^2}{30}=30\ \text{град}.$$

Координата контрольной точки $A_к$ определяется по выражению (2)

$$L(\omega_k)=20\lg\frac{30}{0{,}033}=59{,}08\ \text{дБ}.$$

Границы среднечастотной области:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{30}{0{,}033}}=30\ \text{с}^{-1},\ \ \omega_c=\sqrt{\frac{1.5}{1.5-1}}30=51{,}96\ \text{с}^{-1}.$$

$$\omega_2 \le \frac{1{,}5-1}{1{,}5}51{,}96 = 17{,}32\ \text{с}^{-1},\ \ \omega_3 \ge \frac{1{,}5+1}{1{,}5}51{,}96 = 86{,}6\ \text{с}^{-1}.$$

В высокочастотной области желаемая ЛАХ должна повторять наклон ЛАХ нескорректированной системы, а именно –60дБ/дек., поэтому выбираем

$$\omega_4 = 1000\ \text{с}^{-1} > \omega_3.$$

Желаемый коэффициент усиления

$$k = 10^{[59{,}08/20]} = 900.$$

Желаемая ПФ будет иметь следующий вид:

$$G(s) = \frac{900(0.058s+1)}{s(s+1)(0{,}01s+1)(0{,}001s+1)}.$$

ПФ корректирующего устройства

$$W_k(s) = \frac{900(0{,}058s+1)}{s(s+1)(0{,}01s+1)(0{,}001s+1)} \times \frac{s(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)}{20} =$$

$$= 45\frac{(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)(0{,}058s+1)}{(s+1)(0{,}01s+1)(0{,}001s+1)}.$$

2. Использование MatLab

Для создания модели данных систем проделаем следующие действия:

1. Откроем окно новой модели Simulink, нажав кнопку Create a new model.

2. Расположим это окно рядом с окном браузера библиотек.

3. Из раздела библиотеки Math и Continuous перенесем в окно модели блоки для описания ПФ $W(s)$, $G(s)$, $W_k(s)$.

4. Щелкнув дважды по блокам Transfer Fcn, в появившемся окне параметров зададим вектор числителя Numerator и знаменателя Denominator коэффициентов соответствующих ПФ.

5. Выполним соединение между блоками.

6. В меню Tools выбрать команду Linear analysis.

7. Из появившегося окна Model Inputs and Outputs извлечем начальную и конечную точки анализируемых моделей и установим их на входы и на выходы (рис. 4).

8. В окне LTI Viewer в меню Edit командой Plot Configurations выберем вид отображаемого результата и установим функцию bode.

9. Для запуска анализа необходимо в окне LTI Viewer в меню Simulink выбрать команду Get Linearized model.

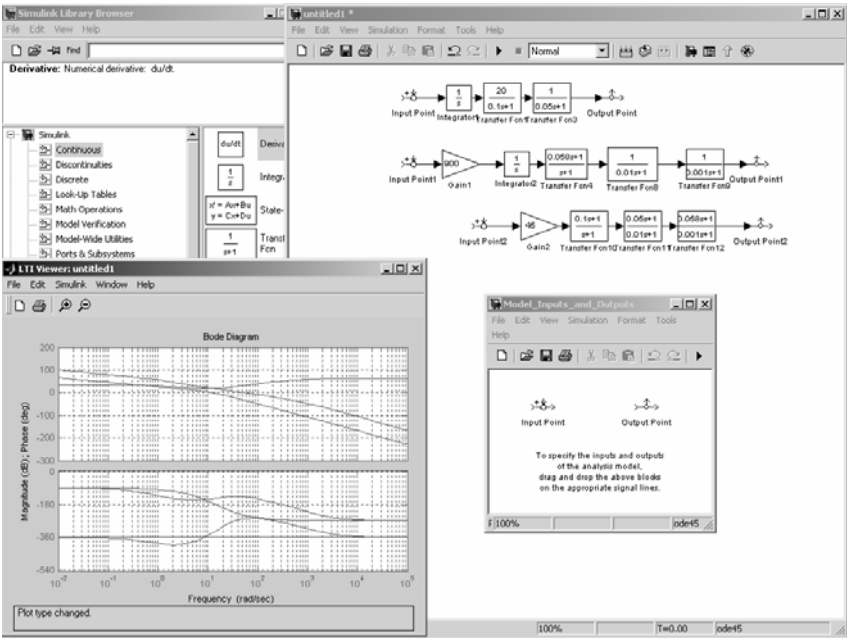


Рис. 4. Логарифмические характеристики в среде Simulink MatLab

10. В появившемся окне с результатами можно с помощью одного нажатия правой кнопки мыши установить характерные точки (Characteristics), сетку (Gird), а также выбрать увеличение (Zoom).

11. Для изображения полученных характеристик на одном графике необходимо один раз нажать правую кнопку мыши и в пункте I/O Grouping выбрать All.

Результаты приведены на рис. 4.

Синтез методом ЛЧХ завершается анализом качества переходной характеристики на выходе разомкнутой и замкнутой желаемой системы, которая также может быть построена в Simulink (см. лаб. раб. № 1)

3. Задание на лабораторную работу

1. Выбрать из таблицы вариант задания. Построить переходную характеристику располагаемой системы, оценить устойчивость системы, время переходного процесса и колебательность.

2. Рассчитать параметры для построения ЖЛАХ, получить ПФ желаемой системы.

3. Получить ПФ корректирующего устройства.

4. С помощью пакета MatLab построить располагаемую ЛАХ, ЛФХ, желаемую ЛАХ, ЛФХ и ЛАХ корректирующего устройства.

5. С помощью пакета MatLab построить переходную характеристику скорректированной системы и оценить устойчивость системы, время переходного процесса и колебательность.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;
– ЛЧХ исходной (нескорректированной) системы;
– переходную характеристику исходной системы;
– ЛЧХ желаемой системы с обоснованием ее параметров;
– переходную характеристику желаемой системы;
– ЛЧХ корректирующего устройства;
– переходную характеристику скорректированной системы;
– выводы по всем полученным результатам.

Таблица

Варианты заданий для последовательной коррекции

№ п/п	Передаточная функция	$T_{пп}$, с	M	σ, %	$e_д$, град	Ω_m, рад/с	ε_m, рад/с^2
1	$W(s)=\dfrac{200}{s(0{,}1s+1)(0{,}02s+1)(0{,}01s+1)}$	0.8	1.35	30	12	25	2
2	$W(s)=\dfrac{32}{(0{,}05s+1)(0{,}1s+1)(0{,}2s+1)}$	0.6	1.19	20	0.6	0.2	0.6
3	$W(s)=\dfrac{100}{s^2(0{,}04s+1)(0{,}01s+1)(0{,}002s+1)}$	0,45	1,4	30	6	2	8
4	$W(s)=\dfrac{282}{s(0{,}1s+1)}$	–	1,5	37	0,1	20	5
5	$W(s)=\dfrac{363}{s(0{,}1s+1)(0{,}02s+1)}$	–	1,5	37	1	5	2
6	$W(s)=\dfrac{900}{s(0{,}08s+1)(0{,}02s+1)}$	–	1,5	37	0,5	10	2
7	$W(s)=\dfrac{1500}{s(0{,}05s+1)(0{,}02s+1)}$	–	1,5	37	0,1	150	750
8	$W(s)=\dfrac{20}{s(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)}$	–	1,5	37	120	30	30
9	$W(s)=\dfrac{100}{s(0{,}5s+1)}$	0,2	1,2	20	5	2	2
10	$W(s)=\dfrac{40}{s(0{,}04s^2+1{,}2s+1)}$	0,1	1,4	30	0,6	0,8	0,8

Окончание табл.

№ п/п	Передаточная функция	$T_{пп}$, с	M	σ, %	$e_д$, град	Ω_m, рад/с	ε_m, рад/с^2
11	$W(s)=\dfrac{100}{s(0,1s+1)(0,02s+1)(0,01s+1)}$	0,8	1,3	25	10	25	2
12	$W(s)=\dfrac{50}{p(0,2s+1)(0,1s+1)(0,04s+1)}$	0,5	1,2	20	0,06	0,2	0,5
13	$W(s)=\dfrac{100}{s(0,05s+1)(0,02s+1)(0,002s+1)}$	0,4	1,4	25	0,6	2	6
14	$W(s)=\dfrac{200}{s(0,2s+1)}$	–	1,5	37	0,1	20	5
15	$W(s)=\dfrac{300}{s(0,2s+1)(0,01s+1)}$	–	1,3	27	1	5	2

Лабораторная работа №6

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

1. Методические указания

Корневым годографом (КГ) называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы.

Обычно метод КГ позволяет находить полюса и нули ПФ замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы K.

ПФ разомкнутой системы $W_{\text{р}}(s)$ представим в следующем виде:

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)}, \tag{1}$$

где s_j^0 – нули ПФ $W_p(s)$, ($j = \overline{1,m}$); s_i^* – полюса ПФ $W_{\text{р}}(s)$, ($i = \overline{1,n}$); n и m – порядки знаменателя и числителя; C – коэффициент представления (отношение коэффициентов при старших членах числителя и знаменателя).

При замыкании системы с ПФ $W_{\text{р}}(s)$ единичной отрицательной обратной связью ПФ замкнутой системы $W_{\text{з}}(s)$ принимает вид

$$W_{\text{з}}(s) = \frac{W_{\text{р}}(s)}{1 + W_{\text{р}}(s)}. \tag{2}$$

Из выражения (2) следует, что нули ПФ замкнутой системы равны нулям ПФ разомкнутой системы.

Для нахождения полюсов рассмотрим выражение

$$1 + W_{\text{р}}(s) = 0, \tag{3}$$

в соответствии с выражением (1) имеем

$$\frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*) + KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0). \tag{4}$$

На основании выражения (4) можно сказать, что при $K = 0$ корни характеристического уравнения совпадают с полюсами, а при $K = \infty$ – с нулями. При изменении K от 0 до ∞ траектории корней начинаются в полюсах и заканчиваются в нулях. Обычно полюсов больше, чем нулей. В этом случае $n-m$ ветвей корневого годографа стремятся к ∞.

Для определения полюсов замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо решить уравнение (его называют основным уравнением метода КГ):

$$W_{\text{р}}(s) = -1. \tag{5}$$

Так как $W_{\text{р}}(s)$ является функцией комплексного переменного s, то уравнение (5) распадается на два уравнения: уравнение модулей

$$|W_{\text{р}}(s)|=1 \tag{6}$$

и уравнение аргументов (фаза вектора –1 есть нечетное число π):

$$\arg W_{\text{р}}(s) = \pm(2u+1)\pi,\ \upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

Как известно, при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а при делении – вычитаются. Поэтому, исходя из выражения (1), уравнение (7) имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть точка s – полюс замкнутой системы. Если провести в s вектора из всех нулей $W_{\text{р}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_j^0) и вектора из всех полюсов $W_{\text{р}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_i^*), то уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m}\theta_j^0 - \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* = \pm(2\nu+1)\pi,\ \upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8}$$

Углы q отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «–» соответствует повороту по часовой стрелке.

Таким образом, любая точка КГ должна удовлетворять уравнению (8), из которого следует, что конфигурация КГ не зависит от коэффициента усиления K, но каждому конкретному значению K однозначно соответствуют точки на КГ.

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а при делении – делятся. Поэтому на основании уравнения (6) можно записать

$$\frac{KC\prod_{j=1}^{m} l_j^0}{\prod_{i=1}^{n} l_i^*} = 1, \tag{9}$$

где l_j^0 – модуль (длина) вектора, проведенного из j-нуля в точку s КГ; l_i^* – модуль вектора, проведенного из i-полюса в ту же точку s.

Таким образом, траектории корней строятся только по уравнениям фаз, а уравнение модулей используется затем для нахождения K.

Сущность метода КГ заключается в том, чтобы узнать, каким должен быть коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы было обеспечено желаемое положение корней замкнутой системы.

Корневой годограф системы с отрицательной обратной связью обладает следующими основными свойствами [1–5]:

1. Ветви КГ непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы n. Ветви начинаются в n полюсах разомкнутой системы при $K = 0$. При возрастании K от 0 до ∞ полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. m ветвей КГ при возрастании K от 0 до ∞ заканчиваются в m нулях $W_р(s)$, а $(n - m)$ ветвей при K, стремящемся к ∞, удаляются от полюсов вдоль асимптот.

4. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости s САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при $K = K^{кр}$ пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке $i\omega^{кр}$. Назовем это значение коэффициента усиления критическим $K^{кр}$, а величину $\omega^{кр}$ критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

2. Использование MatLab

В системе MatLab существует команда zpk для преобразования модели, заданной ПФ, в модель, заданную нулями, полюсами и обобщенным коэффициентом передачи (zpk-форма).

Пример:

```
>> w=tf([10],[2 2 3 1 0])
Transfer function:
10
————————————————
2 s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + s
>> w1=zpk(w)
Zero/pole/gain:
5
————————————————————————
s (s+0.3966) (s^2 + 0.6034s + 1.261)
```

Для работы с корневым годографом удобно использовать графический интерфейс «SISO-Design Tool», предназначенный для анализа и синтеза одномерных линейных систем автоматического управления (SISO – Single Input/Single Output).

Запуск SISO-Design Tool осуществляется командой

```
>> sisotool
```

В появившемся окне графического интерфейса необходимо использовать команду «File/Import» для загрузки данных из рабочего пространства MatLab, в результате которой появляется диалоговое окно Import System Data (рис. 1).

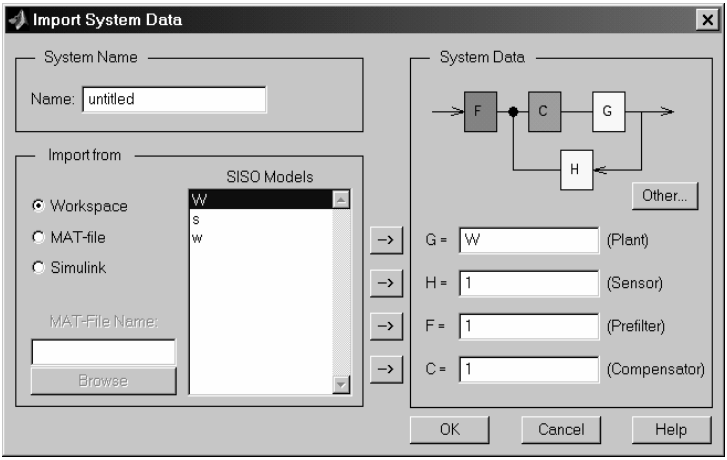


Рис. 1. Диалог для ввода параметров модели

После импортирования данных можно исследовать изменение временных и частотных характеристик замкнутой системы при изменении K. Обычно при этом требуется определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.

На рис. 2 показано окно sisotool для описанной выше модели $w1$. Двигая красным курсором по КГ до пересечения ветвей с мнимой осью, можно определить значение $K^{кр}$. В данном случае $K^{кр} \approx 0{,}1$. Значение $\omega^{кр}$ соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню «View/Closed-Loop Poles».

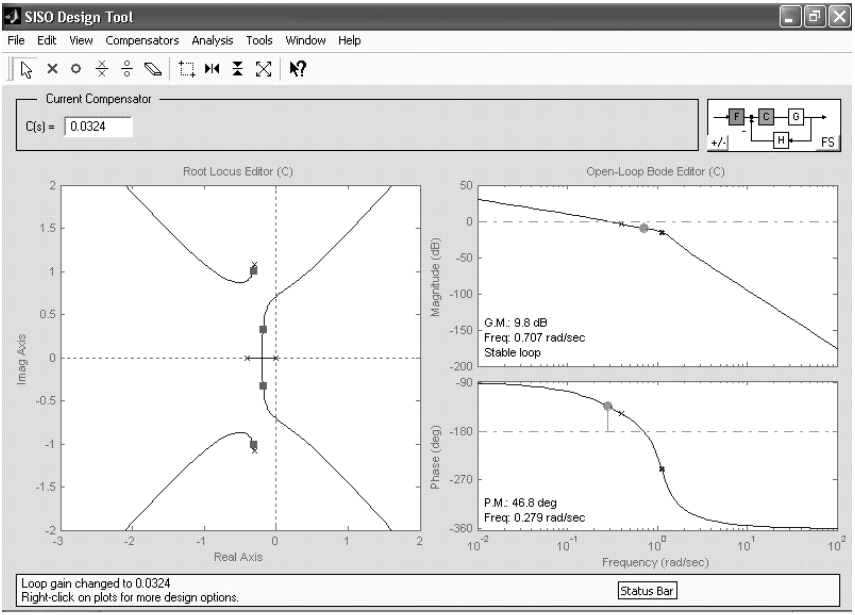


Рис. 2. Основное окно SISO Design tool

3. Задание на лабораторную работу

Построить КГ в соответствии с вариантом из таблицы при помощи графического интерфейса sisotool.

Исследовать динамику замкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления разомкнутой системы K, в том числе:

– запасы устойчивости в частотной области;

Таблица

Варианты передаточных функций

№ п/п	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$T = 0{,}1,\ \zeta = 1$	$\dfrac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$
2	$T = 0{,}05,\ \zeta = 0{,}707$	
3	$T = 0{,}03,\ \zeta = 0{,}1$	
4	$T = 0{,}08,\ \zeta = 0{,}5$	
5	$T = 0{,}01,\ \zeta = 0{,}15$	

Окончание табл.

№ п/п	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
6	$T_1 = 0{,}03,\ T_2 = 0{,}5,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$	$\dfrac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$
7	$T_1 = 0{,}05,\ T_2 = 0{,}4,\ T_3 = 0{,}08,$ $T_4 = 0{,}033$	
8	$T_1 = 0{,}2,\ T_2 = 0{,}45,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$	
9	$T_1 = 0{,}5,\ T_2 = 0{,}25,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}02$	
10	$T_1 = 0{,}1,\ T_2 = 0{,}25,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$	
11	$T_1 = 0{,}2,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$ $T_4 = 0{,}07,\quad = 0{,}5$	$\dfrac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4^2 s^2+2T_4\zeta s+1)}$
12	$T_1 = 0{,}07,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$ $T_4 = 0{,}07,\quad = 0{,}5$	
13	$T_1 = 0{,}3,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$ $T_4 = 0{,}07,\quad = 0{,}5$	
14	$T_1 = 0{,}01,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}1,$ $T_4 = 0{,}07,\quad = 0{,}5$	
15	$T_1 = 0,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}1,$ $T_4 = 0{,}07,\quad = 0{,}5$	

– параметры переходного процесса во временной области.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– анализ результатов построения КГ;

– выводы.

Лабораторная работа №7

ИССЛЕДОВАНИЕ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

1. Методические указания

Классическая схема управления с единичной отрицательной обратной связью показана на рис. 1.

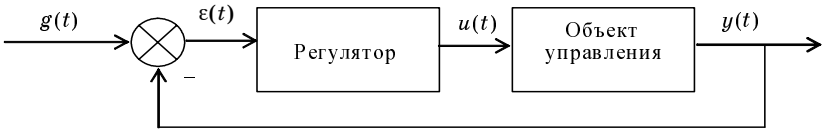


Рис. 1. Управление с отрицательной обратной связью

Назначение регулятора системы заключается в коррекции динамических свойств объекта управления с помощью управляющего сигнала $u(t)$ так, чтобы реальный выходной сигнал $y(t)$ как можно меньше отличался от желаемого выходного сигнала $g(t)$. Регулятор вырабатывает управление, используя ошибку регулирования $e(t) = g(t) - y(t)$.

Для оценки динамических свойств системы часто рассматривается реакция на единичное ступенчатое воздействие. Переходный процесс должен отвечать заданным показателям качества, к которым относятся время переходного процесса, перерегулирование и колебательность. Могут быть также использованы интегральные оценки качества переходного процесса.

ПИД-регуляторы (ПИД – пропорционально – интегродифференциальный) получили самое широкое распространение при управлении производственными и технологическими процессами [6]. Основное уравнение ПИД-регулятора имеет следующий вид:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где k_p, k_i, k_d – константы, выбираемые в процессе проектирования. С их помощью удается обеспечить соизмеримость отдельных слагаемых формулы (1).

Дифференциальная составляющая в формуле (1) позволяет повысить быстродействие регулятора, предсказывая будущее поведение процесса.

Интегральная составляющая в формуле (1) призвана ликвидировать статические ошибки управления, поскольку интеграл даже от малой ошибки может быть значительной величиной, вызывающей реакцию регулятора.

Хотя ПИД-регулятор представляет собой систему второго порядка, его можно успешно применять для управления процессами, имеющими более высокий порядок. Это вызвано возможностью аппроксимации многих систем высокого порядка системами второго порядка [6].

На практике часто используются упрощенные версии ПИД-регулятора – П-, И-, ПД- и ПИ-регуляторы, описываемые соответственно формулами:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t); \tag{2}$$

$$u(t) = k_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau; \tag{3}$$

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}; \tag{4}$$

$$u(t) = k_p \cdot \varepsilon(t) + k_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \tag{5}$$

При большом значении коэффициента усиления П- и И- регуляторы ведут себя как двухпозиционное реле.

Существует инженерный подход к синтезу ПИД-регуляторов – методика Зиглера-Николса [6], которая предполагает следующие шаги:

1. Коэффициенты k_d и k_i устанавливаются равными нулю, а коэффициент k_p увеличивается до тех пор, пока система не потеряет устойчивость.

2. Предельное значение k_p обозначается как k_u, а период автоколебаний как p_u.

3. Значения коэффициентов ПИД-регулятора рассчитываются по следующим формулам:

$$k_p = 0{,}6k_u;\ k_i = 1{,}2(k_u/p_u);\ k_d = 3k_u p_u/40.$$

В аналоговых промышленных ПИД-регуляторах коэффициенты настраиваются вручную [6].

Следует заметить, что коэффициент K, от которого строится корневой годограф, соответствует, по сути, П-регулятору. Процесс по-

строения корневого годографа нескорректированной системы можно рассматривать как одновременный синтез этой системы с использованием П-регулятора [4].

2. Использование MatLab

В составе MatLab Simulink имеется пакет Nonlinear Control Design (NCD) Blockset, с помощью которого можно выполнить оптимизацию параметров ПИД-регулятора, если имеется модель объекта управления [8].

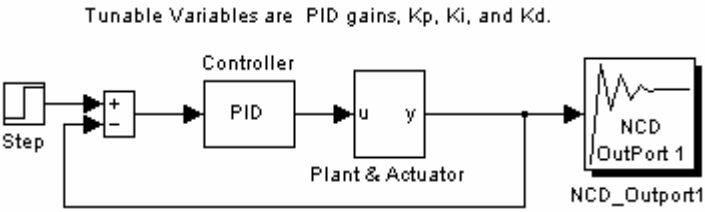
В наборе блоков NCD Blockset имеется основной блок NCD Outport, с помощью которого можно задать требуемые ограничения для переходного процесса в оптимизируемой системе, указать оптимизируемые параметры и выполнить параметрическую оптимизацию.

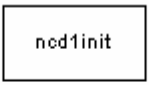
В составе NCD Blockset имеется набор демонстрационных файлов, в том числе – файл ncddemo1, показывающий процесс настройки ПИД-регулятора. После набора имени этого файла в командной строке MatLab будет открыто окно Simulink со следующей схемой (рис. 2).

Блок Controller представляет собой описание ПИД-регулятора, он приведен на рис. 3:

Блок Plant & Actuator (рис. 4) описывает объект управления, заданный передаточной функцией, перед которой помещены нелинейности, ограничивающие уровень входного сигнала (блок Limit) и значение его производной (блок Rate).

На выходе объекта (рис. 2) располагается блок оптимизации NCD_Outport, окно которого показано на рис. 5.





Double click here to initialize plant data and optimization parameters.

Double click on NCD Blockset block to display constraint window.

Рис. 2. Окно Simulink с примером ncddemo1

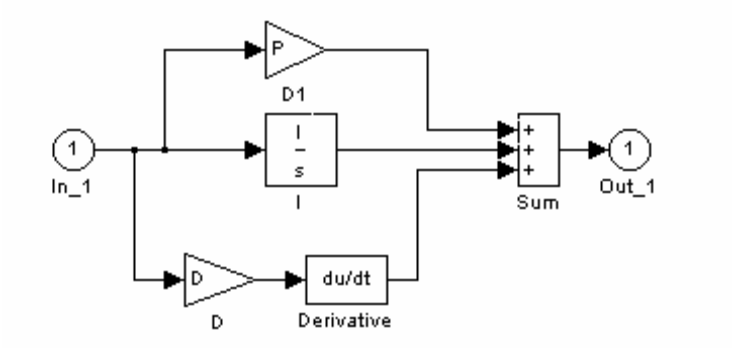


Рис. 3. Описание ПИД-регулятора

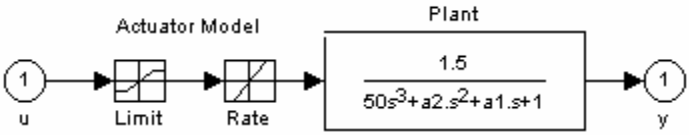


Рис. 4. Описание объекта управления

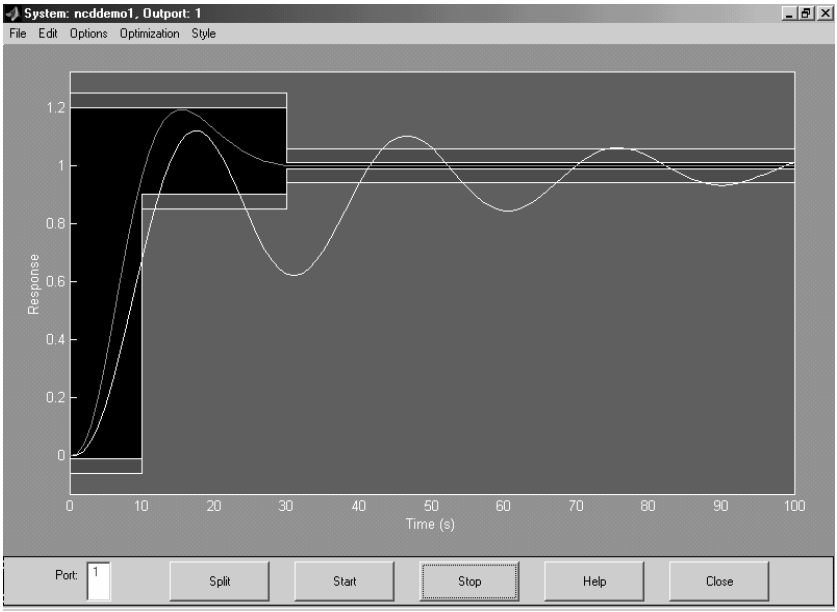


Рис. 5. Главное окно блока NCD_Outport

На рис. 5 показаны границы желаемого переходного процесса в системе. Пользователь может изменять их по своему усмотрению.

Кнопка Split позволяет разбивать границы на более мелкие участки для описания переходного процесса с нужной степенью подробности.

Кнопки Start и Stop управляют процессом оптимизации.

Пункты меню File и Edit содержат обычные операции работы с файлами и редактирования.

В меню Options находятся ряд опций для более детального описания и отображения переходных процессов в системе.

При выборе пункта меню Optimization/Parameters открывается окно, в котором задаются параметры оптимизации и интервал дискретизации. Главные поля этого окна имеют следующее значение:

– Tunable variable – окно ввода имен настраиваемых параметров (в данном случае это коэффициенты ПИД-регулятора – их названия вводятся через пробел).

– Lover bound и Upper bound – нижняя и верхняя границы значений настраиваемых переменных.

– Discretization interval – интервал дискретизации.

До запуска процесса оптимизации надо задать в окне команд MatLab начальные значения коэффициентов ПИД-регулятора.

После запуска процесса оптимизации в окне NCD_Outport отображаются варианты переходного процесса при изменении настраиваемых параметров. Настройка заканчивается, когда процесс попадает в заданные границы (рис. 5).

В окне команд MatLab можно прочитать значения полученных параметров для рассмотренного примера:

$$k_p = 1{,}33;\ k_i = 0{,}15;\ k_d = 8{,}33.$$

3. Задание на лабораторную работу

1. Собрать в MatLab Simulink систему управления с ПИД-регулятором для полученного варианта объекта управления (см. табл. лабораторной работы № 6).

2. Сформулировать требования к желаемому переходному процессу в системе.

3. Определить значения коэффициентов ПИД-регулятора путем интерактивного моделирования на основании методики Зиглера – Николса.

4. С помощью пакета NCD Blockset выполнить оптимизацию параметров ПИД-регулятора.

5. Рассмотреть варианты П-, И-, ПД- и ПИ-регуляторов для заданного объекта. Оптимизировать их параметры и сравнить результаты.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– структурные схемы исследованных регуляторов;

– графики переходных процессов при управлении объектом с помощью различных регуляторов.

Лабораторная работа №8

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Цель работы: изучить методику модального управления линейными динамическими объектами в пространстве состояний.

1. Методические указания

Состояние системы – это совокупность таких переменных, знание которых позволяет, при известном входе и известных уравнениях динамики, описать будущее состояние системы и значение ее выхода. Выбор переменных состояния неоднозначен.

Метод пространства состояний достаточно универсален, его можно применять для нелинейных систем многомерных систем. Для начального знакомства с этим подходом ниже рассматриваются линейные одномерные системы (или SISO – Single Input Single Output), уравнения состояний которых имеют следующий общий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{X}(t)$ – вектор-столбец состояния [n Ч 1]; $\mathbf{A}$ – матрица коэф-фициентов объекта [n Ч n]; $\mathbf{B}$ – матрица входа [n Ч 1]; $u(t)$ – сигнал управления; $\mathbf{Y}$ – вектор выхода [k Ч 1]; $\mathbf{C}$ – матрица выхода [1 Ч n]; $\mathbf{D}$ – матрица влияния входа непосредственно на выход системы [n Ч 1] (часто полагают $\mathbf{D} = 0$).

Уравнения состояния SISO-системы в развернутом виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Система, описываемая матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, является управляемой, если существует такое неограниченное управление $u(t)$, которое мо-

жет перевести объект из начального состояния $\mathbf{X}(0)$ в любое другое состояние $\mathbf{X}(t)$.

Для SISO-системы с одним входом и одним выходом вводится понятие матрицы управляемости (размером $n \times n$):

$$\left[\mathbf{B};\quad \mathbf{AB};\quad \mathbf{A}^2\mathbf{B};\quad \ldots\quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right].$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система управляема.

Модальный синтез предполагает формирование таких обратных связей по состоянию, при которых обеспечивается заданное расположение полюсов замкнутой системы. *Модой* называется составляющая решения дифференциального уравнения, соответствующая конкретному полюсу.

Расположение полюсов в основном определяет характер переходного процесса в системе. Обычно рассматриваются такие корневые оценки качества переходного процесса, как время переходного процесса, степень устойчивости, колебательность и перегулирование.

Для оценки быстродействия системы используется понятие степени устойчивости η, под которой понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (потому что корни, имеющие наименьшую по модулю вещественную часть, дают в переходном процессе наиболее медленно затухающую составляющую).

Время переходного процесса $t_{\text{п}}$ можно приближенно оценить по формуле

$$t_{\text{п}} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Запас устойчивости системы оценивается колебательностью. Система имеет склонность к колебаниям, если характеристическое уравнение содержит комплексные корни $\eta_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. Колебательность оценивается по формуле

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}.$$

По значению колебательности можно оценить перерегулирование

$$\delta \le e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\%.$$

Для объекта, заданного уравнениями состояния (1), управление по состоянию описывается выражением

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t), \qquad (2)$$

где **K** – вектор коэффициентов обратной связи.

Таким образом, система, замкнутая регулятором, приводится к следующему виду:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A - BK)X(t). \qquad (3)$$

Этому выражению соответствует рис. 1, где $g(t)$ – задающее воздействие.

Основная теорема модального управления гласит, что если линейная динамическая система (8.1) является управляемой, то линейная обратная связь может быть выбрана таким образом, что матрица (**A**-**BK**) будет иметь желаемое расположение корней (спектр). При доказательстве этой теоремы используется каноническая форма управляемости матриц **A** и **B**.

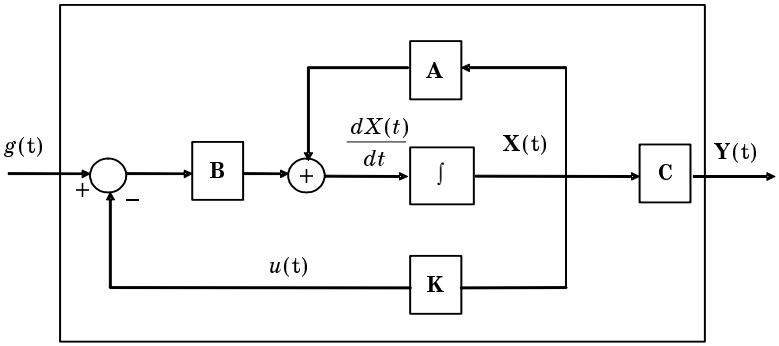


Рис. 1. Система с обратной связью

Аккерманом была предложена формула, позволяющая с помощью преобразования подобия перевести модель произвольной структуры в каноническую форму управляемости, определить искомые коэффициенты **K**, а затем пересчитать полученное решение применительно к исходной структуре. Формула Аккермана имеет вид [3]

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} A^n & \beta_{n-1}A^{n-1} & \dots & \beta_1 A & \beta_0 I \end{bmatrix},$$

где $в_i$ – коэффициенты характеристического полинома матрицы (**A**–**BK**).

Таким образом, задача модального синтеза сводится к выбору желаемых корней характеристического полинома замкнутой системы, при которых обеспечиваются заданные параметры переходного про-

цесса, после чего в соответствии со стандартным алгоритмом рассчитываются коэффициенты обратных связей по состоянию.

2. Использование MatLab

В программном комплексе MatLab для формирования модели в пространстве состояний используется функция ss,

```
>> w1 = ss(A, B, C, D),
```

где **A**, **B**, **C**, **D** – матрицы модели.

Из модели в пространстве состояний можно получить ПФ командой:

```
>> w2 = tf(w1)
```

И, наоборот, если уже существует модель, заданная ПФ, то ее можно преобразовать в пространство состояний с помощью команды ss:

```
>> w=tf([2 2],[3 4 1]);
>> w1=ss(w)
```

Заметим, что одной и той же ПФ могут, вообще говоря, соответствовать разные модели в пространстве состояний, но всем этим моделям соответствует одна и та же ПФ.

Матрица управляемости может быть построена с помощью функции ctrb, которая вызывается одной из команд:

```
>> W = ctrb(A, B)
>> W = ctrb(sys)
>> W = ctrb(sys.A, sys.B)
```

В пакете MatLab имеется функция acker, с помощью которой можно обеспечить желаемое расположение полюсов одномерной линейной системы (в соответствии с формулой Аккермана):

```
>> k = acker(A,B,P),
```

где **A** и **B** – матрицы системы; **P** – вектор, задающий желаемое расположение полюсов системы.

Пример. Пусть система описывается матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Желаемые полюса заданы вектором:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Тогда рассчитать значение коэффициентов обратных связей можно с помощью команд

```
>>A=[0 1;-2 3];
>> B=[0; 1];
>> P=[-1 -3];
```

```
>> K=acker(A,B,P)
K =
1 7
```

Таким образом, управление в этом примере должно быть сформировано в виде

$$u(t) = -\mathbf{KX}(t) = -\begin{bmatrix}1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = -x_1(t) - 7x_2(t). \qquad (6)$$

Для многомерных систем в пакете MatLab имеется функция place (ее можно использовать также и для одномерных систем). Функция

```
>> K=place(A,B,P)
```

рассчитывает матрицу коэффициентов обратных связей **K**, которая обеспечивает желаемое расположение полюсов системы. Длина вектора **P** должна быть равна числу строк матрицы **A**.

Следует заметить, что метод модального управления не гарантирует равенство установившейся ошибки нулю. Для обеспечения равенства задающего воздействия и выходного сигнала системы в установившемся режиме вводится масштабирующий коэффициент k_0. Для его вычисления запишем уравнения состояния в виде:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\left(u + k_0 g\right),$$

подставляя уравнение (6), имеем:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ -3x_1 - 4x_2 + k_0 g\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$$y = \mathbf{CX} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = x_1.$$

В установившемся режиме получаем

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_2 = 0,$$

и должно выполняться условие

$$y = g.$$

Следовательно, из уравнения (7) получаем

$$k_0 = 3.$$

На этот коэффициент должно умножаться входное воздействие.

В пакете моделирования Simulink MatLab для описания объекта в пространстве состояний имеется блок State Space. Однако этот блок

не позволяет непосредственно оценивать текущее значение вектора состояния, поэтому для моделирования работы модального регулятора нужно детально описывать матричные операции.

3. Задание на лабораторную работу

1. Для полученного варианта объекта управления, заданного матрицами **A**, **B**, **C** (см. табл.), обосновать возможность модального управления с помощью критерия управляемости.

2. Рассчитать коэффициенты обратной связи, при которой обеспечивается желаемое расположение полюсов замкнутой системы. Рассмотреть два варианта – когда перерегулирование равно 30 и 0% (апериодический процесс).

Таблица

Модели в пространстве состояний

№ п/п	A	B	C
1	$\begin{bmatrix} -39 & -71 & -23 \\ 23 & 40 & 13 \\ -6{,}6 & -10{,}7 & -3{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28000 & 84000 & 112000 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -44 & -78 & -25 \\ 26 & 43{,}7 & 14 \\ -7{,}5 & -11{,}8 & -3{,}7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28000 & 84000 & 112000 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -54 & -98 & -32 \\ 31 & 55 & 17{,}8 \\ -9 & -15 & -4{,}8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 35000 & 105000 & 140000 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -60{,}8 & -107 & -34{,}7 \\ 35 & 60 & 19 \\ -10 & -16{,}7 & -5{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 35000 & 105000 & 140000 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -72{,}4 & -130{,}6 & -42{,}5 \\ 41{,}5 & 73 & 23{,}6 \\ -12 & -20{,}6 & -6{,}6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42000 & 126000 & 168000 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -80{,}4 & -142{,}5 & -46 \\ 45{,}9 & 79{,}6 & 25{,}6 \\ -13{,}6 & -22{,}6 & -7{,}2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}228 \\ -0{,}127 \\ 0{,}038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42000 & 126000 & 168000 \end{bmatrix}$

Окончание табл.

№ п/п	A	B	C
7	$\begin{bmatrix} -100,5 & -174,4 & -56 \\ 57 & 97 & 31 \\ -17 & -28 & -8,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42000 & 126000 & 168000 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -13,2 & -16,3 & -4,7 \\ 8,6 & 9,5 & 2,6 \\ -2,4 & -1,6 & -0,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3500 & 10500 & 14000 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -11,4 & -16,7 & -5,13 \\ 7,5 & 9,7 & 2,9 \\ -2 & -1,6 & -0,36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7000 & 21000 & 28000 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} -16,2 & -26,3 & -8,3 \\ 10,2 & 15 & 4,6 \\ -2,9 & -3,2 & -0,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14000 & 42000 & 56000 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} -22,3 & -38,6 & -12,4 \\ 13,6 & 21,9 & 6,9 \\ -3,9 & -5,3 & -1,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21000 & 63000 & 84000 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} -34 & -54 & -17 \\ 20 & 30,5 & 9,4 \\ -5,9 & -7,9 & -2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,228 \\ -0,127 \\ 0,038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21000 & 63000 & 84000 \end{bmatrix}$

3. С помощью выбора масштабирующего коэффициента обеспечить в системе нулевую установившуюся ошибку.

4. Собрать в Simulink MatLab структурную схему системы с модальным регулятором (не используя блок State space) и проверить полученные результаты.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– расчетную часть;

– структурные схемы моделирования в Simulink;

– графики переходных процессов в системе.

Лабораторная работа №9

НАБЛЮДАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

1. Методические указания

Метод модального управления предполагает, что все компоненты вектора состояния **X** могут быть измерены. Однако на практике некоторые компоненты могут быть неизвестны по одной из двух причин:

– измерительных приборов может быть недостаточно;

– некоторые компоненты вектора **X** могут не иметь физического смысла.

Однако если система является наблюдаемой, то все компоненты вектора **X** могут быть восстановлены по наблюдениям вектора **Y**.

Система, описываемая матрицами **A** и **C**, является наблюдаемой тогда и только тогда, когда существует конечное время T такое, что начальное состояние $\mathbf{X}(0)$ может быть определено в результате наблюдения выходной переменной $y(t)$, tОT при заданном управлении $u(t)$.

Наблюдаемость системы описывается условием:

$$\operatorname{rank}\left[\mathbf{C};\quad \mathbf{C}A;\quad CA^2;\quad \ldots\quad CA^{n-1}\right]^T = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом матрица управляемости (размером $n \times n$) имеет вид:

$$\left[\mathbf{C};\quad \mathbf{CA};\quad \mathbf{CA}^2;\quad \ldots\quad \mathbf{CA}^{n-1}\right]^T.$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система наблюдаема.

Для того чтобы узнать все компоненты вектора состояния объекта, можно использовать его модель

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{BU}(t),$$

где $\hat{\mathbf{X}}(t)$ – оценка состояния объекта.

Если начальное состояние объекта и модели совпадают и модель адекватна объекту, то можно полагать в любой момент времени, что

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t).$$

Однако практически добиться полной адекватности объекта и модели невозможно, невозможно может быть и полное равенство начальных условий. Поэтому на практике можно рассчитывать лишь на выполнение условия

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{X}(t).$$

Подобным свойством обладают так называемые асимптотические наблюдающие устройства.

Асимптотическое наблюдающее устройство использует обратную связь по ошибке восстановления вектора состояния, так что работа наблюдающего устройства описывается уравнением

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}(t)}{dt}=\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t)+\mathbf{B}\mathbf{U}(t)+\mathbf{N}(\mathbf{Y}-\mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}(t)),$$

где **N** – матрица параметров наблюдающего устройства.

Общий вид системы управления с наблюдателем показан на рис.1.

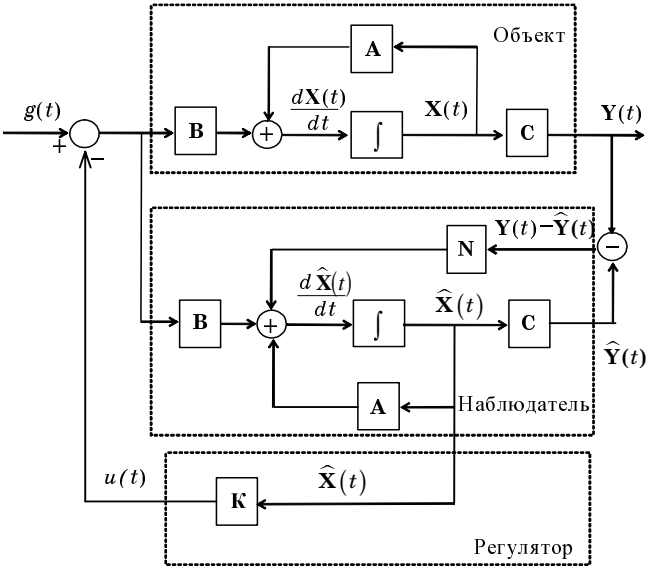


Рис. 1. Структура системы управления с наблюдателем

Параметры наблюдателя и параметры регулятора могут рассчитываться независимо.

Понятно, что процессы в наблюдателе должны протекать более быстро, чем переходный процесс в системе. Эмпирически установле-

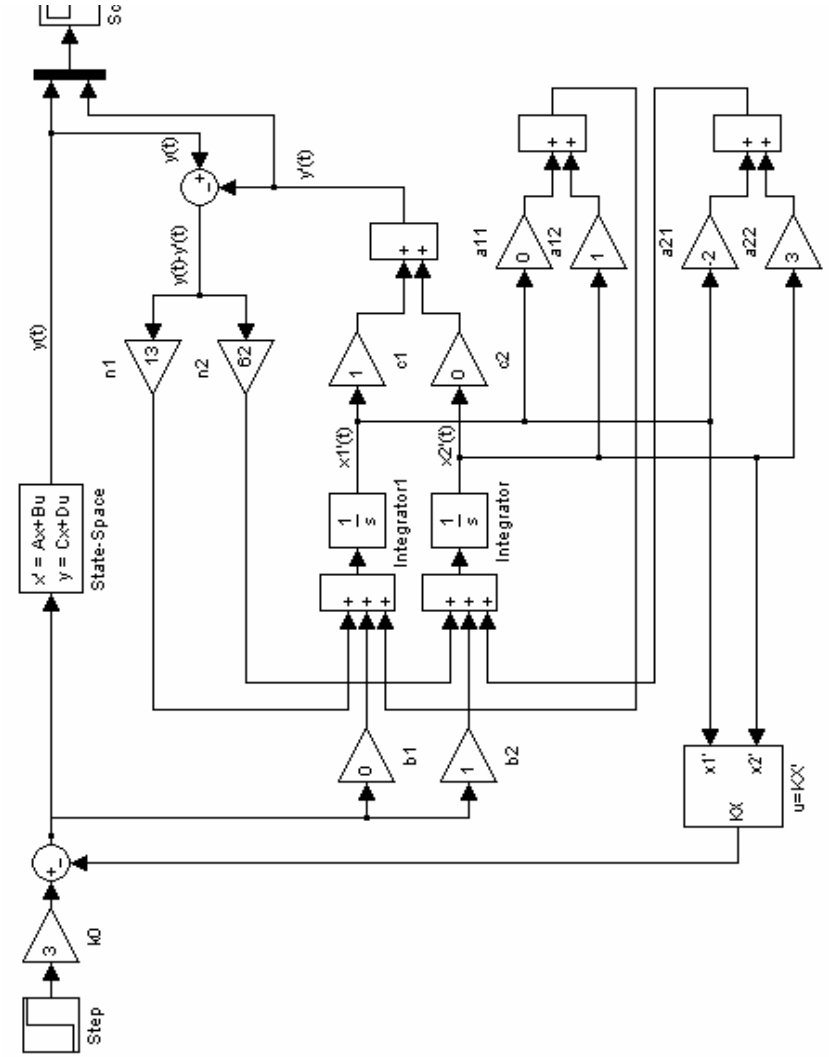


Рис. 2 Моделирование работы наблюдателя в Simulink MatLab

но (см. [5]), что наблюдатель должен обладать быстродействием, в 2–4 раза превышающим быстродействие системы.

2. Использование MatLab

В программном комплексе MatLab для формирования модели в пространстве состояний используется функция ss ,

```
>> sys = ss(A, B, C, D),
```

где **A, B, C, D** – матрицы модели.

Матрица наблюдаемости может быть построена с помощью функции obsv, которая также может вызываться в одном из вариантов:

```
>> N = obsv(A, C)
>> N = obsv(sys)
>> N = obsv(sys.A,sys.C)
```

Описанная выше функция acker может быть применена и для расчета коэффициентов обратных связей наблюдателя одномерной системы. Для этого надо транспонировать матрицу **A** и заменить **B** на $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$:

```
>>N=acker(A^T,C^T,P),
```

где **P** – вектор желаемых полюсов наблюдателя.

Например:

```
>>A=[0 1; -2 3];
>> B=[0; 1];
>>C=[1 0];
>> P=[-5 -5];
>> N1=acker(A',C',P);
>> N=N1';
N =
13
62
```

Для последнего примера на рис. 2 приведена собранная в MatLab Simulnk структура системы с наблюдающим устройством.

Для многомерных (и одномерных) систем эту же задачу можно решить с помощью функции place

```
>>N=place(A^T,C^T,P)
```

В MatLab существуют специальные функции для формирования наблюдателя.

Функция estim формирует наблюдающее устройство в виде ss-объекта для оценивания вектора переменных состояния модели объекта управления sys и для заданной матрицы коэффициентов обратных связей наблюдателя L:

```
>> est=estim(sys,L)
```

Функция reg формирует регулятор для заданной в пространстве состояний модели объекта управления sys, матрицы коэффициентов обратных связей по переменным состояния K и матрицы коэффициентов обратных связей наблюдателя L:

```
>> rsys=reg(sys,K,L).
```

3. Задание на лабораторную работу

1. Для заданного варианта объекта управления, заданного матрицами **A**, **B**, **C** (см. табл. в лабораторной работе № 8) обосновать возможность модального управления с помощью критерия управляемости.

2. Рассчитать коэффициенты обратной связи, при которой обеспечивается желаемое расположение полюсов замкнутой системы.

3. С помощью выбора масштабирующего коэффициента обеспечить в системе нулевую установившуюся ошибку.

4. Рассчитать параметры наблюдающего устройства для восстановления вектора состояния объекта.

5. Собрать в Simulink MatLab структурную схему системы с модальным регулятором (используя блок State space) и наблюдателем.

6. Исследовать влияние параметров наблюдающего устройства на характер переходных процессов в системе.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– расчетную часть;

– структурную схему моделирования в MatLab Simulink;

– графики переходных процессов в системе.

Библиографический список

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.

2. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.

3. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. М: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.

4. *Филипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 616 с.

5. *Гудвин Г. К., Гребе С. Ф., Сальгадо М. Э.* Проектирование систем управления. М.: Бином, 2004. 911 с.

6. *Олссон Г., Пьяни Дж.* Цифровые системы автоматизации и управления. СПб., 2001. 577 с.

7. *Лазарев Ю. Ф.* MATLAB 5.x. Киев: BHV, 2000.

8. *Дьяконов В.* Simulink4. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002.

9. *Медведев В. С., Потемкин В. Г.* Control system toolbox. MatLab 5 для студентов. М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. 287 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Лабораторная работа №1. Динамические звенья и их характеристики во временной области 4
Лабораторная работа №2. Исследование преобразований структурных схем 9
Лабораторная работа №3. Частотные характеристики динамических звеньев 17
Лабораторная работа №4. Исследование устойчивости систем с обратной связью 22
Лабораторная работа № 5. Частотный синтез корректирующего устройства 29
Лабораторная работа №6. Метод корневого годографа 37
Лабораторная работа №7. Исследование ПИД-регуляторов 43
Лабораторная работа №8. Модальное управление 49
Лабораторная работа №9. Наблюдающие устройства 56
Библиографический список 61