

Ю.Т. Селиванов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть I



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 539.3/6(075)
ББК Ж121я73-2
С291

Р е ц е н з е н т

Кандидат технических наук, профессор
А.Г. Ткачев

Селиванов, Ю.Т.
С291 Соппротивление материалов : учеб. пособие / Ю.Т. Селиванов. –
Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – Ч. I. – 76 с. – 100 экз. –
ISBN 5-8265-0570-2 (978-5-8265-0570-0).

Отражены положения основных разделов первой части курса "Сопро-
тивление материалов", имеющиеся в государственных образовательных
стандартах. Содержатся основные теоретические предпосылки для полу-
чения расчетных формул.

Приведены примеры решения задач по наиболее сложным для вос-
приятия студентами темам.

Предназначено для студентов дневного и заочного отделений специ-
альностей 655400, 655800.

УДК 539.3/6(075)
ББК Ж121я73-2

ISBN 5-8265-0570-2
(978-5-8265-0570-0)

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный
технический университет" (ТГТУ), 2007
Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

Ю.Т. Селиванов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть I

Утверждено Ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия
для студентов дневного и заочного отделений
специальностей 655400, 655800



ТАМБОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ
2007

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Селиванов ЮРИЙ ТИМОФЕЕВИЧ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть I

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 15.02.2007
Формат 60 × 84/16. 4,42 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 100

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов занимается определением напряжений и деформаций в твердых телах с целью расчета технических сооружений или их частей на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – способность тела сопротивляться разрушению.

Жесткость – способность тела сопротивляться деформации.

Устойчивость – способность тела сохранять свою первоначальную форму.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

В сопромате изучают тела, имеющие простейшую форму бруса или оболочки.

Брус – тело, одно из измерений которого (длина) значительно больше других размеров тела.

Брус с прямой осью постоянного поперечного сечения называется *стержнем*.

Оболочка – тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше других размеров тела.

Частный случай оболочки – *пластина*.

Массивным телом называется тело, у которого все три измерения одного порядка.

1.2. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ О ДЕФОРМИРОВАННОМ ТЕЛЕ

В сопромате изучается ряд предпосылок (допущений), упрощающих расчеты. Эти допущения, как показывают эксперименты и исследования, проведенные более строгими методами теории упругости, можно использовать при решении задач, рассматриваемых в курсе сопромата.

1. *Сплошности* – предполагается, что материал конструкции является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках.

2. *Материал тела однороден (изотропен)* т.е. его свойства по всем направлениям одинаковы.

3. *Материал конструкции обладает свойством упругости*, т.е. способностью восстанавливать свою форму и размеры после снятия нагрузки.

4. *Деформация материала в каждой его точке прямо пропорциональна напряжению в данной точке (закон Гука)*.

5. *Деформации конструкции настолько малы, что можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок*.

6. *Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки (принцип независимости действия сил)*.

7. *Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки (гипотеза плоских сечений; гипотеза Бернулли)*.

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ

Все силы делятся на две категории: *внешние и внутренние*.

Внешние силы – результат взаимодействия различных тел.

Внутренние силы – результат взаимодействия одного и того же тела.

Внешние силы разделяются на объемные и поверхностные, статические и динамические, постоянные и временные. Источником объемной силы является масса самого тела. Объемная сила имеет размерность Н/м^3 .

Сила приложенная в точке: обозначение – P ; размерность – Н ; кг ; т .

Сила распределенная по длине: размерность – Н/м .

Сила распределенная по площади: размерность – Н/м^2 ; Па .

Если сила вызывает ускорение то, эта динамическая сила.

Если время существования конструкции соизмеримо со временем действия силы, то эта сила постоянная. Если отсутствуют внешние силы, то нет и внутренних сил, т.е. внутренние силы возникают только при приложении внешних сил.

1.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

В сопромате расчеты конструкций производят с использованием расчетных схем. На расчетной схеме вместо бруса изображают его ось. Нагрузку, приложенную к небольшим участкам поверхности бруса, заменяют *сосредоточенными силами*. Нагрузку, приложенную к участкам больших размеров, составляющих существенную часть его длины, изображают *распределенной силой* (рис. 1.1).

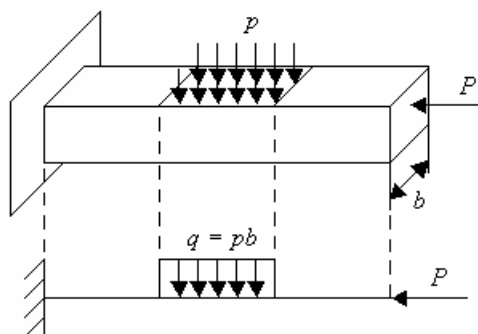


Рис. 1.1

Перемещения возникают за счет деформации тела. В теории предполагается, что у нас действуют только упругие деформации. Известны два вида деформаций: изменение длины и сдвиг (рис. 1.2).

В первом случае происходит уменьшение или увеличение длины отрезка. Во втором искажение первоначально прямого угла.

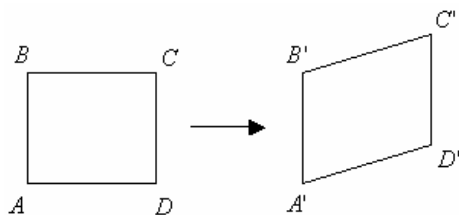


Рис. 1.2

Элемент $ABCD$ расположен в поперечном сечении бруса. Точка A , начало отсчета, считается неподвижной. Внутренние силы в сечении можно разложить на две составляющие: касательную (включает силы расположенные в плоскости сечения) и нормальную (перпендикулярна плоскости сечения).

1.5. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим элемент конструкции, на который действует система внешних сил, находящихся в равновесии (рис. 1.3). Причем в число внешних сил входят как заданные активные силы, так и реакции связи.

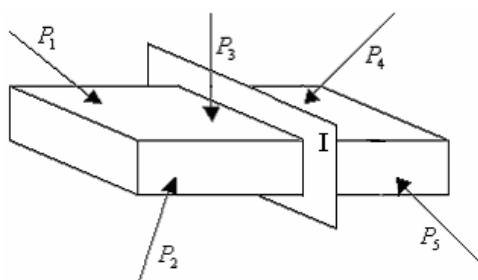


Рис. 1.3

Мысленно рассечем элемент плоскостью I . Силы воздействия отсеченной левой части на правую для всего элемента считаются внутренними.

На основании известного закона механики (действие равно противодействию), эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Каждому из усилий соответствует определенный вид деформации бруса: продольной силе N – растяжение-сжатие, моменту M_k – кручение, моментам M_x и M_y – изгиб (рис. 1.4).

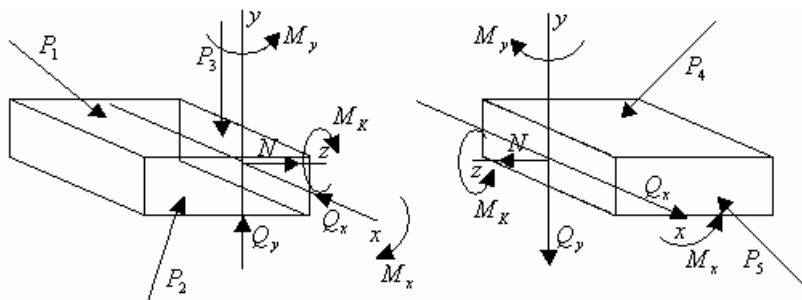


Рис. 1.4

Все эти усилия являются внутренними. Прием определения этих усилий называется методом сечений. Так как внешние силы уравниваются внутренними, то проекция на какую-либо ось внутреннего усилия, действующего со стороны левой части на правую, равна проекции на эту ось всех внешних сил, приложенных к левой части.

Момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении, действующий со стороны левой части на правую, равен моменту всех внешних сил, действующих со стороны левой части, относительно этой оси.

1.6. НАПРЯЖЕНИЯ

Внутренние силы в сечении можно разложить на две составляющие: нормальную и касательную. Первая составляющая расположена в плоскости сечения, а вторая – перпендикулярна этой плоскости.

Напряжение – интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения называется касательным напряжением:

$$\tau = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{T}{F},$$

где T – касательная сила; F – площадь сечения.

Интенсивность нормальных сил называется нормальным напряжением:

$$\sigma = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{N}{F}.$$

Нормальные и касательные напряжения являются составляющими полного напряжения (эквивалентного):

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Величины напряжений σ и τ в каждой точке элемента зависят от направления сечения, проведенного через эту точку, т.е. если сечение расположено по отношению к вертикальной оси под углом не равным 90° , то величины σ и τ изменятся.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

Различают простое и внецентренное растяжение-сжатие (рис. 2.1). При простом, линия действия силы совпадает с осью бруса. Если не совпадает, а параллельна ей, то это – внецентренное растяжение-сжатие.

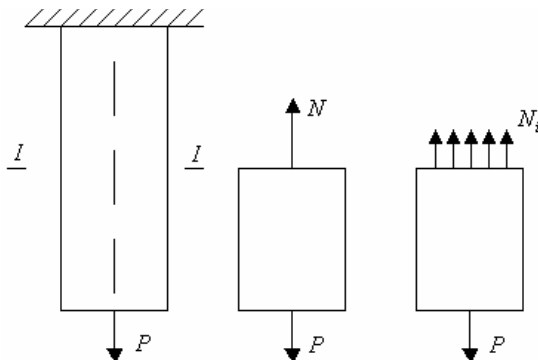


Рис. 2.1

Из уравнения проекций на вертикальную ось имеем:

$$N = P, \quad (2.1)$$

где P – внешняя сила; N – внутреннее усилие.

Метод сечений: для нахождения внутренних усилий тело мысленно разрезают на две части и рассматривают равновесие той части, которая не соприкасается с заделкой.

При растяжении-сжатии гипотеза плоских сечений дополняется еще одним пунктом: в поперечных сечениях достаточно далеко удаленных от точки приложения сил нормальные силы распределяются по сечению равномерно, а касательные отсутствуют.

Нормальное напряжение характеризует величину внутренних усилий приходящихся на единицу площади сечения:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.2)$$

Правило знаков: нормальные усилия и напряжения положительны при растяжении и отрицательны при сжатии.

Условие прочности при растяжении и сжатии

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.3)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение (справочная величина, физико-механическая характеристика материала). Это наибольшее напряжение, при котором материал конструкции может надежно и долго работать.

Решая совместно уравнения (2.2) и (2.3), имеем

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.4)$$

Это уравнение прочности при растяжении-сжатии. С его помощью возможно решение трех типов задач, но наиболее часто решается задача подбора площади сечения F при известных значениях N и $[\sigma]$. Тогда

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.5)$$

Например, для круга

$$F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}.$$

Для прямоугольного сечения должно быть задано соотношение сторон:

$$\frac{h}{b} = k; \quad F = kb^2; \quad b \geq \sqrt{\frac{N}{k[\sigma]}},$$

где h – высота; b – основание.

Значение продольной силы в каждом частном случае можно легко определить с помощью метода сечений. Для нахождения напряжения σ в каждой точке поперечного сечения, необходимо знать закон распределения по сечению, который обычно изображается графиком, показывающим их изменение по высоте балки (эпюра нормальных напряжений).

2.2. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Проведем сечение mn_2 под углом α к нормали (рис. 2.2).

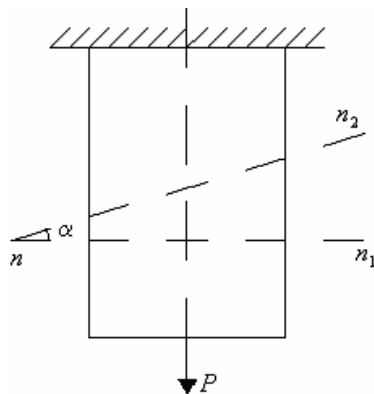


Рис. 2.2

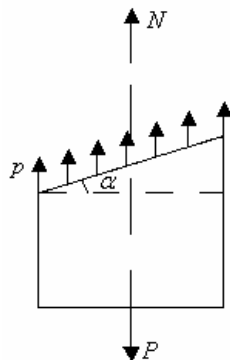


Рис. 2.3

Удлинение волокон, параллельных оси бруса одинаково, так как в противном случае произойдет искривление оси бруса.

Исходя из этого, напряжения p во всех точках как поперечного, так и наклонного сечения одинаковы, причем напряжении p параллельно оси бруса (рис. 2.3).

Из условия равновесия отсеченной части следует, что внутренняя сила $N = P$ (действует в сечении mn_1), а так как

$$\sigma = \frac{N}{F} \Rightarrow N = \sigma F,$$

для нашего случая

$$N = pF_\alpha. \tag{2.6}$$

В этой формуле площадь наклонного сечения F_α связана с площадью F следующей зависимостью:

$$F_\alpha = F / \cos \alpha.$$

Из условия (2.6) имеем

$$p = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N \cos \alpha}{F} = \sigma \cos \alpha,$$

где σ – нормальное напряжение в поперечном сечении бруса.

Разложим напряжение p на два составляющих напряжения: нормальную составляющую σ_α и касательную составляющую τ_α (рис. 2.4).

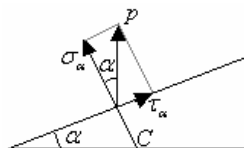


Рис. 2.4

Из рисунка видно, что

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha,$$

а так как $p = \sigma \cos \alpha$,

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \tag{2.7}$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \tag{2.8}$$

Правило знаков для касательного напряжения: касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки C , лежащей на внутренней нормали к сечению по часовой стрелке.

Из формулы (2.7) следует, что:

при $\alpha = 0^\circ$

$$\sigma_\alpha^{\max} = \frac{N}{F} = \sigma,$$

при $\alpha = 90^\circ$

$$\sigma_\alpha^{\min} = 0.$$

Аналогично из формулы (2.8):

при $\alpha = 45^\circ$

$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{\sigma}{2},$$

при $\alpha = 0^\circ; 90^\circ$

$$\tau_\alpha^{\min} = 0.$$

В площадках с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями касательные напряжения равны нулю.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Нормальным напряжениям соответствует деформация растяжения-сжатия, а касательным – сдвиг.

Прямой брус длиной l и нагруженный силой P удлиняется на величину Δl (рис. 2.5):

$$\Delta l = l' - l,$$

где Δl – абсолютная деформация бруса (полная деформация).

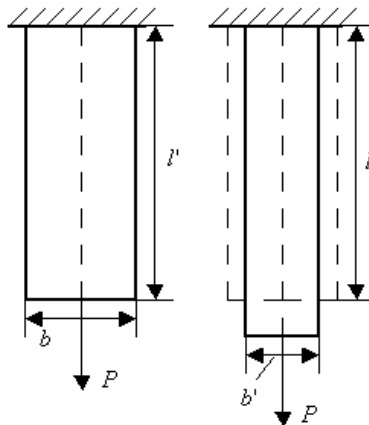


Рис. 2.5

Линейную деформацию ξ называют относительным продольным удлинением:

$$\xi = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.9)$$

Происходит также изменение поперечных размеров бруса. Относительная поперечная деформация может быть рассчитана по формуле

$$\xi' = \frac{\Delta b}{b}.$$

Экспериментально установлено, что при напряжениях, не превышающих предела упругости, выполняется уравнение:

$$\xi' = -\mu \xi;$$

$$\left| \frac{\xi'}{\xi} \right| = \mu,$$

где μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), который определяется экспериментально и изменяется в пределах от 0 – для пробки, до 0,5 – для резины; для стали $\mu = 0,3$.

Установлено, что когда напряжение в брус не превышает предела пропорциональности, выполняется условие

$$\xi = \frac{N}{EF}, \quad (2.10)$$

где E – коэффициент, зависящий от физических свойств материала (модуль упругости).

Параметр E , наряду с μ , характеризует упругие свойства материала. В системе СИ измеряется в паскалях [Па].

Для стали $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см²; для меди $E = 10^6$ кг/см²; для условного дерева $E = 10^5$ кг/см².

Произведение EF называется жесткостью поперечного сечения бруса а, учитывая что $\sigma = \frac{N}{F}$, уравнение (2.10) примет вид

$$\xi = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.11)$$

или

$$\sigma = \xi E. \quad (2.12)$$

Абсолютное удлинение бруса выражается зависимостью, полученной из (2.9) и (2.10):

$$\Delta l = \xi l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.11) – (2.13) являются математическим выражением закона Гука, который звучит так: абсолютная продольная деформация прямо пропорциональна продольной силе (при постоянной жесткости сечения EF); или относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению.

2.4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЙ БРУС

Определение: Брусья и шарнирно-стержневые системы, в которых внутренние усилия от заданной нагрузки можно определить с помощью уравнений равновесия, называются статически определенными.

Определение: Брусья и шарнирно-стержневые системы называются статически неопределимыми, если число неизвестных усилий (реакций в опорах) превышает число независимых уравнений статики.

Определение: Разность между числом неизвестных усилий и числом независимых уравнений статики называется степенью статической неопределимости.

При этом при расчете подобных задач необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения перемещений, учитывающие характер деформации системы (уравнения совместности деформаций).

Пример: Рассмотрим стержень, жестко защемленный с обеих сторон и нагруженный силой P (рис. 2.6). Под действием этой силы в опорах возникают реакции R_1 и R_2 .

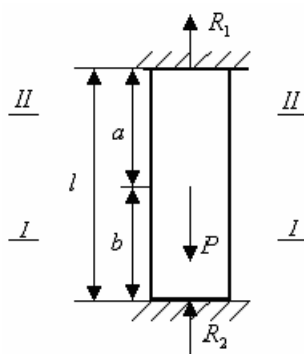


Рис. 2.6

Уравнение равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось будет иметь вид

$$R_1 + R_2 - P = 0. \quad (2.14)$$

В этом уравнении два неизвестных, следовательно, степень статической неопределимости системы равна единице.

Так как стержень жестко заделан по концам, то изменение длины стержня отсутствует:

$$\Delta l = 0, \quad (2.15)$$

или

$$\Delta a + \Delta b = 0. \quad (2.16)$$

При решении задачи используем метод сечений.

По закону Гука:

$$\Delta a = \frac{N_{II} a}{EF}; \quad (2.17)$$

$$\Delta b = \frac{N_I b}{EF}; \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{array}{l} I - I : N_I = -R_2; \\ II - II : N_{II} = P - R_2. \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

Решая совместно уравнения (2.16) – (2.19), получим:

$$\frac{(P - R_2)a}{EF} + \frac{-R_2b}{EF} = 0; \quad (2.20)$$

$$Pa - R_2l = 0;$$

$$R_2 = P \frac{a}{l}.$$

Реакцию R_1 можно определить, подставив полученную величину в уравнение (2.14):

$$R_1 = P \frac{b}{l}.$$

Направление неизвестных реакций R_1 и R_2 можно принимать произвольно. Если в результате расчета они получились положительными, то направление выбрано верно. Если они получились отрицательными, то необходимо изменить направление указанных реакций:

(2.14) – уравнение равновесия;

(2.15), (2.16) – геометрические уравнения совместности деформаций;

(2.17), (2.18) – физические уравнения данной задачи (закон Гука);

(2.20) – физическое уравнение совместности деформаций.

2.5. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

План решения статически неопределимых задач:

1. Составляем уравнения равновесия (2.21).
2. Определяем степень статической неопределимости.
3. Из чисто геометрических соображений составляем геометрическое уравнение совместности деформаций (2.22).
4. Пользуясь физическими законами, выражаем деформации, вошедшие в уравнение (2.22) через внутренние усилия и внешние силы (2.24).
5. Составляем физическое уравнение совместности деформаций. Для этого уравнение (2.24) подставляем в уравнение (2.22) и получаем зависимость (2.25).
6. Решаем совместно уравнения (2.21) и физическое уравнение совместности деформаций (2.25).

Пример. Жесткий брус AS соединен с жесткой опорой посредством шарнира в точке S . К нему прикреплены два стержня 1 и 2, также соединенные с опорой. К конструкции приложена внешняя сила P (рис. 2.7). Раскрыть статическую неопределимость от действия внешней нагрузки.

1. Составление расчетной схемы (рис. 2.8):

$$\sum F_H = 0; \quad R_H + N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_B = 0; \quad R_B + N_1 + N_2 \sin \alpha - P = 0;$$

$$\sum M_S = 0; \quad 2aN_1 - 3aP + 4aN_2 \sin \alpha = 0. \quad (2.21)$$

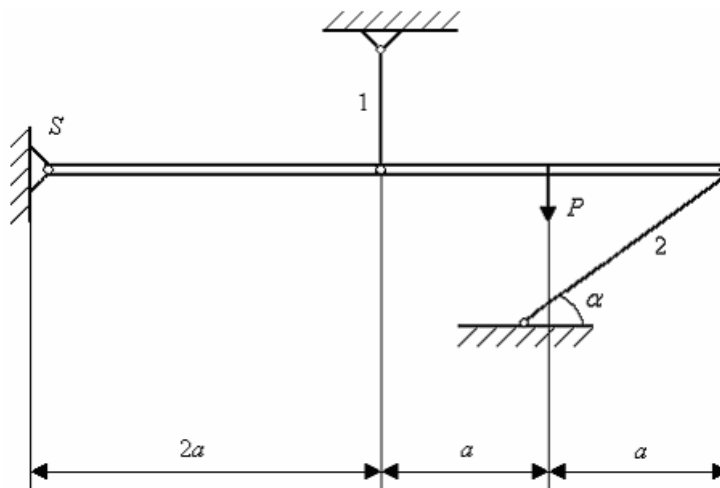


Рис. 2.7

Степень статической неопределимости равна единице:

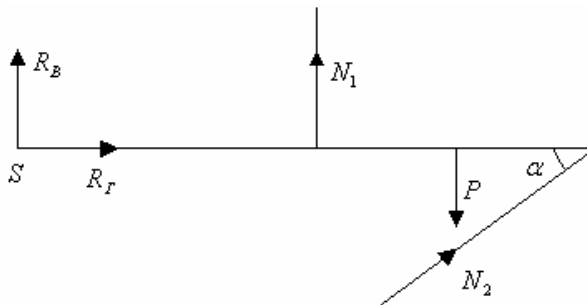


Рис. 2.8

Из уравнения (2.21) необходимо определить правильность направления реакций N_1 и N_2 .

Для симметричных схем: направления проекций на вертикальную ось реакций N_1 и N_2 и внешней силы P должны иметь разные знаки.

Для остальных схем: знаки моментов, создаваемых усилиями N_1 и N_2 , и внешней силой P в уравнении моментов относительно опоры должны быть противоположными.

2. Составление схемы деформации (рис. 2.9).

1) Показываем положение схемы в исходном положении:

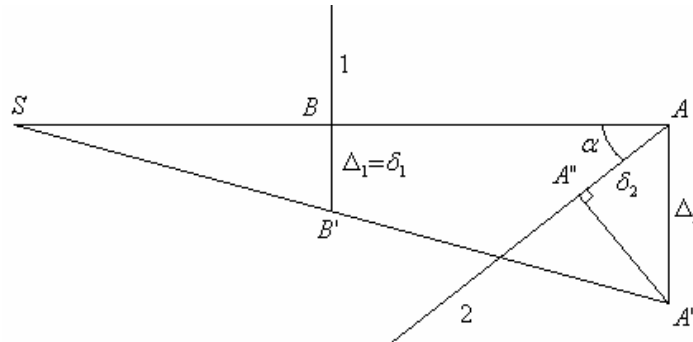


Рис. 2.9

2) Определяем, куда сместится жесткая балка от воздействия внешней силы, и показываем новое положение системы.

При этом необходимо сделать два допущения:

- жесткая балка не деформируется;
- перемещение точек приложения стержней A и B происходит не по дугам окружностей, а строго вертикально.

Вертикальные перемещения точек приложения стержней обозначим через Δ_1 и Δ_2 .

3) Из вновь полученных точек A' и B' опускаем перпендикуляры на линии действия стержней в исходном состоянии. Обозначим деформации стержней через δ_1 и δ_2 .

4) Находим соответствие между вертикальными перемещениями Δ_1 и Δ_2 (для симметричных схем – из условия неразрывности конструкции; для других схем – из подобия треугольников):

$$\Delta SBB' \sim \Delta SAA':$$

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{SB}{SA};$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}. \quad (2.22)$$

5) Выражаем вертикальные перемещения Δ_1 и Δ_2 через δ_1 и δ_2 :

$$\Delta_1 = \delta_1;$$

$$\Delta_2 = \frac{\delta_2}{\sin \alpha};$$

Подставим полученные выражения в уравнение (2.22):

$$\frac{\delta_1 \sin \alpha}{\delta_2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1}{2 \sin \alpha}. \quad (2.23)$$

3. Выражаем деформации стержней через внутренние усилия в них (закон Гука):

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \\ \delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

4. Составляем физическое уравнение совместности деформаций, подставив уравнение (2.24) в уравнение (2.23):

$$\frac{1}{2 \sin a} = \frac{N_1 l_1 E F_2}{N_2 l_2 E F_1}. \quad (2.25)$$

Длины стержней l_1 и l_2 известны. Если дано соотношение площадей F_1/F_2 , используя его, сокращаем площади.

Получено недостающее уравнение. Решая его совместно с уравнением (2.21), можно определить усилия N_1 и N_2 .

5. После определения N_1 и N_2 рассчитывают площади F_1 и F_2 в соответствии с соотношением, через $[\sigma_p]$ и $[\sigma_{сж}]$.

6. Производим проверку правильности решения.

1) В определенном масштабе откладываем длину бруса SBA (рис. 2.10).

2) В точках приложения стержней проводим их линии действия.

3) Откладываем вертикальные перемещения стержней в направлении, соответствующем схеме деформаций (в другом масштабе).

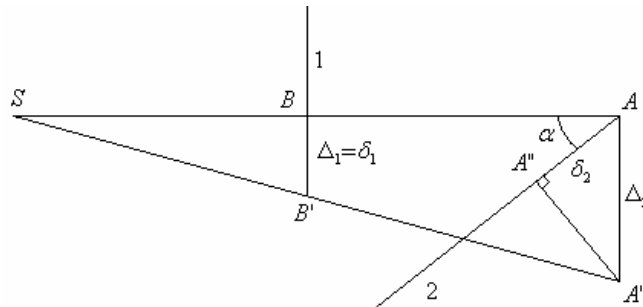


Рис. 2.10

Первая проверка: соединяем точки S , B' и A' . Полученная линия должна быть прямой, а не ломаной линией.

Вторая проверка: из полученных точек A' и B' проводим перпендикуляры на линии действия стержней в исходном состоянии. Получаем точки A'' и B'' . Измеренные величины BB'' и AA'' должны быть равны рассчитанным величинам δ_1 и δ_2 в выбранном масштабе деформации.

2.6. НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ОТ НЕТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Если хотя бы один из стержней шарнирно-стержневой системы выполнен не точно, т.е. его длина оказалась выше или ниже рассчитанной, то при сборке такой системы необходимо приложить дополнительные усилия. При этом все стержни системы после сборки будут подвергаться определенному силовому воздействию, даже при отсутствии внешних сил.

Если по условиям работы шарнирно-стержневой системы, выполненной точно, хотя бы один из стержней работает в условиях нагрева или охлаждения, то при этом происходит изменение его первоначальной длины (при нагреве – удлинение, при охлаждении – уменьшение первоначальной длины).

При решении подобных задач необходимо вначале определить величину температурной деформации, которая вычисляется по формуле

$$\Delta_t = \alpha l \Delta t,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала стержня; Δt – перепад температур (может быть как > 0 , так и < 0); l – длина стержня.

После определения температурной деформации данная задача решается подобно задачам, связанным с неточностью изготовления стержней.

Пример: В шарнирно-стержневой системе, состоящей из жесткого бруса и двух стержней, первый стержень выполнили короче на величину Δ (рис. 2.11). Раскрыть статическую неопределимость от неточности изготовления.

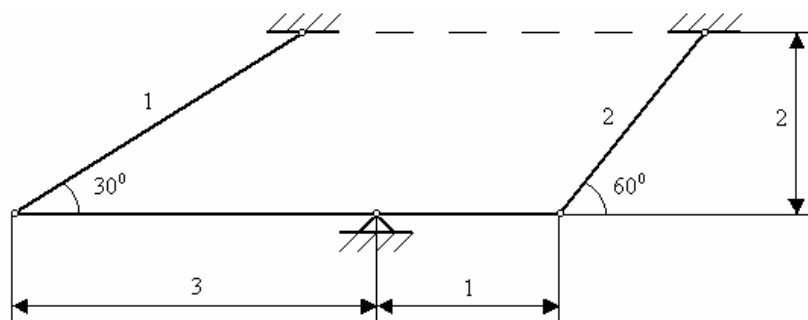


Рис. 2.11

1. Составление расчетной схемы (рис. 2.12).

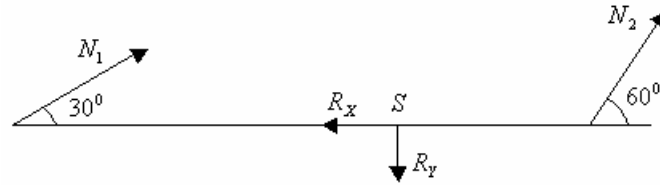


Рис. 2.12

Так как первый стержень выполнен короче, то при сборке системы его необходимо растянуть, т.е. внешнее усилие, приложенное к стержню – растягивающее. Реакция в этом стержне должна быть противоположна внешнему усилию.

Реакция во втором стержне должна уравнивать реакцию в первом стержне.

$$\sum F_x = 0, \quad N_1 \cos 30^\circ - R_x + N_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_1 \sin 30^\circ - R_y + N_2 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_S = 0, \quad -3N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0. \quad (2.26)$$

Проведем проверку правильности направления реакций:

Для симметричных схем: если имеется уравнение моментов, то знаки моментов должны быть противоположными.

Для остальных схем: в уравнении проекции на вертикальную ось знаки реакций должны быть противоположными.

Степень статической неопределимости равна единице.

2. Составление схемы деформаций (рис. 2.13).

1) Изображаем схему в исходном состоянии.

2) Мысленно отбрасываем стержень, выполненный точно (второй стержень). Так как первый стержень выполнен короче, то вертикальное перемещение точки A откладываем вверх.

3) Опустим из точки C перпендикуляр на линию действия стержня в исходном состоянии. Получим точку A' .

4) Проведем прямую CS и опустим вертикаль из точки B . Получим точку D . Если бы отсутствовал стержень 2, то брус занял бы положение CSD .

5) Так как стержень 2 реально присутствует и оказывает влияние на стержневую систему, то под его воздействием брус займет какое-то среднее положение между нейтральным ASB и крайним CSD .

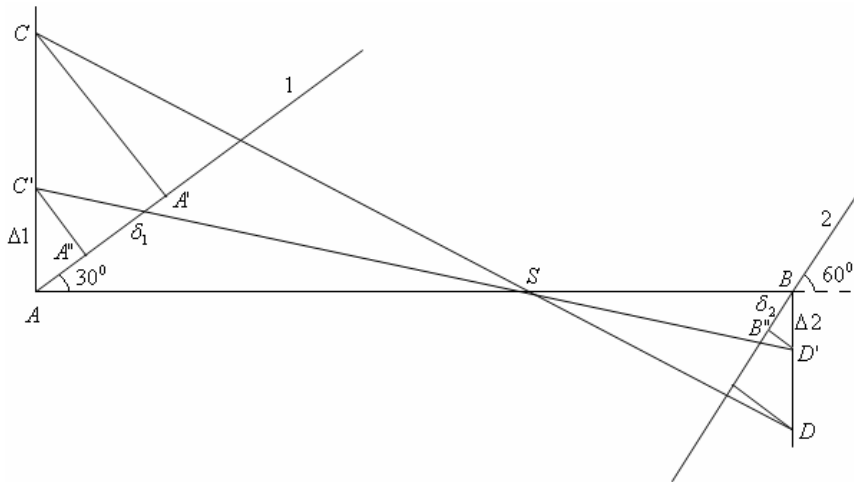


Рис. 2.13

Положение $C'SD'$ – реальное положение жесткого бруса. Реальное вертикальное перемещение первого стержня $AC' = \Delta 1$, второго стержня – $BD' = \Delta 2$.

6) Опустим перпендикуляры из точек реального положения бруса C' и D' на линии действия стержней в исходном состоянии. Получим точки A'' и B'' . При этом деформация второго стержня $BB'' = \delta_2$, первого стержня $A'A'' = \delta_1$.

Стержень 1 реально удлиняется при сборке на величину $A'A'' = \delta_1$, так как его первоначальное положение после изготовления оканчивалось в точке A' .

7) Ищем связь между вертикальными перемещениями $\Delta 1$ и $\Delta 2$ (подобно предыдущему разделу):

$$\triangle AC'S \sim \triangle SBD':$$

$$\frac{AC'}{BD'} = \frac{AS}{SB};$$

$$\frac{\Delta 1}{\Delta 2} = 3. \quad (2.27)$$

8) Выражаем вертикальное перемещение через деформации в стержнях.

Из $\triangle BD'B''$ и $\triangle AC'A''$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta 2 &= \frac{\delta_2}{\sin 60^\circ}; \\ \Delta 1 &= \frac{AA''}{\sin 30^\circ} = \frac{\Delta - \delta_1}{\sin 30^\circ}. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

$$AA' - A'A'' = AA''.$$

Подставим (2.28) в (2.27):

$$\frac{(\Delta - \delta_1) \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ \delta_2} = 3;$$

$$\Delta - \delta_1 = \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \delta_2;$$

$$\delta_1 - \delta_2 \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \Delta. \quad (2.29)$$

3. Составление физического уравнения совместности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \\ \delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Подставим (2.30) в (2.29):

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} + \frac{N_2 l_2}{EF_2} \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \Delta. \quad (2.31)$$

В подобных задачах площади F_1 и F_2 – заданы. Решая совместно уравнения (2.31) и (2.26) определим реакции N_1 и N_2 .

4. Произведем проверку правильности решения.

1) Откладываем брус ASB в определенном масштабе. В точках приложения стержней проводим их линии действия (рис. 2.13).

2) Откладываем вертикальные перемещения $\Delta 1$ и $\Delta 2$ в направлениях, соответствующих схеме деформаций (в масштабе деформаций).

Первая проверка: линия $C'SD'$ должна быть прямой.

3) Из точек C' и D' опускаем перпендикуляры на линии действия стержней.

Вторая проверка: измеренные величины $BB'' = \delta_2$, $AA'' = \Delta - \delta_1$ должны равняться рассчитанным значениям в соответствующем масштабе деформаций.

2.7. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Механические свойства материалов, т.е. величины, характеризующие их прочность, эластичность, модуль упругости и коэффициент Пуассона, определяются путем испытаний специальных образцов, изготовленных из исследуемого материала. Наиболее распространенными являются статические испытания на растяжение как более корректные, кроме некоторых строительных материалов, в основном работающих на сжатие.

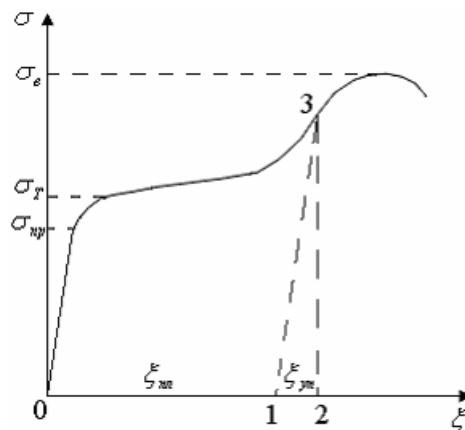


Рис. 2.14

На рис. 2.14 представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали. Пока растягивающее напряжение не достигнет величины $\sigma_{пр}$, диаграмма – прямая линия, т.е. до этого предела справедлив закон Гука. Это напряжение называется пределом пропорциональности. После этого деформации растут быстрее напряжений, пока не достигнут величины σ_t – предела текучести. Это явление называется текучестью материала, а участок диаграммы между $\sigma_{пр}$ и σ_t называется площадкой текучести. При этом отшлифованная поверхность образца становится матовой и на ней можно обнаружить линии, расположенные под углом 45° к оси образца, которые называются линиями Чернова. Текучесть сопровождается сдвигами в кристаллах стали. Следы этих сдвигов являются линии Чернова.

При дальнейшем растяжении напряжения начинают повышаться до достижения наивысшей точки кривой σ_b . Этот участок называется зоной упрочнения. Величина σ_b называется пределом прочности или временным сопротивлением. Эта величина представляет собой отношение наибольшей силы, которую выдерживает образец к его первоначальной площади сечения.

После этого при увеличении нагрузки на образце появляется местное сужение или шейка, в пределах которой и происходит затем разрыв образца.

Если образец нагрузить растягивающей силой, не превышающей предела пропорциональности, а затем разгрузить, то деформация образца будет уменьшаться по тому же закону, по которому она увеличивалась при нагружении и полная деформация образца будет равна нулю. Следовательно, возникают упругие деформации.

Если образец нагружен выше предела пропорциональности, то при его разгрузке деформации полностью не исчезают. Его суммарная деформация состоит из упругой – $\Delta\epsilon$ и пластической – $\epsilon_{пл}$. При повторном нагружении линия нагрузки будет идти не по кривой 03 , а по прямой 13 , т.е. предел пропорциональности повышается до того напряжения, до которого образец был ранее нагружен. Это явление называется наклепом. Для его устранения используется отжиг металла.

Материалы, разрушению которых предшествует возникновение значительных пластических деформаций, называются пластичными. Степень пластичности материала характеризуется относительным остаточным удлинением и относительным остаточным сужением шейки образца.

Многие пластичные материалы не имеют на своих диаграммах площадки текучести (рис. 2.15). Для них вводится понятие условного предела текучести – напряжение, соответствующее остаточной деформации в размере $0,2\%$ и обозначается $\sigma_{0,2}$.

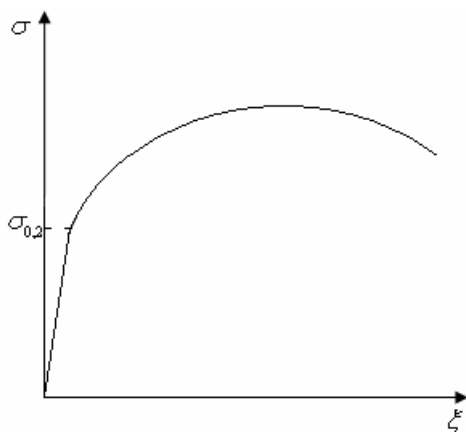


Рис. 2.15

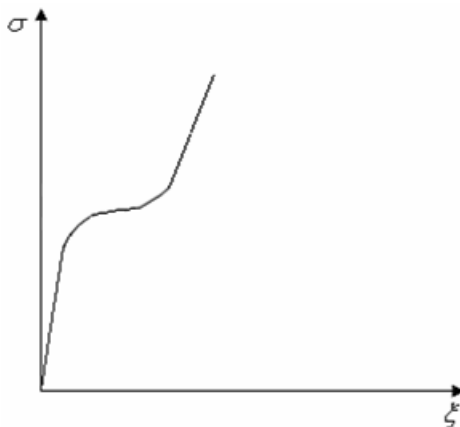


Рис. 2.16

При разрыве образцов из хрупких материалов шейка не образуется, и растягивающее усилие растет до момента разрушения.

Диаграмма сжатия пластичной стали изображена на рис. 2.16. При сжатии образец расплющивается, как следствие увеличиваются площадь сечения, сжимающие силы и условные напряжения. Понятие предела прочности при этом лишено смысла.

Пределы текучести при растяжении и сжатии одной и той же стали практически одинаковы.

На рис. 2.17 изображена диаграмма сжатия хрупкого металла. При достижении σ_b происходит разрушение образца. Эта диаграмма по виду очень похожа на диаграмму растяжения образца, но предел прочности при растяжении ниже. Материалы, обладающие различными механическими свойствами в различных направлениях, называются анизотропными (например, дерево).

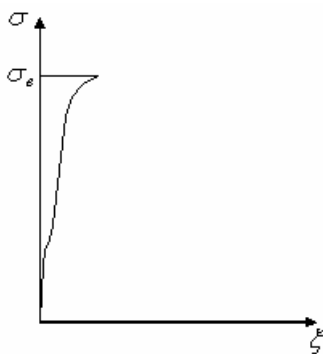


Рис. 2.17

2.8. РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Построим диаграмму растяжения стального бруса силой P (рис. 2.18).

Пусть в момент времени t имеется усилие P и деформация δ . Через время dt сила получила приращение dP , а деформация – $d\delta$. Тогда работа силы P на перемещении $d\delta$ равна

$$Pd\delta = dA,$$

т.е. работа равна площади dS .

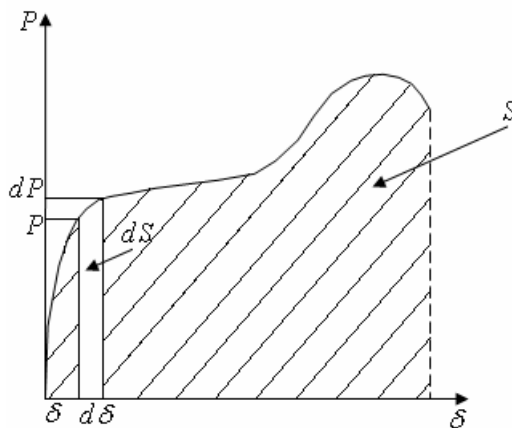


Рис. 2.18

Полная работа может быть получена интегрированием:

$$A = \int Pd\delta = \int_{P=0}^{P=P_{\max}} dS = S,$$

т.е. площади диаграммы растяжения.

Если напряжение в брус не превышает предела пропорциональности, то величина S – это площадь треугольника, имеющего высоту P и основание δ , причем по закону Гука:

$$\delta = \frac{Pl}{EF};$$

$$A = P \frac{\delta}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (2.31)$$

Известно, что

$$\sigma = \frac{P}{F} \Rightarrow P = \sigma F. \quad (2.32)$$

Подставим (2.32) в (2.31):

$$A = \frac{\sigma^2 Fl}{2E}.$$

При напряжениях, не превышающих предела пропорциональности, изменение теплового состояния материала незначительно и им можно пренебречь, поэтому вся работа внешней силы, на основании закона сохранения энергии, накапливается в материале в виде потенциальной энергии деформации. В процессе разгрузки эта энергия расходуется на восстановление

его первоначальных форм и размеров. Таким образом, упругое тело обладает способностью запасать (аккумулировать) энергию:

$$U = A.$$

При напряжениях, не превышающих предела пропорциональности, имеет место следующая зависимость:

$$U = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\sigma^2 Fl}{2E},$$

а так как объем материала

$$V = Fl,$$

то

$$U = \frac{\sigma^2 V}{2E}. \quad (2.33)$$

Разделив обе части уравнения (2.33) на V , получим количество потенциальной энергии, приходящейся на единицу объема бруса или удельную потенциальную энергию деформации:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

При этом U измеряется в Дж, u в Дж/м³.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

3.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Поперечное сечение бруса можно охарактеризовать его размерами и площадью сечения.

Площадь – простейшая геометрическая характеристика поперечного сечения.

Если представить сечение состоящим из бесчисленного множества элементарных площадок dF (рис. 3.1), то площадь всего сечения

$$F = \int dF, \text{ см}^2. \quad (3.1)$$

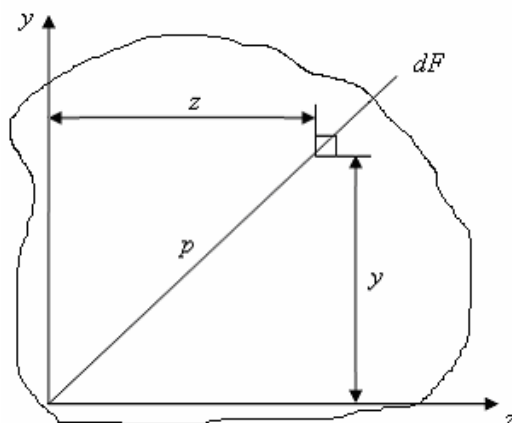


Рис. 3.1

Однако, две фигуры, например круг и квадрат, с одинаковой площадью по-разному воспринимают действие изгибающей нагрузки и крутящего момента.

Для более полной характеристики сечения вводится понятие моментов. Выражения этих характеристик отличаются от выражения (3.1) тем, что у них под знак интеграла входят произведения элементарных площадок на функции координат этих площадок (y, z, p). Таким образом, указанные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, но и от положения осей и полюсов, относительно которых они вычисляются.

Определение: Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади F , сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояние до этой оси.

$$S_y = \int_F z dF; \quad S_z = \int_F y dF, \text{ см}^3.$$

Свойство: Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси.

Найдем зависимость между статическими моментами одного и того же сечения относительно параллельных осей z и z' (рис. 3.2). В соответствии с определением

$$S_z = \int_F y dF; \quad S_{z'} = \int_F y' dF.$$

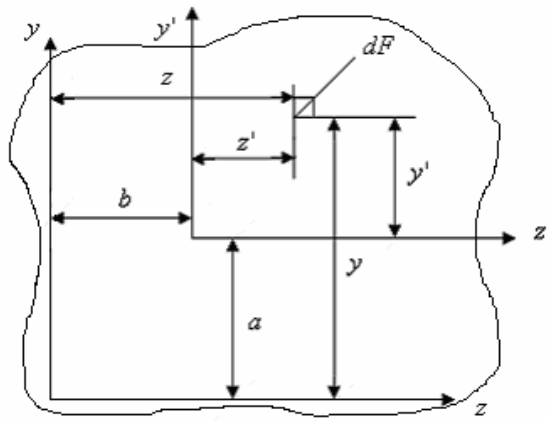


Рис. 3.2

Однако, согласно построению:

$$y' = y - a;$$

$$S_{z'} = \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - a \int_F dF = S_z - aF. \quad (3.2)$$

Аналогично:

$$S_{y'} = S_y - bF. \quad (3.3)$$

Определим положение осей y_1 и z_1 , относительно которых статические моменты равны нулю (рис. 3.3).

Для этого приравняем к нулю выражения (3.2) и (3.3):

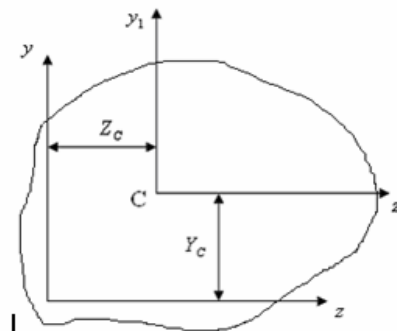


Рис. 3.3

$$\left. \begin{aligned} S_z - y_c F &= 0 \\ S_y - z_c F &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_z}{F} \\ z_c &= \frac{S_y}{F} \end{aligned} \right\}. \quad (3.4)$$

Точка пересечения осей y_1 и z_1 (точка C) является центром тяжести сечений.

Оси, проходящие через центры тяжести сечения, называются центральными осями.

Свойство центральных осей: относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, статический момент равен нулю.

Формулы (3.4) используют для определения положения центра тяжести сечения.

Определение: Осевым (экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади F , сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой оси.

$$I_y = \int_F z^2 dF; \quad I_z = \int_F y^2 dF, \quad \text{см}^4. \quad (3.5)$$

Центробежный момент инерции

$$I_{yz} = \int_F yz dF, \quad \text{м}^4.$$

Полярный момент инерции

$$I_{\rho} = \int_F \rho^2 dF, \text{ м}^4.$$

Если полюс при составлении полярного момента инерции совпадает с началом координат, то в соответствии с рис. 3.1:

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

$$I_{\rho} = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF = I_z + I_y, \quad (3.6)$$

т.е. сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей, равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей.

3.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

1. Прямоугольник.

Рассмотрим прямоугольник с высотой h и основанием b относительно осей, проходящих через его центр тяжести (рис. 3.4).

Выделим из прямоугольника линиями, параллельными оси z , элементарную полоску с высотой dy и шириной b . Площадь этой элементарной полоски

$$dF = bdy.$$

Подставив полученное значение в зависимость (3.5) вместо dF , получим

$$I_z = \int_F y^2 bdy.$$

Пределы интегрирования по оси y будут изменяться от $-h/2$ до $h/2$:

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 bdy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

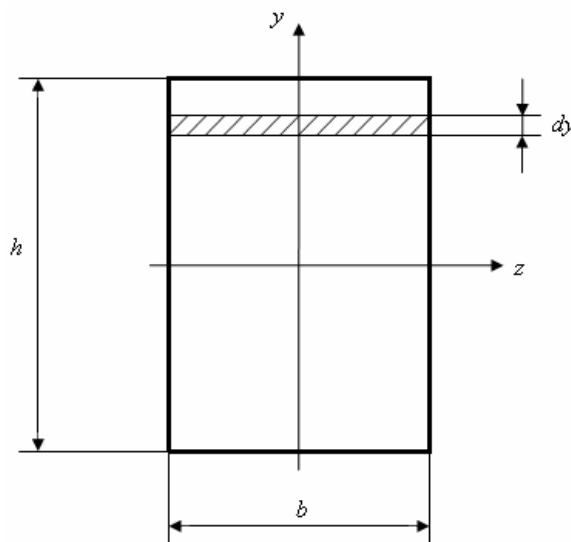


Рис. 3.4

Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю, так как они – главные.

2. Треугольник.

Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием b и высотой h (рис. 3.5).

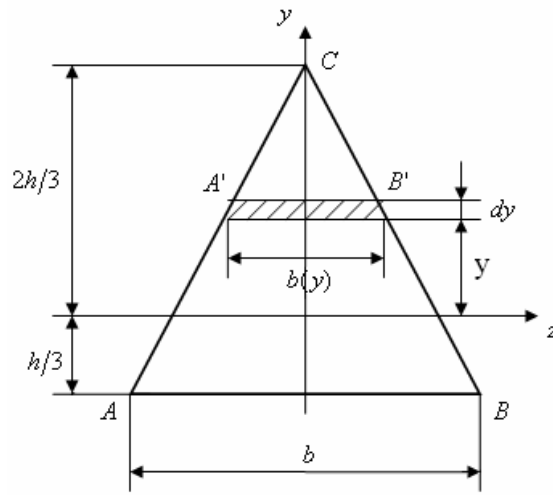


Рис. 3.5

Для него центр тяжести расположен на расстоянии $h/3$ от основания. Выделим из него линиями, параллельными оси z на расстоянии y от этой оси, элементарную полоску высотой dy . Основание этой полоски равно $b(y)$.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобные:

$$\frac{b(y)}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h} \Rightarrow b(y) = \frac{\left(\frac{2h}{3} - y\right)b}{h}.$$

Площадь элементарной полоски

$$dF = b(y)dy = \frac{\left(\frac{2h}{3} - y\right)b}{h} dy.$$

Согласно определению

$$I_z = \int_F y^2 dF = \int_F y^2 \frac{\left(\frac{2h}{3} - y\right)b}{h} dy.$$

Пределы интегрирования по оси y будут изменяться от $-h/3$ до $2h/3$:

$$I_z = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \frac{\left(\frac{2h}{3} - y\right)b}{h} dy.$$

Умножим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на 3:

$$I_z = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \frac{(2h-3y)b}{3h} dy = \frac{b}{3h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 (2h-3y) dy = \frac{b}{3h} \left(2h \frac{y^3}{3} - 3 \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36}.$$

Данное выражение справедливо и для неравностороннего треугольника.

3. Круг.

Определим полярный момент инерции круга (рис. 3.6).

Выделим из круга двумя кольцевыми сечениями с радиусами r и $r + dr$ элементарное кольцо. Площадь его будет равна

$$dF = 2\pi r dr.$$

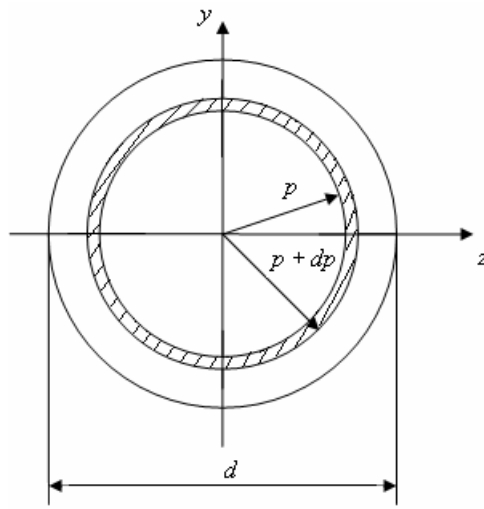


Рис. 3.6

Согласно определению:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F 2\pi\rho^3 d\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Так как круг – фигура симметричная, то

$$I_y = I_z.$$

Однако, в соответствии с (3.6).

$$I_p = I_y + I_z \Rightarrow I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

3.3. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Часто при решении задач необходимо определять моменты инерции сечения, относительно осей, различным образом ориентированных в его плоскости. При этом удобно использовать уже известные моменты инерции всего сечения, относительно других осей, поэтому важно установить зависимости между моментами инерции одного и того же сечения, относительно других осей.

Переход от одной системы координат в другую можно рассматривать как два самостоятельных преобразования: 1) путем параллельного переноса осей координат в новое положение; 2) путем их поворота относительно нового начала координат.

Получим формулы изменения моментов инерции при параллельном переносе оси координат.

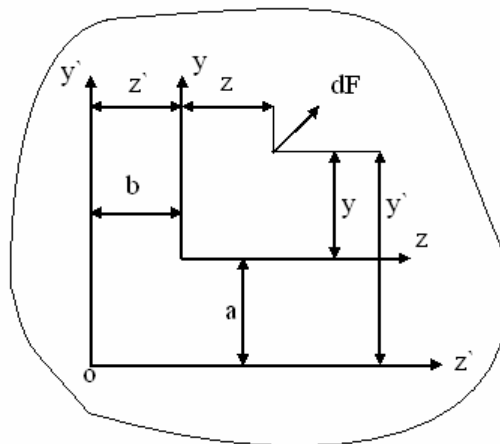


Рис. 3.7

Пр и м е р . Пусть дано: F, y_0z – центральная система координат, ось $y'0'$ параллельна $0y$, $0'z'$ параллельна $0z$, a, b, I_z, I_y, I_{yz} (рис. 3.7).

Необходимо определить: $I_{z'}, I_{y'}, I_{z'y'}$.

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_F y'^2 dF = \int_F (a + y)^2 dF = \int_F (a^2 + y^2 + 2ay) dF = \\ &= a^2 \int_F dF + \int_F y^2 dF + a \int_F y dF = a^2 F + I_z, \end{aligned} \quad (3.7)$$

так как оси y_0z – центральные (смотри свойства центральных осей).

Аналогично:

$$I_{z'y'} = I_y + b^2 F . \quad (3.8)$$

Для случая центробежного момента инерции

$$\begin{aligned} I_{y'z'} &= \int_F y'z' dF = \int_F (a+y)(b+z) dF = \int_F abdF + \int_F azdF + \int_F ybdF + \int_F yzdF = \\ &= ab \int_F dF + a \int_F zdF + b \int_F ydF + \int_F yzdF = abF + I_{yz} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

В формулах (3.7) – (3.9) a и b – координаты новой системы координат, относительно имевшейся.

3.4. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Получим зависимости изменения моментов инерции при повороте осей на угол α .

Пример. Пусть дано: F – площадь; yOz – центральная система координат; α – угол, характеризующий положение, новой центральной системы координат I_y, I_z, I_{yz} (рис. 3.8).

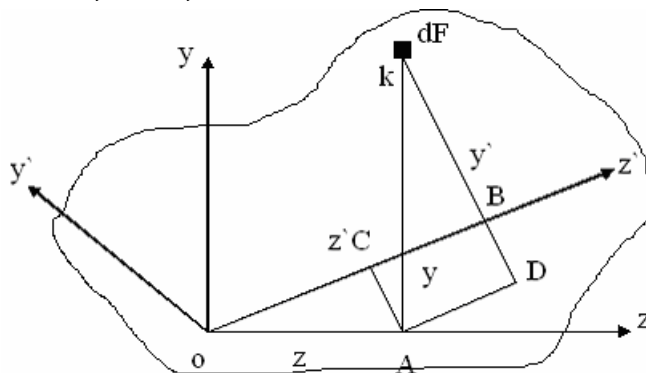


Рис. 3.8

Необходимо определить: $I_{z'}, I_{y'}, I_{z'y'}$.

Опустим перпендикуляры из точки K на оси z и z' , тогда $KA = y, KB = y', OA = z, OB = z'$. Опустим перпендикуляры из точки A на ось z' и прямую KB .

$$\Delta OAC : OC = z \cos \alpha, AC = BD = z \sin \alpha ;$$

$$\Delta KAD : KD = y \cos \alpha, AD = BC = y \sin \alpha .$$

В соответствии с рис. 3.8:

$$z' = OB = OC + BC = z \cos \alpha + y \sin \alpha ;$$

$$y' = KB = KD - BD = y \cos \alpha - z \sin \alpha .$$

По определению

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_F (y')^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \int_F (y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \sin^2 \alpha - 2yz \cos \alpha \sin \alpha) dF = \\ &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично:

$$I_{y'} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha . \quad (3.11)$$

Для случая центробежного момента инерции

$$I_{y'z'} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha .$$

Свойства моментов инерции:

1. Из формул (3.7), (3.8) следует, что из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции относительно оси, проходящий через центр тяжести сечения, имеет наименьшее значение.

2. Если сложить левые и правые части формул (3.10) и (3.11), то получим $I_{y'} + I_{z'} = I_y + I_z$, т.е. сумма осевых моментов инерции, относительно двух взаимно перпендикулярных осей, сохраняет свою величину при повороте осей на любой угол.

3.5. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

При расчетах на прочность жесткость и устойчивость требуется знать, при каком значении α момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей приобретает наибольшее и наименьшее значение. Эти экстремальные значения осевых моментов инерции сечения называется главными моментами инерции.

Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются главными осями инерции. Данные оси взаимно перпендикулярны.

Для нахождения главных моментов инерции используется известный из математики прием отыскания экстремума функции. Возьмем первую производную от выражения, представляющего собой момент инерции относительно оси y' или z' по углу α :

$$\begin{aligned}\frac{dI_{z'}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha) = \\ &= -2I_z \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{yz} \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к нулю и запишем его в виде

$$-(I_z - I_y) \sin 2\alpha_0 - 2I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

где α_0 – угол, на который надо повернуть оси y и z , чтобы они совпали с главными осями. Решая полученное уравнение относительно угла α_0 , получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (3.12)$$

Главные оси обычно обозначают через U и V , и они обладают следующими свойствами: 1) главные оси взаимно перпендикулярны; 2) относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю; 3) относительно них моменты инерции имеют экстремальные значения. Главные моменты инерции определяется по формулам, соответствующим повороту центральных осей на угол α_0 :

$$I_v = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_u = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0.$$

Если для сечения $I_y > I_z$, то $I_u = I_{\max}$, а $I_v = I_{\min}$.

Уравнению (3.12) в каждом конкретном случае удовлетворяет ряд значений α_0 . Из них выбирается одно любое, если оно положительно, то для определения по нему положения одной из главных осей, ось z , следует повернуть на угол α_0 , против часовой стрелки, а если отрицательный – по часовой стрелке, другая главная ось инерции перпендикулярна первой.

4. ИЗГИБ

4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

При центральном растяжении-сжатии и кручении прямых брусков их оси остаются прямыми и после возникновения деформаций. В отличие от этих видов нагружения при изгибе происходит искривление осей прямых брусков.

I. *Классификация по наличию действующих силовых факторов*: а) чистый изгиб, когда в поперечном сечении бруса действует только изгибающий момент; б) поперечный изгиб, когда наряду с изгибающим моментом действует перерезывающая сила.

II. *По направлению воздействия внешних силовых факторов*: а) прямой изгиб, когда плоскость действия внешних сил и моментов совпадает с плоскостью, проходящей через одну из главных центральных осей инерции сечений; б) косой изгиб, когда плоскость действия внешних сил и моментов не совпадает с плоскостями, проходящими через одну из главных центральных осей инерции сечения.

Определение: Стержень, преимущественно работающий на изгиб, называется балкой.

Частный вид балки – консоль, когда один ее конец жестко закреплен (рис. 4.1).

Внешние силовые факторы при изгибе:

1. сосредоточенная сила (поперечная, перерезывающая) P , т; кг; Н;
2. изгибающий момент M , т·м;
3. распределенная нагрузка q , Н/м.

Правило знаков: поперечная сила Q_y в произвольном сечении численно равна сумме проекций всех внешних, действующих по одну сторону от проведенного сечения на ось, перпендикулярную оси балки. Q_y положительна, если внешние силы стремятся повернуть рассматриваемую часть относительно центра тяжести проведенного сечения по часовой стрелке (рис. 4.2).

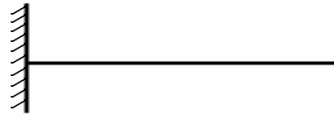


Рис. 4.1

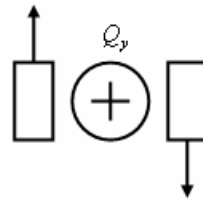


Рис. 4.2

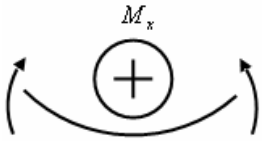


Рис. 4.3

Изгибающий момент M_x в произвольном сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно центра тяжести этого сечения. M_x положителен, если балка изгибается выпуклостью вниз (рис. 4.3).

4.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим на примере порядок построения эпюр при поперечном изгибе (рис. 4.4).

Пример. Дано: $q = 1$ т/м; $P = 2$ т; $M = 2$ т·м.

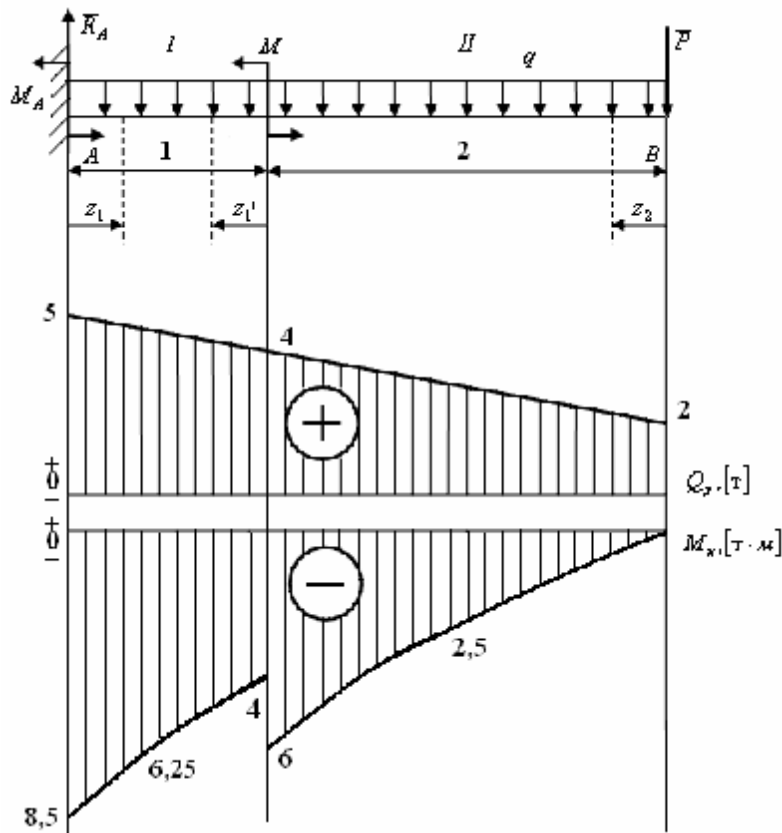


Рис. 4.4

Определение реакций в опорах:

$$\sum F_{\text{верт}} = 0;$$

$$R_A - P - q \cdot 3 = 2 + 1 \cdot 3 = 5 \text{ т.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_A + M - P \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0.$$

$$M_A = -M + 3 \cdot P + 4,5 \cdot q = -2 + 3 \cdot 2 + 4,5 \cdot 1 = 8,5 \text{ т·м.}$$

Проверка правильности определения реакций: в качестве проверочного уравнения моментов нельзя составлять уравнения относительно любой из опор конструкции:

$$\sum M_B = 0;$$

$$\sum M_B = q \cdot 3 \cdot 1,5 + M_A + M - R_A \cdot 3 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Первый способ решения задачи.

$$I: Q_y = R_A - q \cdot z_1; \quad 0 \leq z_1 \leq 1$$

$$Q_y(0) = R_A = 5 \text{ т};$$

$$Q_y(1) = R_A - q \cdot 1 = 4 \text{ т};$$

$$M_x = -M_A + R_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}.$$

Любой силовой фактор, лежащий в конце участка, в уравнения сил и моментов не входит:

$$M_x(0) = -M_A = -8,5;$$

$$M_x(1) = -8,5 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1^2}{2} = -4 \text{ т·м};$$

$$M_x(0,5) = -8,5 + 5 \cdot 0,5 - 1 \cdot \frac{0,5^2}{2} = -6,125 \text{ т·м}.$$

Проверка правильности решения эпюры изгибающих моментов: на участке действия кривой распределенной нагрузки выпуклость эпюры M_x должна быть направлена навстречу распределенной нагрузке.

$$II: Q_y = P + q \cdot z_2, \quad 0 \leq z_2 \leq 2$$

$$Q_y(0) = P = 2 \text{ т};$$

$$Q_y(2) = 2 + 1 \cdot 2 = 4 \text{ т};$$

$$M_x(0) = -P \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2};$$

$$M_x(0) = 0;$$

$$M_x(2) = -2 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{2^2}{2} = -6 \text{ т·м};$$

$$M_x(1) = -2 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1^2}{2} = -2,5 \text{ т·м}.$$

Проверка правильности построения эпюр.

1. Любой скачок на эпюре Q_y должен быть равен сосредоточенной силе, приложенной в этом сечении.

2. Любой скачок на эпюре M_x должен быть равен сосредоточенному моменту, приложенному в этом сечении.

Второй способ решения задачи:

В консольной балке можно на каждом участке двигаться навстречу к жесткой заделке, при этом силовые факторы, расположенные в этой заделке, можно не рассчитывать, но на каждом участке двигаться по направлению к заделке. Для первого участка, при движении справа:

$$Q_y = q \cdot z'_1 + P + q \cdot 2.$$

$$M_x = -P(z + z'_1) - q(z + z'_1) \frac{(z + z'_1)}{2} + M.$$

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Выделим из балки, находящейся под действием системы сил, бесконечно малый элемент двумя поперечными сечениями, отстоящими на расстоянии dz друг от друга (рис. 4.5). Слева действуют внутренние усилия Q_y и M_x , справа $Q_y + dQ_y$ и $M_x + dM_x$, а также на всем протяжении элемента распределенная нагрузка $q(z)$.

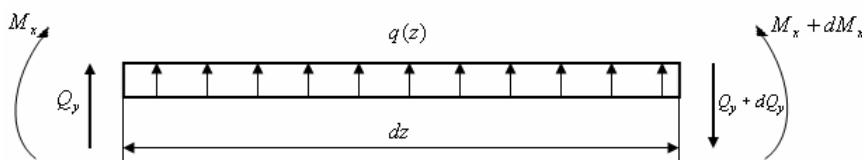


Рис. 4.5

Составим уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций на вертикальную ось:

$$Q_y + q(z) dz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$q(z) dz - dQ_y = 0;$$

$$q(z) = \frac{dQ_y}{dz}. \quad (4.1)$$

Первая производная от поперечной силы по абсциссе z равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки.

Составим уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов всех сил относительно точки O :

$$-M_x + (M_x + dM_x) - (Q_y + dQ_y) dz + q(z) \frac{dz^2}{2} = 0;$$

$$dM_x - Q_y dz - dQ_y dz + q(z) \frac{dz^2}{2} = 0.$$

Отбрасываем бесконечно малые величины второго порядка:

$$-dQ_y dz \text{ и } q(z) \frac{dz^2}{2};$$

$$dM_x - dQ_y dz = 0;$$

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \quad (4.2)$$

С учетом выражения (4.1), имеем

$$q(z) = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Вторая производная от поперечной силы по абсциссе z равна интенсивности распределенной нагрузки перпендикулярной оси балки.

Особое значение имеет формула (4.2), так как она позволяет исследовать эпюру M_x на экстремум.

4.4. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ ИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

1. Тангенс угла между касательной к линии ограничивающей эпюру M_x и нулевой линией равен перерезывающей силе Q_y .

2. На тех участках балки, где поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает, а на участках, где она отрицательна – изгибающий момент убывает.

3. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q_y , тем круче линия, ограничивающая эпюру M_x . Следовательно, на участке балки с возрастающими в алгебраическом смысле значениями Q_y , линия, ограничивающая эпюру M_x , обращена выпуклостью вверх.

4. На участке балки, где поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра M_x ограничена прямой линией.

5. Если на границе соседних участков балки эпюра Q_y не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру M_x на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную.

6. Если на границе соседних участков балки в эпюре Q_y имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру M_x на этих участках, сопрягаются с переломом, т.е. не имеют в точке сопряжения общей касательной.

7. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в тех сечениях балки, где Q_y равно нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру M_x , в этом сечении параллельна оси эпюры.

8. На участках действия распределенной нагрузки q поперечные силы изменяются по длине балки; эпюры M_x на этих участках ограничены кривыми.

9. На тех участках балки, где распределенная нагрузка отсутствует, поперечные силы постоянны, а изгибающие моменты меняются по линейному закону.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Рассмотрим случай возникновения чистого изгиба, т.е. когда в поперечном сечении действует только изгибающий момент M_x .

Так как $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$, то на участке чистого изгиба $Q_y = 0$, а изгибающий момент имеет постоянное значение. (Средняя часть балки) (рис. 4.6).

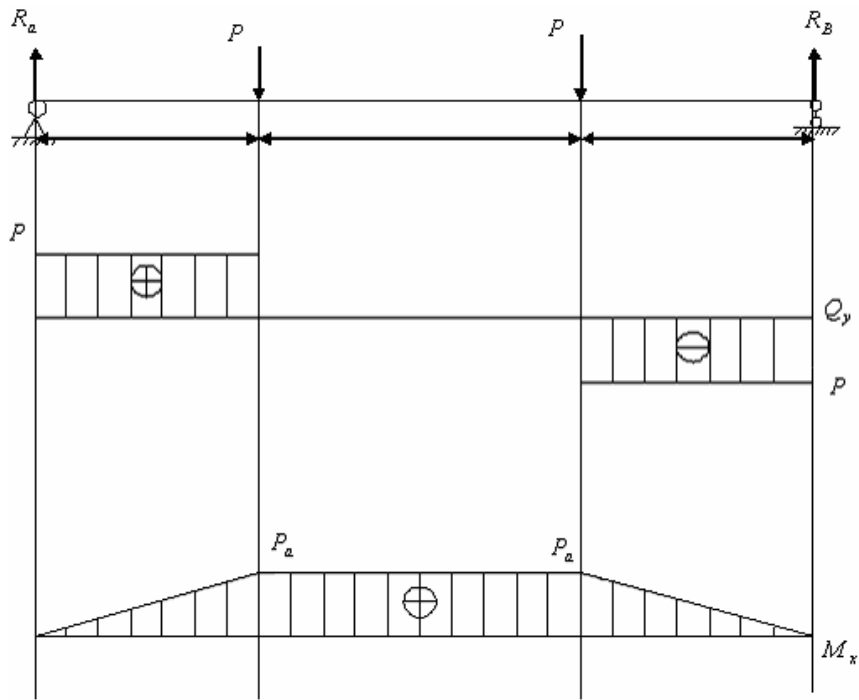


Рис. 4.6

Основные выводы из опытов на чистый изгиб

Разобьем элемент на ряд бесконечно малых полосок (рис. 4.7).

Каждый физический элемент (полоску) параллельную оси балки будем называть волокном.

1. При чистом изгибе часть волокон испытывает деформацию простого растяжения, а другая часть – простого сжатия. Волокна, расположенные между ними и не испытывающие деформаций удлинения, называются нейтральными волокнами.
2. Соседние волокна не оказывают давления друг на друга.
3. *Гипотеза плоских сечений.* Поперечные сечения в процессе деформации остаются плоскими и только поворачиваются вокруг оси, расположенной в нейтральном слое (вокруг нейтральной оси).

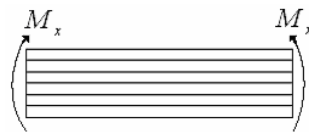


Рис. 4.7

Следствие: Волокна, равноотстоящие от нейтрального слоя, деформируются одинаково.

Выделим из балки, находящейся в условиях чистого изгиба, бесконечно малый элемент длиной dz сечениями, перпендикулярными оси балки (рис. 4.8).

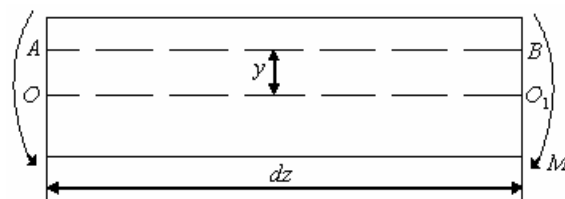


Рис. 4.8

OO_1 – нейтральное волокно в недеформируемом состоянии:

$$OO_1 = AB = dz .$$

Под воздействием момента M произойдет деформация элемента (рис. 4.9). Согласно первому выводу из опытов на чистый изгиб нейтральное волокно не деформируется и необходимо определить деформацию волокна AB находящегося на расстоянии y от нейтральной оси.

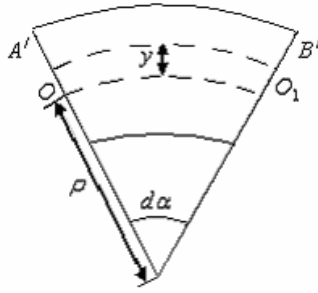


Рис. 4.9

Относительная деформация волокна AB :

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB}, \quad (4.3)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального волокна.

$$dz = \rho d\alpha.$$

Тогда $OO_1 = AB = \rho d\alpha$;

$$A'B' = (\rho + y) d\alpha.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (4.3):

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}.$$

Согласно закону Гука,

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Тогда

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (4.4)$$

физическое уравнение совместности деформаций. (Закон распределения напряжений по высоте балки).

Свяжем напряжение σ с внутренними силовыми факторами, возникающими в поперечном сечении при чистом изгибе. Пусть на бесконечно малый элемент, находящийся на расстоянии x и y от соответствующих осей, действует напряжение σ (рис. 4.10).

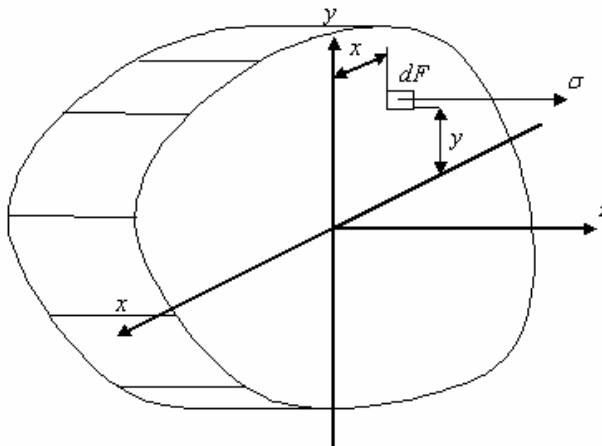


Рис. 4.10

Запишем уравнение равновесия в виде суммы проекций на оси координат.

$$\sum F_y = 0;$$

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum F_z = 0; \quad \int_F \sigma dF = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение моментов относительно осей:

$$\sum M_y = 0; \quad \int_F \sigma x dF = 0; \quad (4.6)$$

$$\sum M_x = 0; \int_F \sigma y dF = 0; \quad (4.7)$$

$$\sum M_z = 0.$$

Будем решать совместно уравнения (4.4) – (4.7), подставляя уравнение (4.4) в уравнения (4.5) – (4.7) последовательно:

$$\int_F \sigma dF = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_F y dF = \frac{E}{\rho} S_x = 0.$$

S_x равен нулю, так как оси x и y – центральные;

$$\int_F \sigma x dF \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_F xy dF = \frac{E}{\rho} I_{xy} = 0,$$

I_{xy} равен нулю, согласно свойству главных центральных осей;

$$\int \sigma y dF = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int y^2 dF = \frac{E}{\rho} I_x = M_x,$$

или $\frac{E}{\rho} = \frac{M_x}{I_x}.$

Подставим в уравнение (4.4):

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Общий вид эпюры нормальных напряжений при изгибе показан на рис. 4.11.

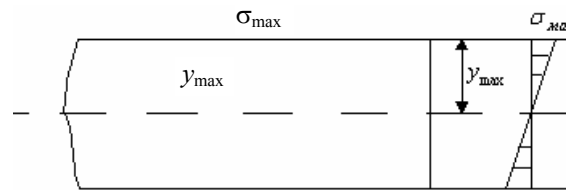


Рис. 4.11

В данной формуле M_x – изгибающий момент в сечении; I_x – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси x ; y – расстояние от рассматриваемой точки сечения до нейтральной оси. Данная зависимость линейная. Максимальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}. \quad (4.8)$$

4.6. ПОДБОР СЕЧЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Необходимо построить эпюры Q_y и M_x и определить максимальное абсолютное значение $|M_x^{\max}|$. В формуле (4.8)

величина $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ называется моментом сопротивления при изгибе. Таким образом, условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x^{\max}|}{W_x} \leq [\sigma],$$

или $W_x \geq \frac{|M_x^{\max}|}{[\sigma]};$

1) для прямоугольника:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

2) для квадрата:

$$I_x = \frac{a^4}{12}; \quad y_{\max} = \frac{a}{2}; \quad W_x = \frac{a^3}{6}.$$

3) для круга:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad y_{\max} = \frac{d}{2}; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

4) для кольца:

$$I_x = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4); \quad y_{\max} = \frac{d}{2}; \quad W_x = \frac{\pi}{32d}(d^4 - d_0^4).$$

Для стандартных профилей значения W_x берутся из сортамента.

4.7. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

При чистом изгибе в поперечном сечении бруса действует только изгибающий момент и, следовательно, возникают только нормальные напряжения.

В случае поперечного изгиба в сечении бруса действуют наряду с изгибающими моментами перерезывающие силы Q_y . В связи с этим в поперечных сечениях возникают не только нормальные напряжения, но и касательные напряжения τ . Их возникновение сопровождается появлением угловых деформаций, поэтому каждая элементарная площадка получает угловые смещения, обусловленные сдвигом.

Касательные напряжения распределены по сечению неравномерно, поэтому угловые смещения также распределяются по сечению неравномерно. В связи с этим при поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, поперечные сечения не остаются плоскими.

Однако на величине нормальных напряжений искажение плоскости поперечных сечений сказывается незначительно, поэтому гипотезу плоских сечений можно считать применимой и при поперечном изгибе.

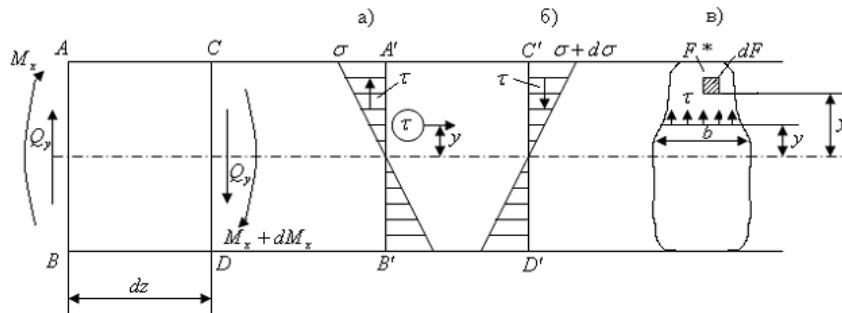


Рис. 4.12

Определим приблизительно касательные напряжения τ при поперечном изгибе. Для этого выделим из бруса элемент длиной dz .

На левую часть элемента действует изгибающий момент M_x , на правую – изгибающий момент $M_x + dM_x$, а также перерезывающая сила Q_y . В левой части сечения действует нормальное напряжение σ и касательное τ (рис. 4.12, а). На правую часть сечения действует нормальное напряжение $\sigma + d\sigma$ и касательное τ (рис. 4.12, б).

Повернутое на 90° левое сечение ("лицом" к нам) показано на рис. 4.12, в. Разделим элемент на рис. 4.12, в продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси, и рассмотрим условие равновесия верхней отсеченной части.

Равнодействующая нормальных сил в левом сечении в пределах отсеченной части F^* определяется как сумма проекций на ось z (см. вывод формулы нормальных напряжений):

$$N^* = \int_F \sigma dF. \quad (4.9)$$

Однако, зная что

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y,$$

то после подстановки в уравнение (4.9), получим

$$N^* = \frac{M_x}{I_x} \int_F y_1 dF,$$

где y_1 – текущая ордината площадки dF .

Полученный интеграл – статический момент относительно горизонтальной оси части площади, расположенной выше продольного сечения (выше уровня y). Обозначим его величину через S_x^* . Тогда,

$$N^* = \frac{M_x}{I_x} S_x^*.$$

В правом сечении продольная сила определяется зависимостью

$$N^* + dN^* = \frac{(M_x + dM_x)}{I_x} S_x^*.$$

Разность этих двух усилий

$$dN^* = \frac{dM_x}{I_x} S_x^*.$$

Она должна уравновешиваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента τ . Если считать, что они распределяются по ширине сечения равномерно, то

$$\frac{dM_x}{I_x} S_x^* = \tau b dz,$$

или формула Журавского

$$\tau = \frac{dM_x S_x^*}{dz I_x b} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b}. \quad (4.10)$$

Данное выражение позволяет вычислять касательное напряжение, возникающее в продольном сечении стержня, а также в его поперечном сечении (с учетом закона парности касательных напряжений).

Закон парности касательных напряжений: по двум взаимно перпендикулярным площадкам действуют равные по величине и противоположные по направлению касательные напряжения.

Зависимость от расстояния до нейтральной оси, представленная в формуле Журавского, не носит линейного характера, так как она представлена в неявном виде в величине S_x^* , поэтому характер изменения касательных напряжений по высоте балки криволинейен. В каждом конкретном случае для вычисления величины S_x^* необходимо научиться определять значения этого параметра в зависимости от расстояния до нейтральной оси.

По формуле (4.10) определяется лишь абсолютное значение касательного напряжения; знак этого напряжения совпадает со знаком порезывающей силы, действующей в рассматриваемом сечении.

4.8. УТОЧНЕННЫЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

При уточненных расчетах на прочность необходимо оценить влияние не только нормальных напряжений, но и касательных, при этом важно определить точку в поперечном сечении, в которой влияние этих напряжений наиболее значительно. Для этого необходимо научиться правильно строить эпюру касательных напряжений в поперечном сечении балки.

Рассмотрим случай построения эпюры касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении. Пусть в этом сечении действует поперечная сила Q_y (рис. 4.13).

Момент инерции сечения относительно горизонтальной оси x определяется зависимостью

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Для определения величин касательного напряжения в точке C необходимо провести через эту точку прямую, параллельную оси x .

Определим статический момент отсеченной части сечения (это произведение площади отсеченной части на расстояние от нейтральной оси до центра части отсеченной части):

$$S_x^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

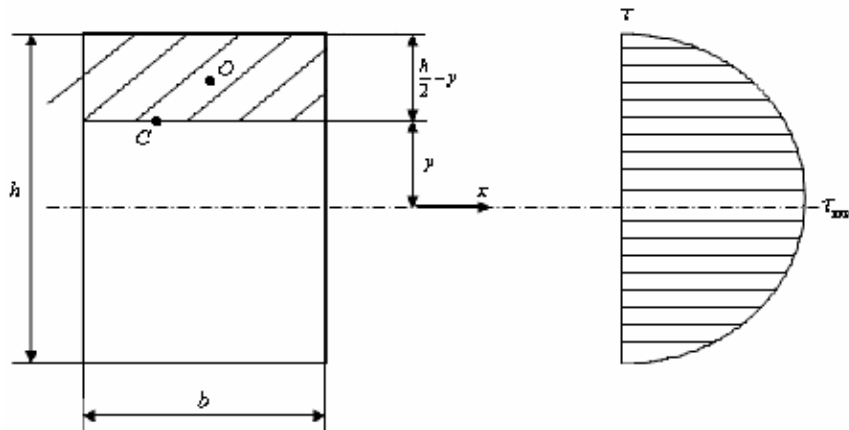


Рис. 4.13

Подставим в формулу касательных напряжений полученные выражения:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b} = \frac{Q_y}{bh^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Из этого выражения следует, что касательные напряжения изменяются по закону квадратной параболы.

При $y = \pm \frac{h}{2}$ напряжение $\tau = 0$. Наибольшее напряжение при $y = 0$, т.е. на нейтральной оси

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}.$$

Рассмотрим распределение напряжений в тонкостенных балках двутаврового сечения для случая, когда Q_y и M_x положительны.

Изобразим условное сечение двутавра с его характерными размерами b, h, t, d (рис. 4.14).

Касательные напряжения в полках двутавра определить методом сопротивления материалов нельзя, так как в них нарушается предположение о равномерном характере распределения касательных напряжений по ширине поперечного сечения b , а именно оно положено в основу вывода формулы касательных напряжений. Эти напряжения невелики, по сравнению с напряжениями в стенке двутавра и ими можно пренебречь.

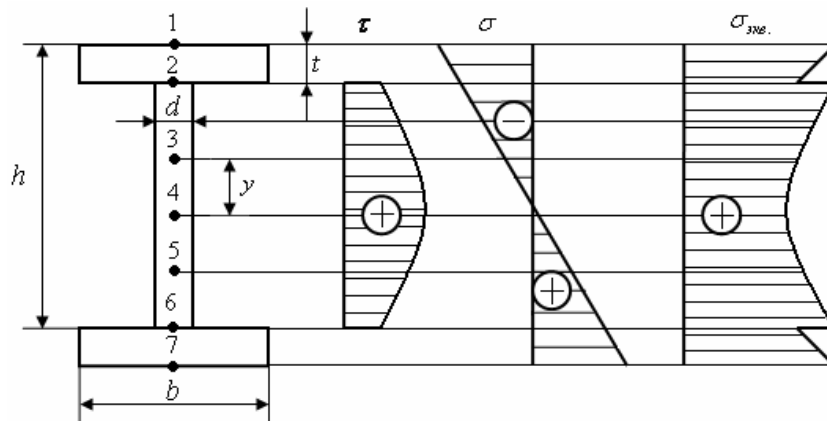


Рис. 4.14

Касательные напряжения в точках со второй по шестую можно определить по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x d}.$$

Однако необходимо правильно определить величину S_x^* , соответствующую различным точкам.

Точка 2 (рис. 4.15)

$$S_x^* = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Точка 3 (рис. 4.16)

$$S_x^* = S_x - y'd \frac{y'}{2}.$$

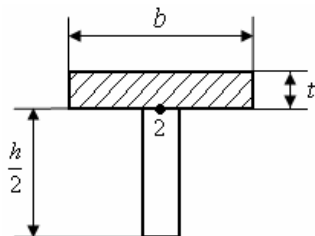


Рис. 4.15

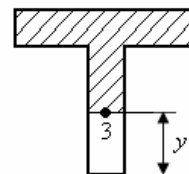


Рис. 4.16

Статический момент отсеченной части можно определить как разность статического момента S_x для полусечения из сортамента и статического момента прямоугольника с размерами dy' .

Точка 4 (рис. 4.14). Величина S_x для полусечения указана в сортаменте.

В точках 5 и 6 в виду симметрии конструкции будут значения статических моментов, соответствующие точкам 2 и 3.

Эпюра σ строится, исходя из расчетов, по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y,$$

где y – текущая координата рассматриваемой точки.

Так как изгибающий момент положителен, то согласно правилу знаков, сверху сжатые, а внизу растянутые волокна.

После построения эпюр σ и τ необходимо построить эпюру эквивалентных напряжений, а для этого следует сложить по какому-то закону напряжения σ и τ в каждой точке. Для этого вводятся теории или гипотезы прочности, которые определяют порядок сложения этих напряжений для разных групп материалов.

Например, по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

а по четвертой теории

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Эквивалентные напряжения рассчитывают в точках 1, 3 и 4, а также два значения в точке 2. Первое из этих значений – только с учетом нормальных напряжений в точке 2, а второе – с учетом и нормальных, и касательных напряжений в этой точке.

После этого производят сравнение максимального значения $\sigma_{\text{эКВ}}$ с допуском напряжением $[\sigma]$.

Оценим погрешность оттого, что не вычисляются касательные напряжения в полках двутавра. Для точки 2, расположенной непосредственно над линией, проходящей через нижнюю грань верхней полки двутавра

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b},$$

так как основание полки равно b , а для точки 2, расположенной под полкой двутавра,

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x d}.$$

Таким образом, максимальное напряжение в полке двутавра относится к напряжению под полкой как $\frac{d}{b}$, т.е. отличается на порядок.

4.9. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ ПЛОСКИХ РАМ

Определение: Стержневая система, элементы которой работают в основном на изгиб или кручение, называется рамой.

В плоских рамах в сечении возникают три внутренних силовых фактора: нормальная сила N , поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x .

Перед построением эпюр проставляют по участкам рамы оси координат, направляя ось z вдоль оси бруса, y – перпендикулярно z и лежит в плоскости чертежа, x – перпендикулярно y , z и плоскости чертежа.

При переходе на следующий участок ось z направляется по оси бруса, а система координат $yozy$ поворачивается как жесткое целое.

При построении эпюр положительные значения нормальных, поперечных сил и изгибающих моментов следует откладывать в положительном направлении оси y .

Контроль правильности построения эпюр Q_y и M_x проводится по дифференциальным зависимостям, а также из условия равновесия каждого узла рамы: сумма всех моментов (внешних и внутренних) в узле должна равняться нулю.

Значения моментов берутся с эпюры моментов, а направления определяются по положению сжатых волокон (эпюры изгибающих моментов всегда построены на сжатых волокнах).

5. КРУЧЕНИЕ

Под деформацией кручения понимают деформацию стержня, при которой в поперечном сечении из всех внутренних усилий возникает только крутящий момент.

Метод сечений при кручении: крутящий момент в произвольном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения.

При расчетах на прочность и жесткость, знак крутящего момента не имеет принципиального значения, поэтому он может быть выбран произвольно, но его необходимо придерживаться до конца решения задачи.

Определение: Стержень, работающий на кручение, называется валом.

5.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Теория кручения брусков круглого или кольцевого сечения на основана на следующих положениях:

1. Гипотеза плоских сечений: поперечные сечения вала, плоские до деформации, остаются плоскими и в процессе деформации. Они лишь поворачиваются вокруг оси вала.

2. Радиусы, проведенные в сечении, остаются прямыми и не изменяют своей длины.
 3. Расстояния между поперечными сечениями в процессе деформаций остаются постоянными.
- Уравнение равновесия при кручении (рис. 5.1) имеет следующий вид:

$$\int_F \tau \rho dF = M_{кр}, \quad (5.1)$$

где τ – касательное напряжение, возникающее в поперечном сечении вала.

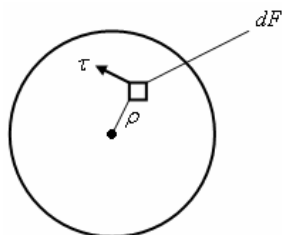


Рис. 5.1

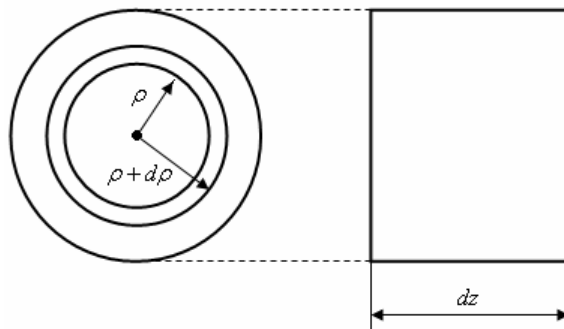
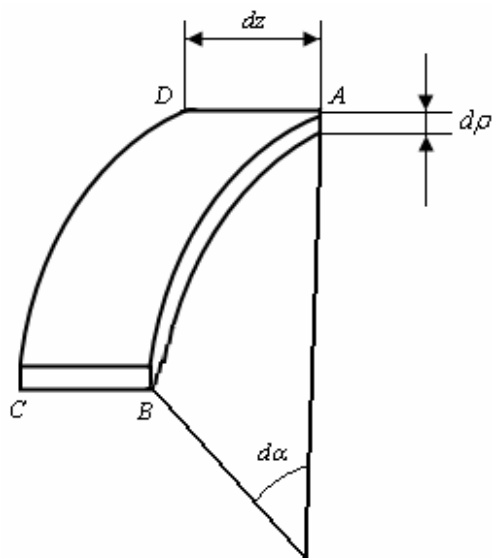


Рис. 5.2

Выделим из окружности в поперечном сечении вала бесконечно-малый элемент и рассмотрим его деформацию. При этом элемент определяется двумя поперечными сечениями, отстоящими на расстояние dz друг от друга. Из него выделяется двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ элементарное кольцо (рис. 5.2).

Выделим из кольца элемент двумя плоскими сечениями, проходящими через ось и образующими между собой угол $d\alpha$ (рис. 5.3).



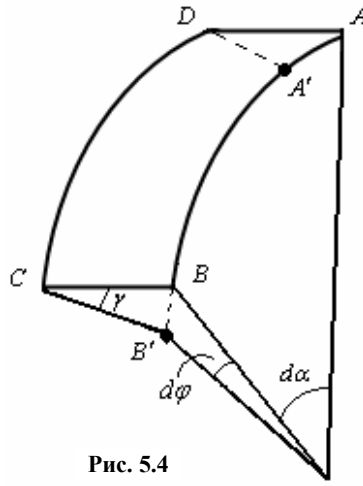


Рис. 5.4

Правое торцевое сечение поворачивается относительно левого на угол $d\varphi$, а образующая BC поворачивается на угол γ , если считать CD началом отсчета (рис. 5.4).

Согласно схеме деформаций:

$$BB' = \rho d\varphi ; \quad (5.2)$$

$$BB' = \gamma dz . \quad (5.3)$$

Приравняем уравнения (5.2) и (5.3):

$$\rho d\varphi = \gamma dz ;$$

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} , \quad (5.4)$$

где $\frac{d\varphi}{dz}$ – называется относительным углом закручивания двух смежных сечений. Эта величина аналогична относительному удлинению при растяжении-сжатии $\frac{d\ell}{\ell}$.

Элемент $ABCD$ работает в условиях чистого сдвига, а закон Гука при чистом сдвиге имеет вид

$$\tau = G\gamma , \quad (5.5)$$

где G – модуль сдвига (характеристика материала вала).

Подставим выражение (5.4) в (5.5):

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz} . \quad (5.6)$$

Подставим выражение (5.6) в (5.1):

$$\int_F G\rho^2 \frac{d\varphi}{dz} dF = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = M_{кр} ; \quad (5.7)$$

$$G \frac{d\varphi}{dz} I_p = M_{кр} ,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{GI_p} . \quad (5.8)$$

Подставим (5.8) в (5.6):

$$\tau = G\rho \frac{M_{кр}}{GI_p} = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho . \quad (5.9)$$

В поперечных сечениях вала при кручении возникают касательные напряжения, направление которых в каждой точке перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с центром тяжести сечения. Значение этого напряжения прямо пропорционально расстоянию до центра тяжести. Следовательно, в центре, при $\rho = 0$, касательные напряжения равны нулю, а в точках, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности вала, они максимальны. График изменения касательных напряжений, вдоль какого-либо диаметра носит линейный характер (рис. 5.5).

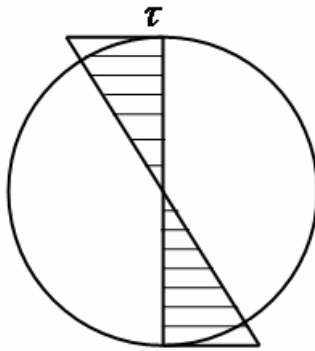


Рис. 5.5

Наибольшее напряжение в непосредственной близости от наружной поверхности вала можно получить путем подстановки в выражение (5.9) вместо величины ρ расстояние $\frac{d}{2}$:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p},$$

где W_p – полярный момент сопротивления поперечного сечения;

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_p}{d}.$$

Выражается W_p в см^3 , м^3 .

Для круглого сечения:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4; \quad (5.10)$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (5.11)$$

5.2. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ. ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ И УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ

Деформацией при кручении является угол закручивания вала φ . Согласно формуле (5.7), имеем:

$$d\varphi = \frac{M_{кр} dz}{GI_p}.$$

$$\varphi = \int \frac{M_{кр} dz}{GI_p} dz.$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_p}.$$

Пр и м е р : $M_2 = 20$ кг·м; $M_3 = 40$ кг·м; $M_4 = 30$ кг·м; $M_1 = ?$ (рис. 5.6).

Из условия равновесия:

$$M_2 - M_1 + M_3 + M_4 = 0;$$

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 = 20 + 40 + 30 = 90 \text{ кг·м.}$$

I сечение:

$$M_{кр} = M_2 = 20 \text{ кг·м.}$$

II сечение:

$$M_{кр} = M_2 - M_1 = 20 - 90 = -70 \text{ кг·м.}$$

III сечение:

$$M_{кр} = M_2 - M_1 + M_3 = 20 - 90 + 40 = -30 \text{ кг}\cdot\text{м}.$$

$\varphi_A = 0$ – начало построения.

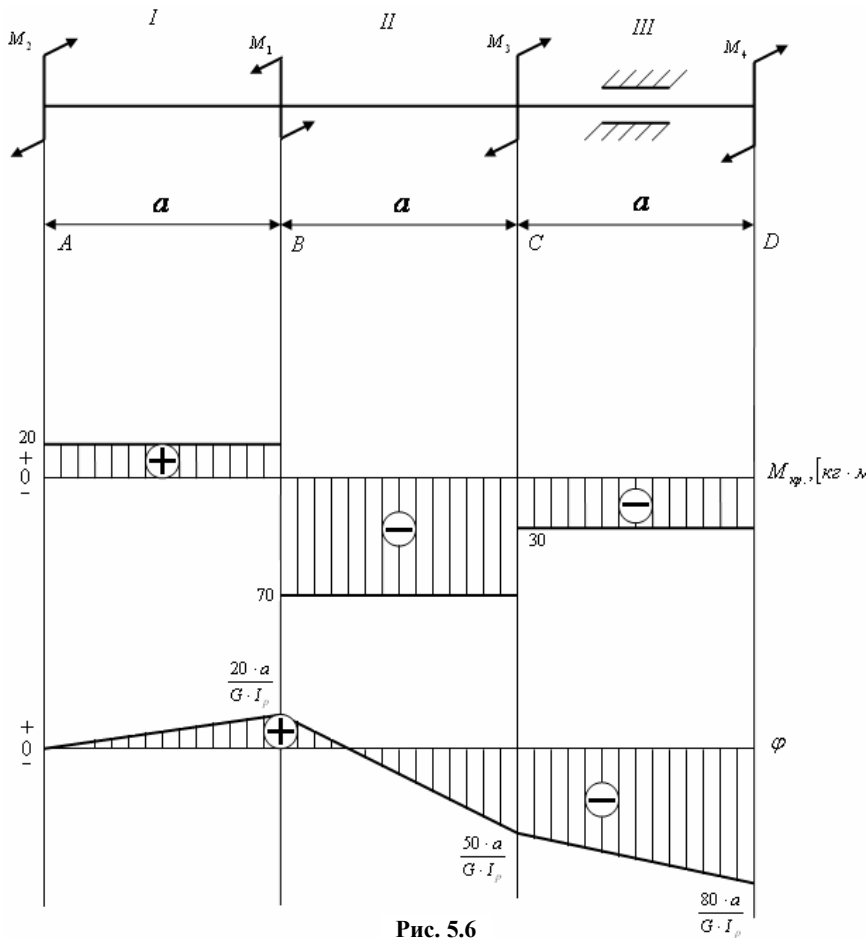


Рис. 5.6

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{AB} \ell_{AB}}{GI_p} = \frac{20a}{GI_p};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{CB} \ell_{CB}}{GI_p} = \frac{20a}{GI_p} - \frac{70a}{GI_p} = -\frac{50a}{GI_p};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{CD} \ell_{CD}}{GI_p} = -\frac{50a}{GI_p} - \frac{30a}{GI_p} = -\frac{80a}{GI_p}.$$

5.3. Расчет на прочность и жесткость при кручении вала

круглого поперечного сечения

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом вале не должны превышать допустимых напряжений. Условие прочности имеет вид:

$$\tau \leq [\tau].$$

А с учетом формулы (9) условие прочности выглядит следующим образом:

$$W_p \geq \frac{M_{кр}^{max}}{[\tau]}.$$

После этого определяется диаметр вала в соответствии с формулой (5.11). Для стальных валов $[\tau] = 20 \dots 40$ МПа.

В технологическом оборудовании недостаточная жесткость на кручение элементов конструкций приводит к нарушению точности обработки изготавливаемых изделий.

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi \leq [\varphi],$$

где $[\varphi]$ – допускаемый относительный угол закручивания на длине 1 м. Или

$$I_p \geq \frac{|M_{kp}^{\max}| l_p}{G[\varphi]},$$

где $l_p = 1$ м.

После расчета I_p определяется диаметр вала по формуле (5.10).

Если $[\varphi^\circ]$ задан в градусах, то перевод в радианы осуществляется так:

$$[\varphi] = [\varphi^\circ] \frac{\pi}{180}.$$

5.4. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении стержней некруглого поперечного сечения не работает гипотеза плоских сечений, то есть сечение не остается плоским в процессе нагружения. Аналитически определить напряжение при кручении таких стержней методами сопротивления материалов невозможно. При определении углов сдвига необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и местный перекокс, связанный с искривлением сечения.

Реально подобная задача может решаться только методами теории упругости.

Эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения показана на рис. 5.7.

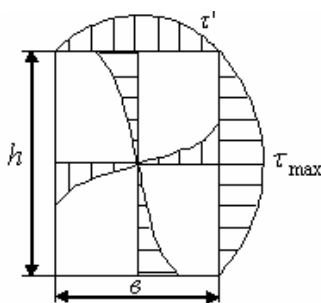


Рис. 5.7

При этом, если обозначить большую сторону прямоугольника за h , а меньшую – за b , то:

$$I_k = \alpha b^4;$$

$$W_k = \beta b^3,$$

где I_k – геометрическая характеристика крутильной жесткости; W_k – момент сопротивления при кручении.

Тогда наибольшее касательное напряжение τ_{\max} , возникающее посередине длинной стороны прямоугольника, может быть определено по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k},$$

а касательное напряжение, возникающее посередине короткой стороны, определяется зависимостью

$$\tau' = \gamma \tau_{\max}.$$

Коэффициенты α , β , γ зависят от соотношения сторон прямоугольника $\frac{h}{b}$ и задаются в специальных табличках.

Формулы для расчетов на прочность и жесткость при кручении стержней прямоугольного сечения подобны формулам для круглого сечения, однако имеются определенные отличия. Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_k} \leq [\tau],$$

а условие жесткости

$$\varphi \leq [\varphi]$$

превращается в уравнение

$$I_k = \frac{|M_k^{\max}| l_p}{G[\varphi]}.$$

Угол закручивания при кручении стержней некруглого сечения определяется зависимостью

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{GI_k}.$$

5.5. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим порядок построения эпюр крутящих моментов и углов закручивания для статически неопределимой задачи.

Пример. Дано: M_1, M_2, a, b, c (рис. 5.8).

Определить реакции в заделках, построить эпюры крутящих моментов.

В опорах A и B возникают реакции в виде крутящих моментов M_A и M_B .

Составим уравнение статики в виде суммы крутящих моментов.

$$M_A - M_1 + M_2 - M_B = 0. \quad (5.12)$$

Задача один раз статически неопределима.

I. $M_I = M_A.$

II. $M_{II} = M_A - M_1.$

III. $M_{III} = M_A - M_1 + M_2.$

$$\varphi_A = \varphi_B = 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi_B = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} &= \frac{M_I a}{GI_p} + \frac{M_{II} b}{GI_p} + \frac{M_{III} c}{GI_p} = \\ &= \frac{M_A a}{GI_p} + \frac{(M_A - M_1) b}{GI_p} + \frac{(M_A - M_1 + M_2) c}{GI_p} = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

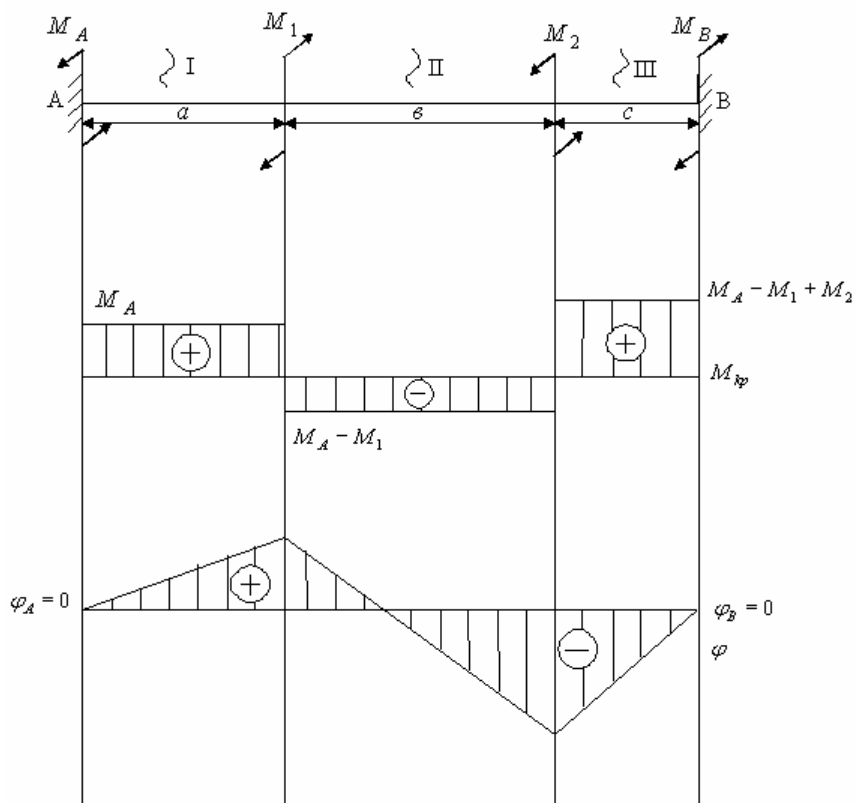


Рис. 5.8

Решая совместно уравнения (5.12) и (5.13), можно определить неизвестные M_A и M_B . В качестве проверки угол закручивания φ в точках A и B должен равняться нулю.

6. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в точке.

Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, по которой бы нормальные и касательные напряжения равнялись нулю, то напряженное состояние в этой точке называется пространственным.

Если по одной площадке, проходящей через рассматриваемую точку, тела нормальные и касательные напряжения равны нулю, то напряженное состояние в этой точке называется плоским.

Если нормальные и касательные напряжения равны нулю по двум площадкам, проходящим через рассматриваемую точку тела, то напряженное состояние в точке называется линейным.

Пример линейного напряженного состояния – растяжение-сжатие; плоского напряженного состояния – изгиб; пространственного – сложное напряженное состояние, например, изгиб с кручением.

В окрестностях любой точки можно выделить элементарный параллелепипед размером dx , dy , dz , чтобы касательные напряжения по всем его граням были равны нулю (рис. 6.1). Тогда, при пространственном напряженном состоянии нормальные напряжения по всем его граням не равны нулю.

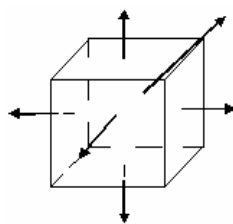
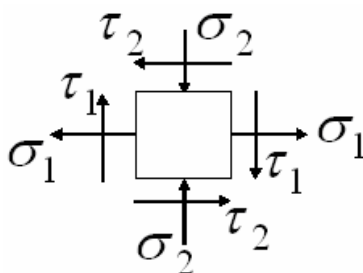


Рис. 6.1

При плоском напряженном состоянии они равны нулю по одной паре граней, при линейном – равны нулю по двум парам граней.

Правило знаков для построения элементов: Растягивающее нормальное напряжение положительно, сжимающее – отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если изображающий его вектор стремится вращать призму по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей на внутренней нормали к этой грани.

Пример построения элемента показан на рис. 6.2.



Нормальное напряжение σ_1 – положительно; σ_2 – отрицательно. Касательное напряжение τ_1 – положительно; τ_2 – отрицательно.

6.2. Напряжение по наклонным площадкам при

плоском напряженном состоянии

Плоское напряженное состояние можно рассматривать как два линейных напряженных состояния. Линейное рассматривалось в теме – "Напряжения в наклонных сечениях бруса" (рис. 6.3). В соответствии с зависимостями (2.7) и (2.8) имеем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha.$$

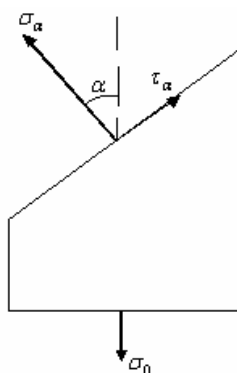


Рис. 6.3

Для плоского напряженного состояния (рис. 6.4).

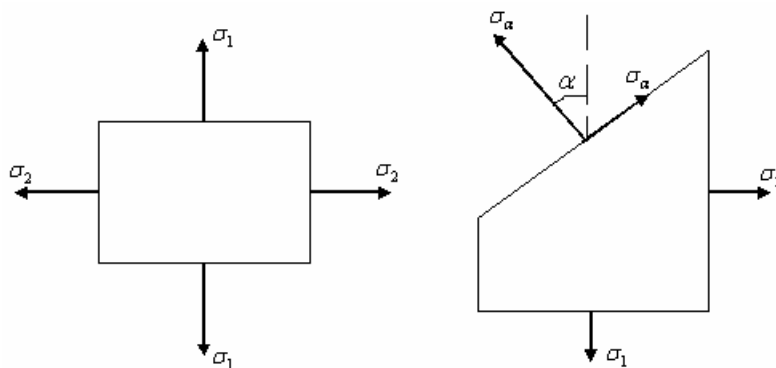


Рис. 6.4

Согласно формулам (2.7), (2.8) и принципу независимости действия сил имеем:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2(90 + \alpha) = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha ; \quad (6.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(90 + \alpha) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (6.2)$$

Эти формулы верны, если $\sigma_1 > \sigma_2$ и угол α отсчитывается от линии действия наибольшего нормального напряжения до нормали к площадке против часовой стрелки.

6.3. НАПРЯЖЕНИЯ ПО ДВУМ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ПЛОЩАДКАМ

Схема напряженного состояния, соответствующая двум взаимно перпендикулярным площадкам, изображена на рис. 6.5.

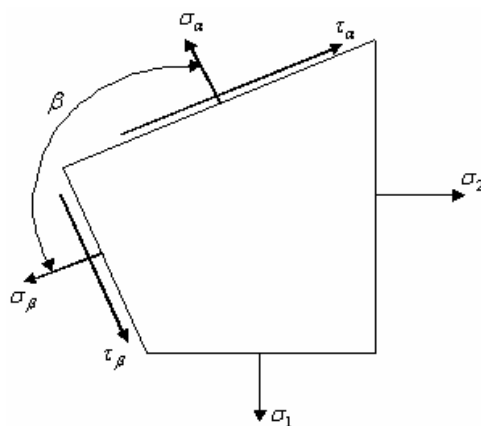


Рис. 6.5

$$\beta = 90 + \alpha . \quad (6.3)$$

Согласно зависимости (6.1) и (6.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\beta} &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta ; \\ \tau_{\beta} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta . \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Подставим уравнение (6.3) в систему (6.4):

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha ; \quad (6.5)$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha . \quad (6.6)$$

Сравним выражения (6.2) и (6.6), получим

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta} ,$$

т.е. касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютной величине и противоположны по знаку – закон парности касательных напряжений.

Сравним выражения (6.1) и (6.5):

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const} ,$$

т.е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная.

6.4. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ

При расчете конструкций нет необходимости определять напряжения по всем площадкам, проходящим через данную точку, а достаточно знать экстремальные значения.

Минимальное и максимальное нормальные напряжения называются главными напряжениями, а площадки, по которым они действуют, называются главными площадками.

Свойство главных площадок: По главным площадкам касательные напряжения равны нулю.

Для плоского напряженного состояния положение главных площадок можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

или

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Эти формулы дают значение угла α_0 , определяющее положение двух взаимно перпендикулярных площадок.

Для определения их положения необходимо повернуть площадки, по которым действуют напряжения σ_1 и σ_2 на угол α_0 против часовой стрелки при $\alpha_0 > 0$ и по часовой стрелке при $\alpha_0 < 0$.

Величины максимального и минимального напряжений можно определить по формуле

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2} \right).$$

Для определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} надо площадку с большим в алгебраическом смысле нормальным напряжением повернуть на угол α_0 в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра. Площадка с σ_{\min} будет перпендикулярна полученной площадке (рис. 6.6).

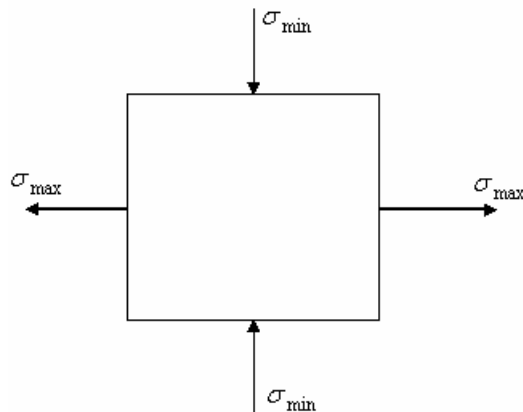


Рис. 6.6

6.5. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Определение: Чистым сдвигом называют такое плоское напряженное состояние, при котором по двум парам взаимно перпендикулярных площадок действуют только касательные напряжения.

Положение площадки сдвига можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau_2}.$$

Если угол α_1 положителен, то площадку, по которой действует напряжение σ_1 для совмещения с площадкой, по которой действует экстремальное касательное напряжение, надо повернуть на угол α_1 против часовой стрелки.

Согласно закону парности касательных напряжений

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min}.$$

Свойство площадок сдвига: площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углами, равными 45° .

В случае, если известны главные напряжения σ_{\max} и σ_{\min} , величины экстремальных значений касательных напряжений можно определить по формуле

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Если дано плоское напряженное состояние со значениями σ_1 и σ_2 , и τ_1 и τ_2 , то

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2}.$$

Площадка сдвига показана на рис. 6.7.

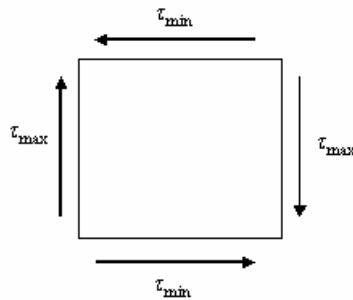


Рис. 6.7

6.6. ГИПОТЕЗЫ ИЛИ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение или сжатие устанавливается опасное или предельное состояние. Тело находится в опасном состоянии, если оно имеется в какой-либо его точке. Точка тела, в окрестности которой при пропорциональном возрастании нагрузки материал первый оказывается в опасном состоянии, называется *опасной точкой*.

Положение опасной точки зависит от того, что считается причиной опасного состояния (например, нормальные или касательные напряжения).

Результаты испытаний на растяжение и сжатие являются как бы эталоном прочности, с помощью которого устанавливается прочность материала в любом случае напряженного состояния.

В основу теорий прочности положены исследования по механике разрушения материалов. Результаты этих исследований позволили сформулировать различные гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в опасное состояние.

В расчетных формулах, соответствующих различным теориям прочности, напряженное состояние материала выражается через значения главных напряжений: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Первая гипотеза прочности (нормальных напряжений) основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате отрыва и что поэтому опасное состояние наступает, когда наибольшее растягивающее напряжение достигает опасного значения. В соответствии с гипотезой, при расчетах на прочность ограничиваются значения наибольших растягивающих напряжений, которые не должны превышать допустимого нормального напряжения, полученного из опытов на одноосное растяжение. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 = [\sigma_p].$$

Теория применима, когда главное напряжение σ_1 по абсолютной величине значительно больше напряжений σ_2 и σ_3 . На практике почти не используется, так как не учитывает напряжений σ_2 и σ_3 , а их влияние, как показывают опыты, весьма значительно.

Вторая гипотеза прочности (наибольших относительных удлинений) исходит из того, что опасное состояние в материале наступает в случае, когда наибольшее относительное удлинение достигает опасного значения. При практических расчетах ограничивается величина наибольшего относительного удлинения, которое не должно превышать допустимого значения. Для пластичных материалов условие прочности имеет вид

$$\xi_1 \leq [\xi]. \quad (6.7)$$

Однако,

$$[\xi] = [\sigma] / E,$$

а учитывая, что

$$\xi_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

уравнение (6.7) примет вид

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma],$$

так как допускаемые напряжения $[\sigma_p]$ и $[\sigma_{сж}]$ для пластичных материалов одинаковы.

Для хрупких материалов

$$\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_p].$$

Первая и вторая теории прочности не могут объяснить причин разрушения образца при одноосном сжатии.

Третья гипотеза прочности (наибольших касательных напряжений) основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате среза и поэтому опасное состояние наступает, когда наибольшие касательные напряжения в материале достигают опасного значения.

Наибольшее касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau];$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Тогда

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Третья теория объясняет, почему в случае всестороннего сжатия материал может, не разрушаясь, выдерживать большие напряжения. Однако приведенная гипотеза не объясняет причину разрушения при всестороннем равномерном растяжении. Также третья теория не учитывает промежуточного главного напряжения σ_2 , значения которого влияют на прочность материала. Она достаточно широко применяется для расчетов пластичных материалов. Для хрупких – неприменима.

Четвертая теория прочности (энергетическая). Опасное состояние материала наступает, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает опасного значения:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma].$$

Достоинства: учитывает все три главных напряжения. Однако также не объясняет причин разрушения материала при всестороннем растяжении. Теория широко используется при расчетах конструкций из пластичных материалов. Для хрупких – неприменима.

Изложенные теории прочности неприменимы для анизотропных материалов (например, дерево), так как необходимо учитывать направление усилий по отношению к волокнам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

"Сопротивление материалов" является первой инженерной дисциплиной в учебном плане высшего технического учебного заведения по любой специальности. Изучая сопротивление материалов, студенты знакомятся с примерами расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Приобретенные при этом знания в значительной степени облегчают усвоение последующих специальных дисциплин. В сопротивлении материалов опыт и теория тесно увязаны между собой, наука эта является одновременно теоретической и опытной.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов, поэтому приступить к изучению дисциплины можно только после изучения указанного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 623 с.
3. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 303 с.
4. Миролубов, И.Н. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для технических вузов / И.Н. Миролубов и др. – М. : Высшая школа, 1985. – 399 с.
5. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов. – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
<u>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ</u>	
.....	3
1.1. Определение изучаемых объектов	3
1.2. Основные гипотезы о деформированном теле	3
1.3. Классификация сил	4
1.4. Перемещения и деформации	4
1.5. Метод сечений	5
1.6. Напряжения	6
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	7
2.1. Растяжение-сжатие прямого бруса	7
2.2. Напряжения в наклонных сечениях бруса	8
2.3. Определение деформаций при растяжении-сжатии	10
2.4. Статически неопределимый брус	12
2.5. Статически неопределимые стержневые системы	14
2.6. Напряжения, возникающие в стержневых системах от неточности изготовления и температурных деформаций	18
<u>2.7. Механические свойства материалов</u>	
.....	22
2.8. Работа и потенциальная энергия деформации	25
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	26
3.1. Статические моменты и моменты инерции сечений	26
3.2. Моменты инерции простейших сечений	30
3.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей	33
3.4. Изменение моментов инерции при повороте осей	34
3.5. Главные оси и главные моменты инерции	36
<u>4. ИЗГИБ</u>	
.....	37
4.1. Общие понятия	37
4.2. Построение эпюр при изгибе	38
4.3. Дифференциальные зависимости при изгибе	40
4.4. Некоторые выводы из дифференциальных зависимостей	42
4.5. Определение нормальных напряжений при чистом изгибе	42
4.6. Подбор сечений при изгибе	47
4.7. Касательные напряжения при изгибе	48
4.8. Уточненные расчеты на прочность при изгибе	50
4.9. Построение эпюр для плоских рам	54
<u>5. КРУЧЕНИЕ</u>	
.....	54
5.1. Вывод формулы для определения касательных напряжений при кручении стержня круглого сечения	55
5.2. Деформации при кручении. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания	59
5.3. Расчет на прочность и жесткость при кручении вала круглого поперечного сечения	61
5.4. Кручение стержней некруглого поперечного сечения	61
5.5. Статически неопределимые задачи при кручении	63
<u>6. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ</u>	
.....	64
6.1. Напряженное состояние в точке	64

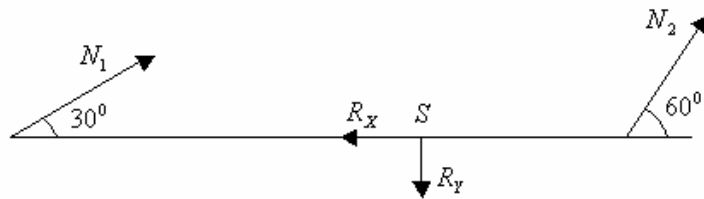
6.2. Напряжение по наклонным площадкам при плоском напряженном состоянии	66
6.3. Напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам ..	67
6.4. Главные напряжения. Главные площадки	68
6.5. Чистый сдвиг	69
6.6. Гипотезы или теории прочности	70

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

73

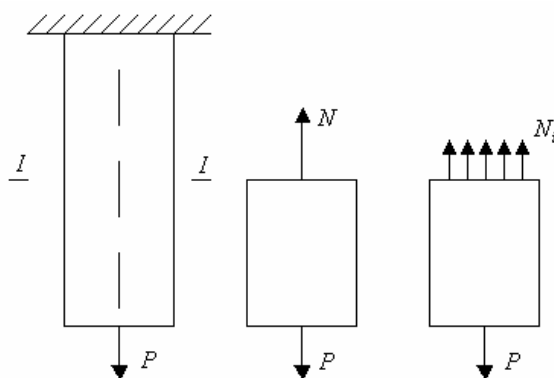
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

73



Ю.Т. Селиванов

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 539.411
ББК Ж121я73-2
С291

Р е ц е н з е н т

Кандидат технических наук, доцент
В.М. Червяков

Селиванов, Ю.Т.

С291 Растяжение и сжатие стержней и стержневых систем : метод. разработки / Ю.Т. Селиванов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 24 с. – 30 экз.

Даны задания и общие положения по выполнению расчетно-проектировочной работы по курсу "Сопротивление материалов".

Предназначены для студентов дневного и заочного отделений специальностей 655400, 655800.

УДК 539.411
ББК Ж121я73-2

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный
технический университет" (ТГТУ), 2007

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

Ю.Т. Селиванов

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методические разработки
по выполнению расчетно-проектировочной работы
по курсу "Сопротивление материалов"
для студентов дневного и заочного отделений
специальностей 655400, 655800



Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Селиванов ЮРИЙ ТИМОФЕЕВИЧ

**Растяжение и сжатие
стержней и стержневых систем**

Методические разработки

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 16.02.2007
Формат 60 × 84/16. 1,39 усл. печ. л. Тираж 30 экз. Заказ № 154

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Тема "Растяжение и сжатие стержней и стержневых систем" является одним из разделов курса "Сопротивление материалов" и изучается в 3 семестре. В процессе изучения этого раздела студенты выполняют расчетно-проектировочную работу, состоящую из четырех задач.

Настоящее методическое пособие составлено применительно к выполнению этой работы.

К выполнению задания можно приступить только после изучения соответствующей темы в учебниках [1, гл. 9, п. 64, 65, 66], [2, гл. 2, пп. 2.1 –2.5, 2.8, 2.9], [3, гл. 9, п. 82] и решения задач из раздела [4, гл. 1, пп. 1.1, 1.2, 1.6].

1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Студенты выполняют расчетно-проектировочную работу, включающую в себя четыре задачи. Первая задача – расчет статически определимого ступенчатого бруса. Вторая – расчет статически неопределимого ступенчатого бруса. Третья – расчет статически неопределимой стержневой системы от воздействия внешней силы. Четвертая – расчет статически неопределимой стержневой системы от неточности изготовления одного из стержней или от температурных деформаций.

Задание 1. Определить из условия прочности площадь поперечного сечения ступенчатого стержня и перемещения его характерных точек.

1. В соответствии со своим шифром выписать числовые данные из таблицы и вычертить схему задачи.
2. Построить эпюру продольных сил N .
3. Из условия прочности подобрать сечение стержня.
4. Построить эпюру нормальных напряжений σ в поперечном сечении стержня.
5. Построить эпюру перемещений δ .
6. Построить эпюру относительных линейных деформаций ξ .

Задание 2. К заданному стержню с определенным поперечным сечением подвести вторую опору-заделку и произвести расчет полученного статически неопределимого стержня.

1. Раскрыть статическую неопределенность системы.
2. Построить эпюру продольных сил N .
3. Построить эпюру нормальных напряжений σ .
4. Построить эпюру перемещений δ .
5. Построить эпюру относительных линейных деформаций ξ .
6. Сравнить на каждом участке стержня величины напряжений для статически неопределимого стержня с величинами напряжений для статически определимого стержня, найденными в первой части.

Задания 3 и 4. Произвести расчет плоской статически неопределимой стержневой системы на действие внешней нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления.

1. Выписать в соответствии со своим шифром числовые данные и начертить в масштабе заданную схему.
2. Раскрыть статическую неопределенность стержневой системы:
 - 1) от действия внешней нагрузки с подбором площади поперечного сечения стержней;
 - 2) от изменения температуры;
 - 3) от неточности изготовления.
3. Вычислить напряжения в стержнях и перемещение узлов от каждого из трех факторов и определить их суммарное значения.
4. Графически проверить правильность решения.

Примечание.

1. Для всех схем выполнить решение от действия заданной внешней нагрузки.
2. Изменение температуры учитывать в 2, 3, 4, 5, 6, 7 схемах (стержень 1).
3. Влияние неточности изготовления учитывать в 1, 2, 4, 8, 9, 10 схемах (стержень 2).

Задание должно содержать расчетно-пояснительную записку и графическую часть. Расчетно-пояснительная записка выполняется в виде тетради из листов формата А4 (297×210 мм) с обложкой из плотной бумаги, на которой должны быть указаны: тема задания, шифр, номер группы, фамилия студента, дата выполнения, фамилия и должность преподавателя, проверившего задание. Графическую часть следует выполнять на ватмане формата А2 (или по согласованию с преподавателем – А4). Все элементы графической части должны быть вычерчены в определенном масштабе. На первой странице расчетно-пояснительной записки необходимо выписать условие задачи с числовыми данными, составить эскиз в масштабе и указать на нем буквенными обозначениями все величины, необходимые для расчета.

Решение должно сопровождаться краткими пояснениями и чертежами, содержать расчетные формулы и вычисления без сокращений.

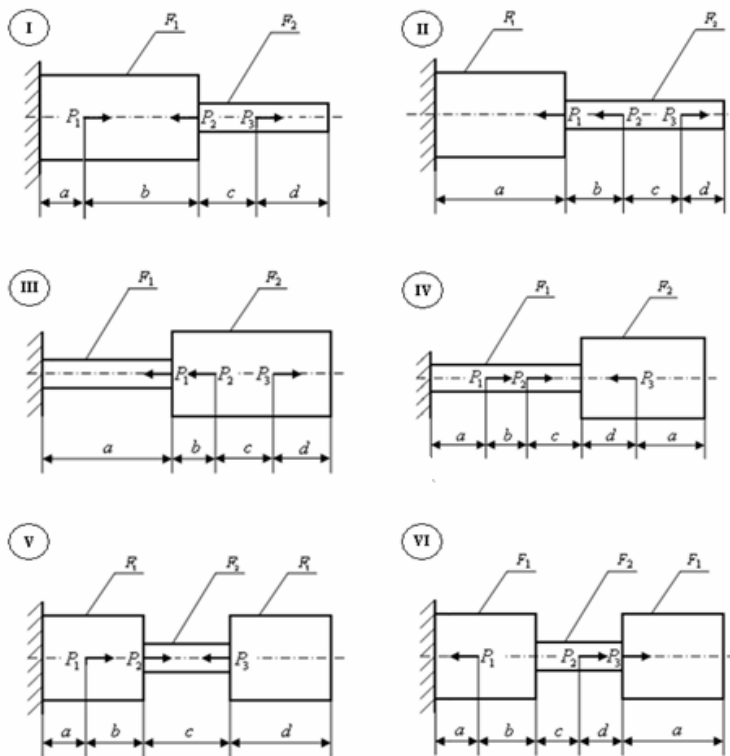
Полученные результаты записывать с указанием размерностей.

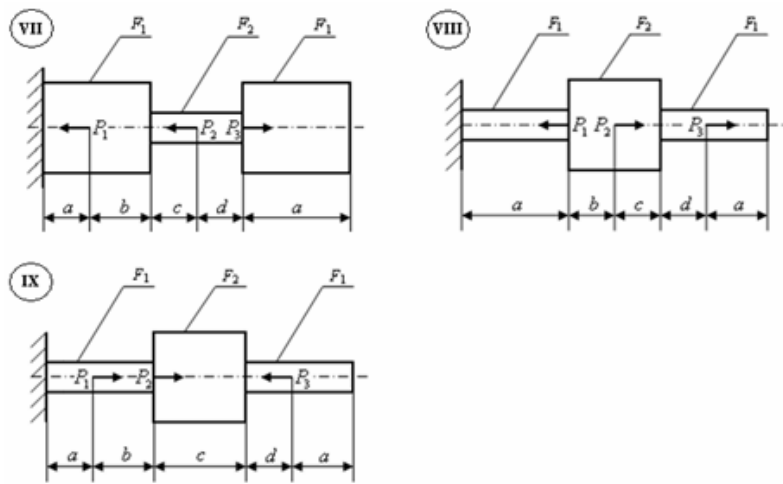
Все расчеты рекомендуется выполнять на микрокалькуляторе с соблюдением правил приближенных вычислений, сохраняя три значащие цифры.

Данные для заданий 1 и 2

Цифры шифра	№ схемы	Материал	ε , кг/см ²	P_1	P_2	P_3	a	b	c	d	$K = F_1 / F_2$	$[\sigma]_p$	$[\sigma]_{сж}$
				т			м					кг/см ³	
1	I	сталь	$2 \cdot 10^6$	2	3	2,1	0,2	0,5	0,2	0,4	1,4	1600	1450
2	VII	медь	$1 \cdot 10^6$	1,5	2,5	3	0,3	0,4	0,4	0,3	1,6	600	400
3	IX	алюминий	$0,7 \cdot 10^6$	2,2	1,5	1,5	0,4	0,3	0,5	0,2	1,8	500	300
4	II	чугун	$1,2 \cdot 10^6$	1,8	1,5	1,8	0,5	0,2	0,3	0,5	2	400	800
5	XIII	медь	$1 \cdot 10^6$	1,9	2	1,6	0,4	0,5	0,2	0,3	2,1	600	400
6	VI	чугун	$1,2 \cdot 10^6$	2,4	1,7	1,9	0,3	0,4	0,5	0,2	1,5	400	800
7	III	сталь	$2 \cdot 10^6$	3	2,2	2	0,5	0,3	0,2	0,4	1,7	1600	1450
8	IX	алюминий	$0,7 \cdot 10^6$	1,5	2,8	1,6	0,2	0,4	0,4	0,3	1,9	500	300
9	V	сталь	$2 \cdot 10^6$	2,8	1,8	2,2	0,3	0,5	0,2	0,4	2,2	1600	1450
0	IV	алюминий	$0,7 \cdot 10^6$	3,8	1,9	1,7	0,4	0,2	0,5	0,3	2,5	500	300
Буквы шифра	а	б	б	в	г	д	д	е	а	б	е	б	б

Расчетные схемы к заданиям 1 и 2

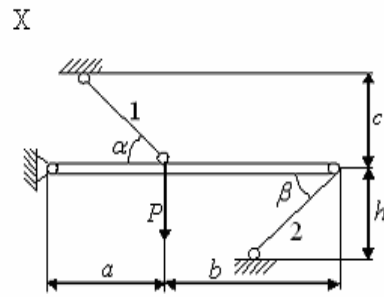
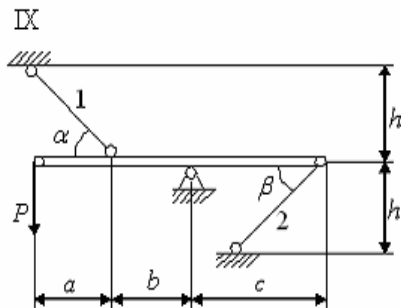
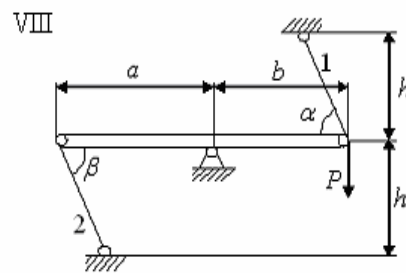
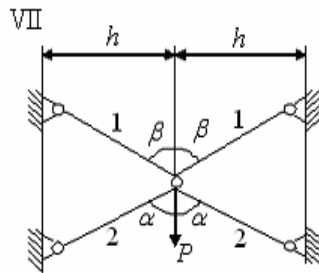
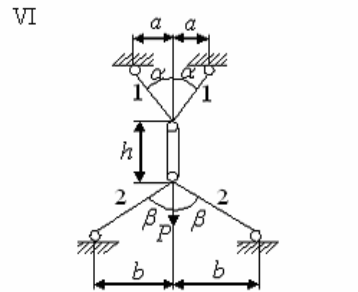
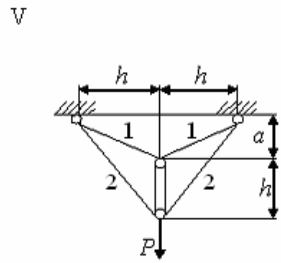
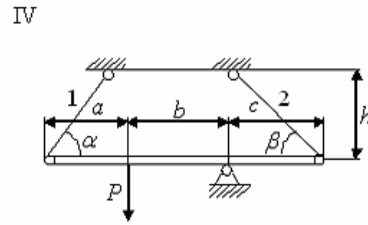
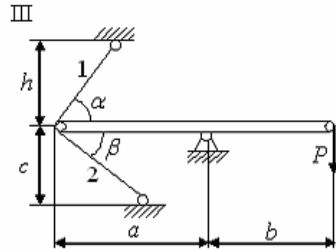
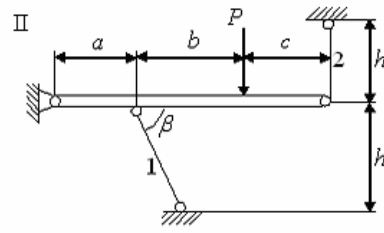
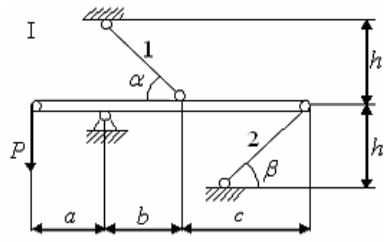




Данные для заданий 3 и 4

Цифры шифра	№ схемы	Материал	$E, \text{ кг/см}^2$	$P, \text{ т}$	a	b	c	h	α''	β''	$K = F_1 / F_2$	$\Delta t''$	$\alpha, \frac{1}{2} \text{ рад.}$	$\Delta, \text{ мм}$
					м									
1	II	медь	$1 \cdot 10^4$	3	0,3	0,4	0,5	0,6	25	65	2	10	$165 \cdot 10^{-7}$	0,4
2	I	алюминий	$0,7 \cdot 10^4$	4	0,7	0,8	0,9	1,0	35	55	1,8	15	$250 \cdot 10^{-7}$	-1,3
3	III	сталь	$2 \cdot 10^4$	5	0,6	0,5	0,4	0,3	60	30	1,7	20	$125 \cdot 10^{-7}$	0,6
4	V	чугун	$1,2 \cdot 10^4$	4,5	1,0	0,9	0,8	0,7	55	35	1,5	25	$110 \cdot 10^{-7}$	0,8
5	VIII	алюминий	$0,7 \cdot 10^4$	5,5	0,4	0,6	0,8	1,0	65	25	1,4	30	$250 \cdot 10^{-7}$	-1,2
6	VII	алюминий	$0,7 \cdot 10^4$	3,5	0,3	0,5	0,7	0,9	50	40	0,9	20	$250 \cdot 10^{-7}$	-1,4
7	IV	сталь	$2 \cdot 10^4$	4	0,9	0,7	0,5	0,3	60	30	0,8	40	$125 \cdot 10^{-7}$	1,5
8	VI	медь	$1 \cdot 10^4$	3	1,0	0,8	0,6	0,4	70	20	0,7	45	$165 \cdot 10^{-7}$	-0,6
9	X	чугун	$1,2 \cdot 10^4$	5,5	0,3	0,7	0,5	0,6	30	60	1,3	20	$110 \cdot 10^{-7}$	0,9
0	IX	медь	$1 \cdot 10^4$	4,5	0,4	0,9	0,8	0,3	40	50	1,1	15	$165 \cdot 10^{-7}$	-0,5
Буквы шифра	г	б	б	а	а	д	г	а	в	в	е	д	б	а

Расчетные схемы к заданиям 3 и 4



2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

Различают простое и внецентренное растяжение-сжатие (рис. 1). При простом, линия действия силы совпадает с осью бруса. Если не совпадает, а параллельна ей, то это – внецентренное растяжение-сжатие.

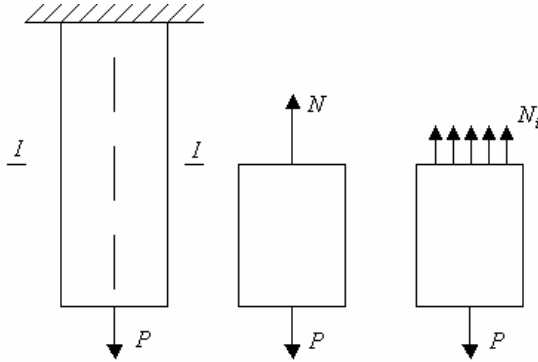


Рис. 1

Из уравнения проекций на вертикальную ось имеем

$$N = P, \quad (1)$$

где P – внешняя сила; N – внутреннее усилие.

Метод сечений: для нахождения внутренних усилий тело мысленно разрезают на две части и рассматривают равновесие той части, которая не соприкасается с заделкой.

При растяжении-сжатии гипотеза плоских сечений дополняется еще одним пунктом: в поперечных сечениях достаточно далеко удаленных от точки приложения сил нормальные силы распределяются по сечению равномерно, а касательные отсутствуют.

Нормальное напряжение характеризует величину внутренних усилий приходящихся на единицу площади сечения:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2)$$

Правило знаков: нормальные усилия и напряжения положительны при растяжении и отрицательны при сжатии.

Условие прочности при растяжении и сжатии

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (3)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение (справочная величина, физико-механическая характеристика материала). Это наибольшее напряжение, при котором материал конструкции может надежно и долго работать.

Решая совместно уравнения (2) и (3), имеем

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Это уравнение прочности при растяжении-сжатии. С его помощью возможно решение трех типов задач, но наиболее часто решается задача подбора площади сечения F при известных значениях N и $[\sigma]$. Тогда

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (5)$$

Например, для круга

$$F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}. \quad (6)$$

Для прямоугольного сечения должно быть задано соотношение сторон:

$$\frac{h}{b} = k; \quad F = kb^2; \quad b \geq \sqrt{\frac{N}{k[\sigma]}}, \quad (7)$$

где h – высота; b – основание.

Значение продольной силы в каждом частном случае можно легко определить с помощью метода сечений. Для нахождения напряжения σ в каждой точке поперечного сечения, необходимо знать закон распределения по сечению, который обычно изображается графиком, показывающим их изменение по высоте балки (эпюра нормальных напряжений).

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Нормальным напряжениям соответствует деформация растяжения-сжатия, а касательным – сдвиг.

Прямой брус длиной l и нагруженный силой P удлиняется на величину Δl (рис. 2):

$$\Delta l = l' - l, \quad (8)$$

где Δl – абсолютная деформация бруса (полная деформация).

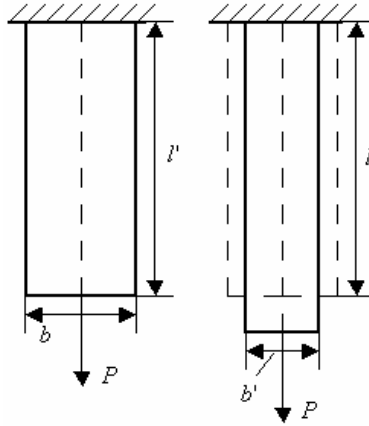


Рис. 2

Линейную деформацию ξ называют относительным продольным удлинением:

$$\xi = \frac{\Delta l}{l}. \quad (9)$$

Происходит также изменение поперечных размеров бруса. Относительная поперечная деформация может быть рассчитана по формуле

$$\xi' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (10)$$

Экспериментально установлено, что при напряжениях, не превышающих предела упругости, выполняется уравнение:

$$\xi' = -\mu \xi; \quad (11)$$

$$\left| \frac{\xi'}{\xi} \right| = \mu, \quad (12)$$

где μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), который определяется экспериментально и изменяется в пределах от 0 – для пробки, до 0,5 – для резины; для стали $\mu = 0,3$.

Установлено, что когда напряжение в брус не превышает предела пропорциональности, выполняется условие

$$\xi = \frac{N}{EF}, \quad (13)$$

где E – коэффициент, зависящий от физических свойств материала (модуль упругости).

Параметр E , наряду с μ , характеризует упругие свойства материала. В системе СИ измеряется в паскалях [Па].

Для стали $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см²; для меди $E = 10^6$ кг/см²; для условного дерева $E = 10^5$ кг/см².

Произведение EF называется жесткостью поперечного сечения бруса а, учитывая что $\sigma = \frac{N}{F}$, уравнение (13) примет вид

$$\xi = \frac{\sigma}{E}, \quad (14)$$

или

$$\sigma = \xi E. \quad (15)$$

Абсолютное удлинение бруса выражается зависимостью, полученной из (9) и (13):

$$\Delta l = \xi l = \frac{Nl}{EF}. \quad (16)$$

Формулы (14)–(16) являются математическим выражением закона Гука, который звучит так: абсолютная продольная деформация прямо пропорциональна продольной силе (при постоянной жесткости сечения EF); или относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению.

2.3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЙ БРУС

Определение: Брусья и шарнирно-стержневые системы, в которых внутренние усилия от заданной нагрузки можно определить с помощью уравнений равновесия, называются статически определимыми.

Определение: Брусья и шарнирно-стержневые системы называются статически неопределимыми, если число неизвестных усилий (реакций в опорах) превышает число независимых уравнений статики.

Определение: Разность между числом неизвестных усилий и числом независимых уравнений статики называется степенью статической неопределимости.

При этом при расчете подобных задач необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения перемещений, учитывающие характер деформации системы (уравнения совместности деформаций).

Пример 1. Рассмотрим стержень, жестко заделанный с обеих сторон и нагруженный силой P (рис. 3). Под действием этой силы в опорах возникают реакции R_1 и R_2 .

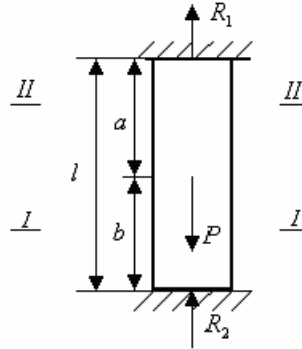


Рис. 3

Уравнение равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось будет иметь вид

$$R_1 + R_2 - P = 0. \quad (17)$$

В этом уравнении два неизвестных, следовательно, степень статической неопределимости системы равна единице.

Так как стержень жестко заделан по концам, то изменение длины стержня отсутствует:

$$\Delta l = 0, \quad (18)$$

или

$$\Delta a + \Delta b = 0. \quad (19)$$

При решении задачи используем метод сечений.

По закону Гука:

$$\Delta a = \frac{N_{II} a}{EF}; \quad (20)$$

$$\Delta b = \frac{N_I b}{EF}; \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} I-I : N_I = -R_2; \\ II-II : N_{II} = P - R_2. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Решая совместно уравнения (19) – (22), получим:

$$\frac{(P - R_2)a}{EF} + \frac{-R_2 b}{EF} = 0; \quad (23)$$

$$Pa - R_2 l = 0;$$

$$R_2 = P \frac{a}{l}.$$

Реакцию R_1 можно определить, подставив полученную величину в уравнение (17):

$$R_1 = P \frac{b}{l}.$$

Направление неизвестных реакций R_1 и R_2 можно принимать произвольно. Если в результате расчета они получились положительными, то направление выбрано верно. Если они получились отрицательными, то необходимо изменить направление указанных реакций:

(17) – уравнение равновесия;

(18), (19) – геометрические уравнения совместности деформаций;

(20), (21) – физические уравнения данной задачи (закон Гука);
 (23) – физическое уравнение совместности деформаций.

2.4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

План решения статически неопределимых задач:

1. Составляем уравнения равновесия (24).
2. Определяем степень статической неопределимости.
3. Из чисто геометрических соображений составляем геометрическое уравнение совместности деформаций (25).
4. Пользуясь физическими законами, выражаем деформации, вошедшие в уравнение (25) через внутренние усилия и внешние силы (26).
5. Составляем физическое уравнение совместности деформаций. Для этого уравнение (26) подставляем в уравнение (25) и получаем зависимость (27).
6. Решаем совместно уравнения (24) и физическое уравнение совместности деформаций (27).

Пример 2. Жесткий брус AS соединен с жесткой опорой посредством шарнира в точке S . К нему прикреплены два стержня 1 и 2, также соединенные с опорой. К конструкции приложена внешняя сила P (рис. 3). Раскрыть статическую неопределимость от действия внешней нагрузки.

1. Составление расчетной схемы (рис. 4):

$$\sum F_H = 0; \quad R_H + N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_B = 0; \quad R_B + N_1 + N_2 \sin \alpha - P = 0;$$

$$\sum M_S = 0; \quad 2aN_1 - 3aP + 4aN_2 \sin \alpha = 0. \quad (24)$$

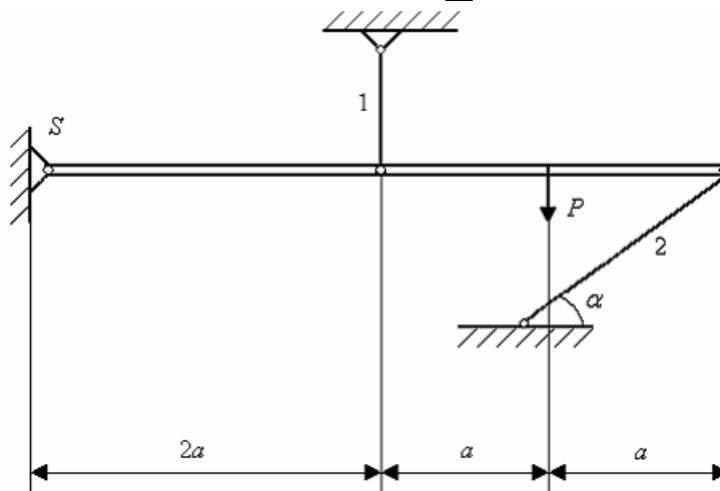


Рис. 3

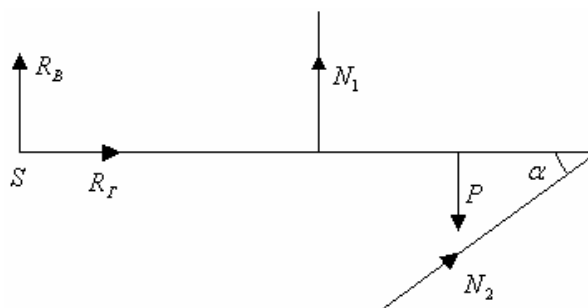


Рис. 4

Степень статической неопределимости равна единице.

Из уравнения (24) необходимо определить правильность направления реакций N_1 и N_2 .

Для симметричных схем: направления проекций на вертикальную ось реакций N_1 и N_2 и внешней силы P должны иметь разные знаки.

Для остальных схем: знаки моментов, создаваемых усилиями N_1 и N_2 , и внешней силой P в уравнении моментов относительно опоры должны быть противоположными.

2. Составление схемы деформации (рис. 5).

- 1) Показываем положение схемы в исходном положении.

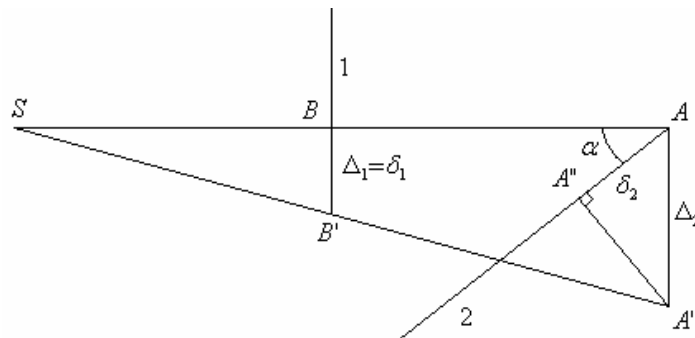


Рис. 5

2) Определяем, куда сместится жесткая балка от воздействия внешней силы, и показываем новое положение системы. При этом необходимо сделать два допущения:

- а) жесткая балка не деформируется;
- б) перемещение точек приложения стержней A и B происходит не по дугам окружностей, а строго вертикально.

Вертикальные перемещения точек приложения стержней обозначим через Δ_1 и Δ_2 .

3) Из вновь полученных точек A' и B' опускаем перпендикуляры на линии действия стержней в исходном состоянии. Обозначим деформации стержней через δ_1 и δ_2 .

4) Находим соответствие между вертикальными перемещениями Δ_1 и Δ_2 (для симметричных схем – из условия неразрывности конструкции; для других схем – из подобия треугольников):

$$\Delta SBB' \sim \Delta SAA' :$$

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{SB}{SA} ;$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} .$$

5) Выражаем вертикальные перемещения Δ_1 и Δ_2 через δ_1 и δ_2 :

$$\Delta_1 = \delta_1 ;$$

$$\Delta_2 = \frac{\delta_2}{\sin a} .$$

$$\frac{\delta_1 \sin a}{\delta_2} = \frac{1}{2} ;$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1}{2 \sin a} . \quad (25)$$

3. Выражаем деформации стержней через внутренние усилия в них (закон Гука):

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{EF_1} ; \\ \delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{EF_2} . \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4. Составляем физическое уравнение совместности деформаций, подставив уравнение (26) в уравнение (25):

$$\frac{1}{2 \sin a} = \frac{N_1 l_1 EF_2}{N_2 l_2 EF_1} . \quad (27)$$

Длины стержней l_1 и l_2 известны. Если дано соотношение площадей F_1/F_2 , используя его, сокращаем площади.

Получено недостающее уравнение. Решая его совместно с уравнением (1), можно определить усилия N_1 и N_2 .

5. После определения N_1 и N_2 рассчитывают площади F_1 и F_2 в соответствии с соотношением, через $[\sigma_p]$ и $[\sigma_{сж}]$.

6. Производим проверку правильности решения.

1) В определенном масштабе откладываем длину бруса SBA (рис. 6).

2) В точках приложения стержней проводим их линии действия.

3) Откладываем вертикальные перемещения стержней в направлении, соответствующем схеме деформаций (в другом масштабе).

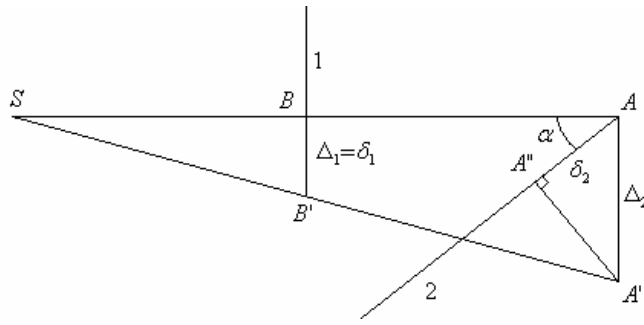


Рис. 6

Первая проверка: соединяем точки S , B' и A' . Полученная линия должна быть прямой, а не ломаной линией.

Вторая проверка: из полученных точек A' и B' проводим перпендикуляры на линии действия стержней в исходном состоянии. Получаем точки A'' и B'' . Измеренные величины BB'' и AA'' должны быть равны рассчитанным величинам δ_1 и δ_2 в выбранном масштабе деформации.

2.5. НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ОТ НЕТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Если хотя бы один из стержней шарнирно-стержневой системы выполнен не точно, т.е. его длина оказалась выше или ниже рассчитанной, то при сборке такой системы необходимо приложить дополнительные усилия. При этом все стержни системы после сборки будут подвергаться определенному силовому воздействию, даже при отсутствии внешних сил.

Если по условиям работы шарнирно-стержневой системы, выполненной точно, хотя бы один из стержней работает в условиях нагрева или охлаждения, то при этом происходит изменение его первоначальной длины (при нагреве – удлинение, при охлаждении – уменьшение первоначальной длины).

При решении подобных задач необходимо вначале определить величину температурной деформации, которая вычисляется по формуле

$$\Delta_t = \alpha \Delta t,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала стержня; Δt – перепад температур (может быть как больше, так и меньше нуля); l – длина стержня.

После определения температурной деформации данная задача решается подобно задачам, связанным с неточностью изготовления стержней.

Пример 3. В шарнирно-стержневой системе, состоящей из жесткого бруса и двух стержней, первый стержень выполнили короче на величину Δ (рис. 7). Раскрыть статическую неопределенность от неточности изготовления.

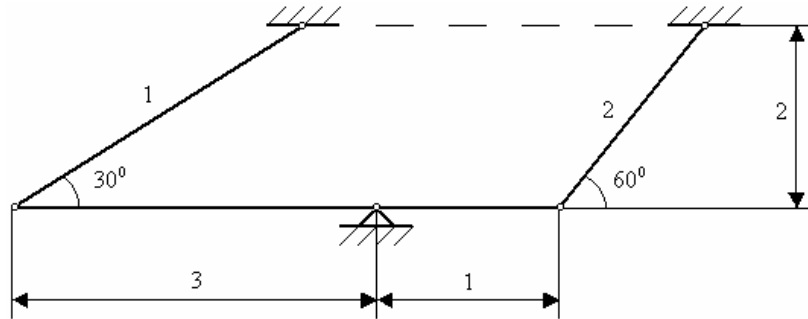


Рис. 7

1. Составление расчетной схемы (рис. 8).

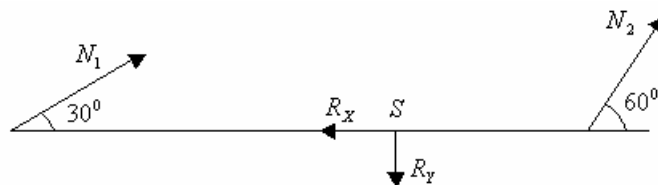


Рис. 8

Так как первый стержень выполнен короче, то при сборке системы его необходимо растянуть, т.е. внешнее усилие, приложенное к стержню – растягивающее. Реакция в этом стержне должна быть противоположна внешнему усилию.

Реакция во втором стержне должна уравнивать реакцию в первом стержне.

$$\sum F_x = 0, \quad N_1 \cos 30^\circ - R_x + N_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_1 \sin 30^\circ - R_y + N_2 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_S = 0, \quad -3N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0. \quad (28)$$

Проведем проверку правильности направления реакций:

Для симметричных схем: если имеется уравнение моментов, то знаки моментов должны быть противоположными. Для остальных схем: в уравнении проекции на вертикальную ось знаки реакций должны быть противоположными. Степень статической неопределимости равна единице.

2. Составление схемы деформаций (рис. 9).

1) Изображаем схему в исходном состоянии.

2) Мысленно отбрасываем стержень, выполненный точно (второй стержень). Так как первый стержень выполнен короче, то вертикальное перемещение точки A откладываем вверх.

3) Опустим из точки C перпендикуляр на линию действия стержня в исходном состоянии. Получим точку A' .

4) Проведем прямую CS и опустим вертикаль из точки B . Получим точку D . Если бы отсутствовал стержень 2, то брус занял бы положение CSD .

5) Так как стержень 2 реально присутствует и оказывает влияние на стержневую систему, то под его воздействием брус займет какое-то среднее положение между нейтральным ASB и крайним CSD .

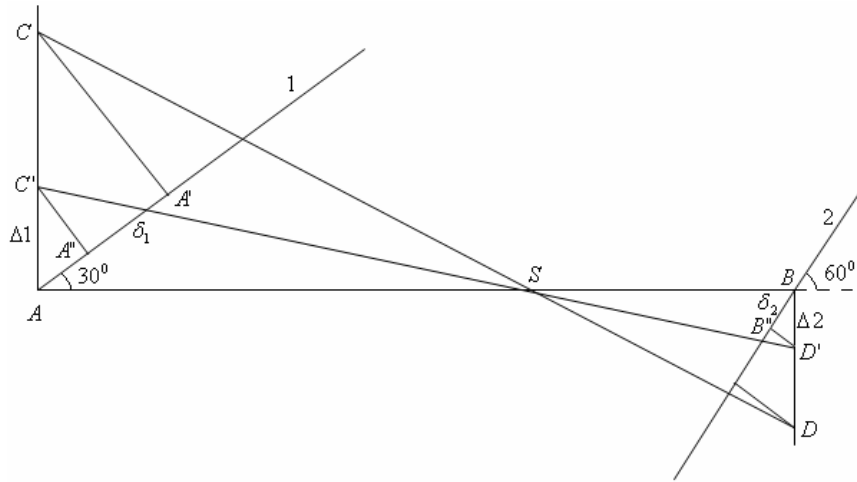


Рис. 9

Положение $C'SD'$ – реальное положение жесткого бруса. Реальное вертикальное перемещение первого стержня $AC' = \Delta 1$, второго стержня – $BD' = \Delta 2$.

6) Опустим перпендикуляры из точек реального положения бруса C' и D' на линии действия стержней в исходном состоянии. Получим точки A'' и B'' . При этом деформация второго стержня $BB'' = \delta_2$, второго стержня $A'A'' = \delta_1$.

Стержень 1 реально удлинится при сборке на величину $A'A'' = \delta_1$, так как его первоначальное положение после изготовления оканчивалось в точке A' .

7) Ищем связь между вертикальными перемещениями $\Delta 1$ и $\Delta 2$ (подобно предыдущему разделу):

$$\Delta AC'S \sim \Delta SBD' :$$

$$\frac{AC'}{BD'} = \frac{AS}{SB} ;$$

$$\frac{\Delta 1}{\Delta 2} = 3 . \quad (29)$$

8) Выражаем вертикальное перемещение через деформации в стержнях.

Из $\Delta BD'B''$ и $\Delta AC'A''$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta 2 &= \frac{\delta_2}{\sin 60^\circ} ; \\ \Delta 1 &= \frac{AA''}{\sin 30^\circ} = \frac{\Delta - \delta_1}{\sin 30^\circ} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$AA' - A'A'' = AA'' .$$

Подставим (30) в (29):

$$\frac{(\Delta - \delta_1) \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ \delta_2} = 3 ;$$

$$\Delta - \delta_1 = \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \delta_2 ;$$

$$\delta_1 - \delta_2 \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \Delta . \quad (31)$$

3. Составление физического уравнения совместности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \\ \delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Подставим (32) в (31):

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} + \frac{N_2 l_2}{EF_2} \frac{3 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \Delta. \quad (33)$$

В подобных задачах площади F_1 и F_2 – заданы. Решая совместно уравнения (33) и (28) определим реакции N_1 и N_2 .

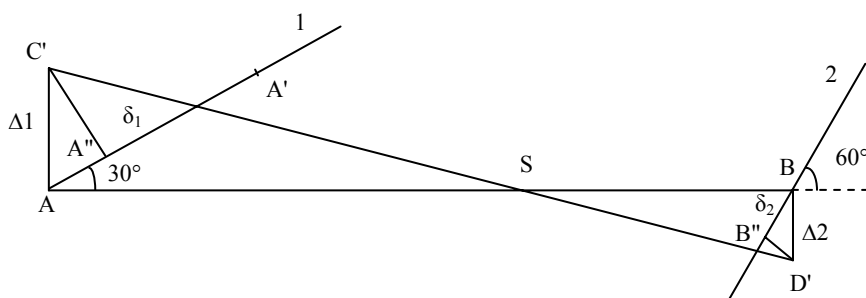
4. Произведем проверку правильности решения.

1) Откладываем брус ASB в определенном масштабе. В точках приложения стержней проводим их линии действия (см. схему деформаций рис. 9).

2) Откладываем вертикальные перемещения $\Delta 1$ и $\Delta 2$ в направлениях, соответствующих схеме деформаций (в масштабе деформаций), рис. 10.

Первая проверка: линия $C'SD'$ должна быть прямой.

3) Из точек C' и D' опускаем перпендикуляры на линии действия стержней.



Вторая проверка: измеренные величины $BB'' = \delta_2$, $AA'' = \Delta - \delta_1$ должны равняться рассчитанным значениям в соответствующем масштабе деформаций.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 623 с.
3. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 303 с.
4. Миролобов, И.Н. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для технических вузов / И.Н. Миролобов [и др.]. – М. : Высшая школа, 1985. – 399 с.
5. Бояринов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояринов. – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	3
2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	10
2.1. Растяжение-сжатие прямого бруса	10
2.2. Определение деформаций при растяжении-сжатии	11
2.3. Статически неопределимый брус	13
2.4. Статически неопределимые стержневые системы	15
2.5. Напряжения, возникающие в стержневых системах от неточности изготовления и температурных деформаций	19
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	23