А. М. Охримовский, П. А. Комозинский
О. В. Подшивалова, И. В. Лунёв

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
“Харьковский авиационный институт”

А. М. Охримовский, П. А. Комозинский
О. В. Подшивалова, И. В. Лунёв

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие
к практическим занятиям по физике

Харьков “ХАИ” 2010

УДК 531 + 536

Механика. Молекулярная физика. Термодинамика : уч. пособ. к практ. занятиям по физике /А. М. Охримовский, П. А. Комозинский, О. В. Подшивалова, И. В. Лунёв. — Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харк. авиац. ин-т", 2010. – 116 с.

Предложены варианты задачи для девяти практических занятий по физике, которые охватывают такие темы: "Механика" "Механические колебания и волны", "Молекулярная физика", "Основы термодинамики", "Явления переноса". К каждой теме приведена таблица с формулами, а также примеры решения типичных задач, что окажет существенную помощь студентам во время самостоятельной работы.

Для студентов, которые учатся в высших технических учебных заведениях III-IV уровней аккредитации.

Ил. 2. Табл. 9. Библиогр.: 9 названий

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Пятак,
д-р физ.-мат. наук, проф. Р. В. Вовк

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы пособия поставили перед собой цель помочь студентам в освоении основных методов решения задач по физики. Решение конкретных физических задач побуждает студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать явления, обнаруживать главные факторы, пренебрегать неважными деталями. Благодаря этому решение задач приближается к модели научного профессионального исследования.

Предложенные задачи охватывают широкий перечень разделов курса “Экспериментальная и теоретическая физика”, в частности: “Кинематика поступательного движения”, “Динамика поступательного движения”, “Кинематика и динамика вращательного движения”, “Работа. Энергия. Законы сохранения”, “Элементы специальной теории относительности”, “Механические колебания и волны”, “Молекулярная физика”, “Основы термодинамики”, “Явления переноса”. Во время подготовки этого пособия были использованы задачи из книг [1–3] и др. За основу было взято учебное пособие [4].

В этом издании существенно переработаны формулировки некоторых задач, систематизировано распределение задач по разделам, исправлены недостатки и ошибки, допущенные ранее. Пособие дополнено задачами для повторения школьной программы.

Все разделы пособия предназначены для закрепления на практике теоретических знаний, приобретённых студентами на лекциях. Они содержат основные определения и законы, связывающие физические величины, которые имеют отношение к теме раздела. Также приведены примеры решения задач. Задачи всех разделов разделены на варианты по пять задач в каждом. Большинство разделов содержит по четыре варианта задач. Ответы к задачам основного курса представлены в конце пособия, чтобы стимулировать студента самостоятельно найти решение.

Каждый раздел (кроме последнего) имеет подраздел, который содержит задачи для повторение школьной программы. Цель этой части пособия — помочь студентам, которые не сдавали экзаменов по физике во время поступления в вуз, самостоятельно вспомнить школьный материал, решая соответствующие задачи.

В конце пособия, перед ответами к задачам основного курса, приведено приложение со значениями некоторых физических величин. Кроме того, приложение содержит некоторые формулы дифференциального и интегрального исчисления.

Во время решения задач по механики авторы рекомендуют, если другое не предусмотрено условием, для ускорения свободного падения g использовать значение 10 м/с^2.

Авторы признательны преподавателям кафедры физики Национального аэрокосмического университета "ХАИ" и лично заведующему кафедрой А. А. Тарану за замечания, рекомендации и пожелания относительно содержания и оформления этого пособия.

Глава 1

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
1.1	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	Радиус-вектор	$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты; x, y, z – координаты
1.2	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Модуль радиуса-вектора	
1.3	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$	Вектор скорости	$v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$
1.4	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	Модуль вектора скорости	
1.5	$v = \frac{ds}{dt}$, $s = \int\limits_0^t v(t)\,dt$	Связь пути с модулем вектора скорости	

1	2	3	4
1.6	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$	Вектор ускорения	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$
1.7	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Модуль вектора ускорения	
1.8	$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$	Тангенциальная и нормальная составляющие вектора ускорения	$\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательный к траектории; $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к траектории; R – радиус кривизны траектории
1.9	$\vec{v} = \vec{v}(0) + \int\limits_0^t \vec{a}(t)\,dt$	Вектор скорости	
1.10	$\vec{r} = \vec{r}(0) + \int\limits_0^t \vec{v}(t)\,dt$	Радиус-вектор	

Пример 1.1. Радиус-вектор материальной точки задан в виде

$$\vec{r} = \vec{i}\,A\cos\omega t + \vec{j}\,B\sin\omega t,$$

где A, B и ω — постоянные величины. Какой вид имеет траектория движения точки. Определить векторы скорости и ускорения и их модули, тангенциальную и нормальную составляющие ускорения, а также радиус кривизны траектории как функции времени.

Решение. Сравнив уравнение для заданного радиуса-вектора с соотношением (1.1) таблицы, имеем

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\sin\omega t,$$

откуда $\frac{x}{A} = \cos\omega t$, $\frac{y}{B} = \sin\omega t$. Сумма квадратов правых частей этих соотношений дает единицу. Левые же части дадут уравнение траектории движения точки

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Траектория движения — эллипс с центром в начале координат и полуосями A и B.

Дифференцируя радиус-вектор по времени, определяем вектор скорости и его модуль:

$$\vec{v} = \omega(-\vec{i}\,A\sin\omega t + \vec{j}\,B\cos\omega t);$$

$$v = \omega\sqrt{A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}.$$

После повторного дифференцирования по времени определяем вектор ускорения и его модуль:

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2(\vec{i}\,A\cos\omega t + \vec{j}\,B\sin\omega t);$$

$$a = \omega^2\,r = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}.$$

Дифференцирование модуля скорости по времени даёт величину вектора тангенциального ускорения

$$a_\tau = \omega^3\frac{(A^2 - B^2)}{2v}\sin 2\omega t.$$

Нормальную компоненту ускорения определяем по теореме Пифагора:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\omega^3 AB}{v}.$$

Из формулы $a_n = v^2/R$ находим радиус кривизны траектории

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{\omega AB}.$$

Пример 1.2. Тело брошено горизонтально с высоты h со скоростью v_0. Определить вектор скорости тела и его радиус-вектор как функции времени.

Решение. Для решения задачи выберем систему координат таким образом, чтобы начало отсчёта было расположено в основе перпендикуляра, который опущен из точки бросания тела на Землю. Направляя ось x по горизонтали, а ось y вертикально вверх, получим, как известную величину, ускорение тела $\vec{a} = -g\vec{j}$, где $g = 10$ м/с^2, $\vec{j}$ — единичный вектор вдоль оси y. Начальные условия для координат и компонент скорости имеют вид $x(0) = 0$, $y(0) = h$, $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$. Эта задача есть обратной задачей кинематики, поэтому её решают методом интегрирования.

Компоненты ускорения определяются формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Интегрирование обеих частей этих уравнений дает

$$v_x = v_x(0) + \int\limits_0^t a_x\,dt = v_x(0) = v_0,\; v_y = v_y(0) + \int\limits_0^t a_y\,dt = -g\,t.$$

Таким образом, в выбранной системе отсчёта вектор скорости тела имеет вид

$$\vec{v} = v_0\vec{i} - g\,t\vec{j}.$$

Чтобы определить радиус-вектор найдём его компоненты — координаты x и y как функции времени. Для этого необходимо выполнить интегрирование соответствующих компонент скорости v_x и v_y по времени:

$$x = x(0) + \int\limits_0^t v_x\,dt = v_0\,t; \quad y = y(0) + \int\limits_0^t v_y\,dt = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Окончательно радиус-вектор тела имеет вид

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = v_0\,t\,\vec{i} + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}.$$

Пример 1.3. Путь s, который проходит тело, зависит от времени t и описывается законом

$$s = s_0 \ln \frac{t + t_0}{t_0},$$

где s_0 и t_0 — постоянные величины в единицах длины и времени соответственно. Найти модуль вектора скорости и тангенциальное ускорение как функции времени.

Решение. Используя связь, заданную формулами (1.5) и (1.8), находим

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{s_0}{t + t_0}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{s_0}{(t + t_0)^2}\,.$$

Пример 1.4. Модуль вектора скорости тела v зависит от пройденного им пути s:

$$v = v_0 \frac{s_0 - s}{s_0},$$

где v_0 и s_0 — постоянные величины в единицах скорости и длины соответственно. Определить скорость тела и пройденный им путь как функции времени. Считать, что в начальный момент времени путь равняется нулю ($s(0) = 0$).

Решение. Воспользуемся определением модуля скорости через пройденный путь:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{s_0 - s}{s_0}.$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо провести разделение неизвестных, для чего помножим правую и левую его части на $\frac{dt}{s-s_0}$. В результате получим эквивалентное уравнение в дифференциалах:

$$\frac{ds}{s-s_0} = -\frac{v_0}{s_0}\,dt.$$

Поскольку правая часть уравнения зависит лишь от пути s, а левая — лишь от времени t (все другие величины — постоянные), то каждую из них можно проинтегрировать независимо:

$$\int\limits_{s(0)}^{s} \frac{ds}{s-s_0} = -\int\limits_{0}^{t} \frac{v_0}{s_0}\,dt.$$

После интегрирования, учитывая, что $s(0) = 0$, получаем

$$\ln\left(\frac{s_0 - s}{s_0}\right) = -\frac{v_0}{s_0}\,t.$$

Решив это уравнение относительно s, находим

$$s = s_0\left(1 - \exp\left(-\frac{v_0}{s_0}\,t\right)\right).$$

Скорость как функцию времени определим, взяв производную от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{v_0}{s_0}t\right).$$

Следует отметить, что в начальный момент времени тело имело скорость v_0, которая со временем экспоненциально уменьшается к нулю. При этом тело проходит путь, величина которого приближается к s_0.

Вариант 1.1

1.1.1. Зависимость пути, пройденного телом, от времени задано уравнением $s = -B\,t + C\,t^2$, где $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2.

Найти среднюю скорость $\langle v\rangle$ и среднее ускорение $\langle a\rangle$ тела для интервала времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с.

1.1.2. Радиус-вектор материальной точки имеет вид $\vec{r} = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j}$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Начертить траекторию движения точки. Определить векторы скорости $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$, их модули v и a, нормальную a_n и тангенциальную a_τ составные ускорения, а также радиус кривизны траектории R как функции времени.

1.1.3. Вектор скорости движения тела задан уравнением $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где α и β — постоянные величины. В начальный момент времени тело имело координаты $x_0 = y_0 = 0$. Определить радиус-вектор, векторы скорости и ускорение тела как функции времени.

1.1.4. За промежуток времени $\tau = 10$ с точка прошла половину окружности радиусом $R = 1$ м. Определить среднюю скорость $\langle v\rangle$, модуль среднего вектора скорости $|\langle\vec{v}\rangle|$, модуль среднего вектора ускорения $|\langle\vec{a}\rangle|$. Движение точки считать равномерным.

1.1.5. Скорость тела, которое движется по инерции в вязкой среде, изменяется с течением времени по закону $v = v_0 e^{-\nu t}$, где v_0 — начальная скорость, ν — постоянная величина. Найти зависимости пути и ускорение тела от времени. Построить графики функций $v(t)$ и $s(t)$. Принять, что в начальный момент времени $s_0 = 0$.

Вариант 1.2

1.2.1. Зависимость пути, пройденного телом, от времени описывается уравнением $s = Bt + Ct^2$, где $B = 2$ м/с, $C = 1$ м/с^2. Определить среднюю скорость и среднее ускорение тела за первые десять секунд ($t_f = 10$ с) его движения.

1.2.2. Зависимость радиуса-вектора частички от время задано законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k}$. Определить векторы скорости $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$, их модули v и a, нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие ускорения, а также радиус кривизны траектории R как функции времени.

1.2.3. Вектор скорости частички $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$. Определить вектор ускорения и его модуль, вектор перемещения и его модуль за первые две секунды ($t_f = 2$ с) движения частички.

1.2.4. Точка движется по дуге окружности радиусом R. Зависимость скорости ее движения v от пройденного пути s задано уравнением $v = k\sqrt{s}$, где k — постоянная. Определить зависимости $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$, принимая путь в начальный момент времени равным нулю. Найти угол α между вектором ускорения и вектором скорости в зависимости от времени t.

1.2.5. Точка движется в плоскости так, что её нормальная и тангенциальная составные ускорения соответственно равны $a_n = 2\cos\pi t$, $a_\tau = 2\sin\pi t$. Учитывая, что в начальный момент времени путь $s(0)$ и скорость $v(0)$ равны нулю, определить зависимость от времени пути, скорости и радиуса кривизны траектории.

Вариант 1.3

1.3.1. Зависимость пути s, пройденного телом, от времени задано уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0.14$ м/с^2, $D = 0.01$ м/с^3. Через какое время t_f после начала движения тело будет иметь ускорение $a_f = 1$ м/с^2? Найти среднее ускорение на этом промежутке времени.

1.3.2. Радиус-вектор тела задан в виде $\vec{r} = 2\cos\omega t\,\vec{i} + 2\sin\omega t\,\vec{j}$, $\omega = \mathrm{const}$. Какой вид имеет траектория движения тела? Определить векторы скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$, их модули v и a, нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие ускорения, а также радиус кривизны траектории

R как функции времени.

1.3.3. Вектор скорости движения тела задан уравнением $\vec{v} = 2\,t\,\vec{i} + 3\,t^2\,\vec{j} + 4\,t^3\,\vec{k}$. Определить радиус-вектор тела как функцию времени, учитывая, что $x(0) = y(0) = z(0) = 0$. Найти модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$, осуществлённого телом к моменту времени $t_1 = 2$ с.

1.3.4. Найти путь и скорость движения тела как функции времени, если его ускорение $a = \frac{dv}{dt} = -rv$, где r — постоянная величина, v — скорость тела, $s(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

1.3.5. Компоненты вектора скорости движения тела изменяются по законам

$$v_x = v_0 \cos\omega t, \qquad v_y = v_0 \sin\omega t,$$

где v_0 и ω — константы. Определить векторы и модули скорости и ускорение, а также угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{v}$.

Вариант 1.4

1.4.1. Частичка в момент $t_0 = 0$ вышла с начала координат и дальше двигалась прямолинейно таким образом, что её скорость изменялась с течением времени по закону

$$v = v_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

где v_0 и τ — постоянные величины. Определить ускорение частички и её путь как функции времени.

1.4.2. Радиус-вектор материальной точки задан уравнением

$$\vec{r} = 3\,t^2\,\vec{i} + 4\,t^2\,\vec{j} + 7\,\vec{k}.$$

Определить векторы скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$, их модули v и a, нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие ускорения как функции времени. Найти путь, который пройдёт материальная точка за первые десять секунд ($t_f = 10$ с).

1.4.3. Тело брошено горизонтально с высоты h со скоростью v_0. Определить радиус-вектор $\vec{r}$, векторы скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$, их модули v и a, нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие ускорения и радиус кривизны траектории как функции времени.

1.4.4. Частичка движется прямолинейно. Зависимость скорости ее движения от пути подчиняется закону $v = k\sqrt{s}$, где k — постоянная величина. Учитывая, что в начальный момент времени $s(0) = 0$, определить скорость и ускорение частички как функции времени, а также среднюю скорость частички за время, на протяжении которого она пройдёт путь s_1 с момента начала движения.

1.4.5. Точка движется по плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $a_\tau = c$, а нормальное ускорение $a_n = bt^4$ (c и b — постоянные величины). В момент времени $t = 0$ точка находилась в состоянии покоя. Определить радиус кривизны траектории R и ускорение a как функции пройденного пути s. Принять, что при $t = 0$ путь равняется нулю.

Задачи для повторения школьной программы

1.Ш.1. Между двумя пунктами, расположенными на противоположных берегах реки на расстояния 100 км один от другого, курсирует катер. Катер проходит это расстояние по течению за четыре часа, а против течения — за десять часов. Определить скорость v_1 течения реки и скорость v_2 катера относительно воды.

Ответ: $v_1 = 7.5$ км/ч; $v_2 = 17.5$ км/ч.

1.Ш.2. Спортсмен переплывает реку шириной d. Под каким углом к течению он должен плыть, чтобы попасть на противоположный берег за кратчайшее время? Где он в этом случае пристанет к берегу и какое расстояние s проплывёт, если скорость течения v_1, а скорость спортсмена относительно воды v_2?

Ответ: $\alpha = 90°$; $s_1 = \frac{v_1}{v_2} d$; $s = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{v_2} d$.

1.Ш.3. На дистанции длиной $s = 1500$ м одновременно стартуют два бегуна. Бегун А пробегает первую половину пути со скоростью $v_1 = 4$ м/с, а вторую – со скоростью $v_2 = 6$ м/с. Бегун В бежит первую половину времени, затраченного на преодоление всей дистанции, со скоростью $v_1 = 4$ м/с, а другу – со скоростью $v_2 = 6$ м/с. Который из бегунов финиширует первым? На какое расстояние он обгонит второго бегуна?

Ответ: первым финиширует бегун В; $\Delta s = 75$ м.

1.Ш.4. Движения материальных точек заданы такими уравнениями: а) $x_1 = 10t + 0.4t^2$; б) $x_2 = 2t - t^2$. Написать зависимости $v_x = v_x(t)$ для каждой точки; построить графики этих зависимостей, определить вид движения в каждом случае.

Ответ: а) $v_{1x} = 10 + 0.8t$, ускоренный; б) $v_{2x} = 2 - 2t$, замедленный сначала, но ускоренный после первой секунды.

1.Ш.5. Расстояние между двумя станциями поезд проехал за 20 минут ($t = 20$ мин) со средней скоростью $v_c = 72$ км/ч. Общая продолжительность равномерных разгона и торможения представляет $t_1 = 4$ мин, а остальное время поезд двигался равномерно. Какую скорость v имел поезд во время равномерного движения?

Ответ: $v = \frac{2v_c t}{2t-t_1} = 80$ км/ч.

1.Ш.6. Тормозной путь автомобиля, который двигался со скоростью $v_1 = 15$ км/ч, представляет $s_1 = 1.5$ м. Определить тормозной путь s_2 этого автомобиля, если он будет двигаться со скоростью $v_2 = 90$ км/ч. Ускорение в обоих случаях одинаковое.

Ответ: $s_2 = 54$ м.

1.Ш.7. Тело бросили вертикально вверх с начальной скоростью $v_{01} = 40$ м/с. Одновременно из наивысшей точки, которую может достичь первое тело, вертикально вниз бросили второе тело со скоростью $v_{02} = 40$ м/с. На какой высоте встретятся тела? Какие скорости они будут иметь?

Ответ: $h = 35$ м, $v_1 = 30$ м/с, $v_2 = 50$ м/с.

1.Ш.8. На протяжении какого времени и с какой высоты падало тело, если за последние две секунды оно пролетело 60 м?

Ответ: $t = 4$ с, $h = 80$ м.

1.Ш.9. Расстояние между двумя остановками моторная лодка проходит по течению реки за 10 мин, а против течения — за 30 мин. За какое время это расстояние проплывёт спасательный круг, который упал в воду?

Ответ: $t_3 = 30$ мин.

1.Ш.10. Расстояние от пункта А до пункта В автомобиль проехал с скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а назад вернулся со скоростью $v_2 = 20$ км/ч. Какова средняя скорость автомобиля? *Ответ*: $v_c = 30$ км/ч.

1.Ш.11. Движение двух мотоциклистов заданы уравнениями $x_1 = 15 + t^2$ и $x_2 = 8t$. Описать движение каждого мотоциклиста, определить время и место их встречи.

Ответ: $t_1 = 3$ с, $x_1' = 24$ м; $t_2 = 5$ с, $x_2' = 40$ м.

1.Ш.12. Кабина лифта сначала равноускоренно поднимается вверх на протяжении 4 с, достигая скорости 4 м/с. Дальше она движется равномерно на протяжении 8 с, а последние 3 с замедляет ход до полной остановки. Построить графики зависимостей скорости и ускорения лифта от времени. Определить перемещение лифта за все время движения.

Ответ: $s = 46$ м.

1.Ш.13. Одно тело сбросили с высоты $h_1 = 10$ м. В тот самый момент второе тело бросили с высоты $h_2 = 20$ м вертикально вниз, с некоторой начальной скоростью. Тела упали на землю одновременно. Определить начальную скорость второго тела.

Ответ: $v_{02} = 7$ м/с.

1.Ш.14. Свободно падающее тело, проходит последнюю треть своего пути за 1.1 с. Найти высоту, с которой падало тело, и весь время падения.

Ответ: $H = 180$ м, $t = 6$ с.

Глава 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
2.1	$\vec{p} = m\vec{v}$	Импульс тела (материальной точки)	$\vec{v}$ – скорость; m – масса
2.2	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\Sigma}$	Второй закон Ньютона в универсальной форме	$\vec{F}_{\Sigma}$ – равнодействующая сил, которые действуют на точку
2.3	$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} =$ $= m\vec{a} = \vec{F}_{\Sigma}$	Второй закон Ньютона в дифференциальной форме	$\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки
2.4	$M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}_{\Sigma}$	Теорема о движении центра масс системы материальных точек	M – общая масса системы

1	2	3	4
2.5	$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1} N\vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1} Nm_i}$	Радиус-вектор центра масс	$\vec{r}_i$ – радиусы-векторы составляющих системы
2.6	$\vec{V}_C = \frac{\sum_{i=1} N\vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1} Nm_i} = \frac{\vec{p}_\Sigma}{M}$	Скорость центра масс системы N материальных точек	$\vec{v}_i$ и m_i – соответственно скорости и массы составляющих системы; $\vec{p}_\Sigma$ – общий импульс системы
2.7	$\vec{F} = m\vec{g}$	Сила тяготения	$\vec{g}$ – ускорение свободного падения
2.8	$\vec{F}_A = -\vec{g}\rho V$	Выталкивающая сила (закон Архимеда)	ρ – плотность жидкости (газа); V – объем вытесненной жидкости
2.9	$\vec{F} = -k\vec{x}$	Сила упругого взаимодействия (закон Гука)	k – коэффициент упругости; x – удлинение
2.10	$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$	Сила гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)	G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы тел; $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор второго тела относительно первого

1	2	3	4
2.11	$F = PS$	Сила давления	P – давление; S – площадь поверхности
2.12	$F = T$	Сила натяжения нити	Действует вдоль нитки
2.13	$F = N$	Сила реакции опоры	Перпендикулярная к поверхности соприкосновения
2.14	$F = \mu N$	Сила трения скольжения	Действует в направлении, противоположному направлению движения; μ – коэффициент трения
2.15	$F_{\text{р}} = u\frac{dm}{dt}$	Реактивная сила	u – относительная скорость истечения газов
2.16	$\vec{F} = q\vec{E}$	Сила электрического взаимодействия	q – заряд; $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля
2.17	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	Сила магнитного взаимодействия	$\vec{B}$ – вектор магнитной индукции

Пример 2.1. На тело действует сила

$$\vec{F} = F_0 \left(3 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \vec{i} + 5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 \vec{j} \right),$$

где $F_0 = 5$ Н, $\tau = 1$ с. Определить изменение вектора импульса тела за промежуток времени $0 \leq t \leq \tau$.

Решение. Использовав второй закон Ньютона в дифференциальной форме, имеем

$$d\vec{p} = \vec{F}\, dt.$$

Для определения изменения импульса за конечный отрезок времени необходимо проинтегрировать последнее уравнение, подставив в него зависимость силы от времени:

$$\Delta\vec{p} = \int\limits_0^\tau F_0 \left(3 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \vec{i} + 5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 \vec{j} \right) dt = F_0 \tau (\vec{i} + \vec{j}).$$

После подстановки числовых значений имеем $\Delta\vec{p} = 5\,(\vec{i} + \vec{j})$ — изменение импульса тела, кг·м/с.

Пример 2.2. Автомобиль отправляется с места стоянки и движется под действием постоянной силы тяги двигателя F_0. Учитывая, что общая сила сопротивления пропорциональная скорости ($\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где α — постоянная величина, кг/с), определить скорость автомобиля как функцию времени и его предельную скорость.

Решение. II закон Ньютона для автомобиля имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - \alpha v,$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \left(v - \frac{F_0}{\alpha} \right).$$

Чтобы решить это дифференциальное уравнение, необходимо провести разделения переменных. Для этого умножим правую и левую его части на dt и разделим на $\left(v - \frac{F_0}{\alpha}\right)$. В результате получим равнозначное уравнение

$$\frac{dv}{v - \frac{F_0}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}\,dt,$$

каждая часть которого зависит лишь от одной неизвестной. Каждая из этих частей может быть проинтегрирована независимо одна от одной:

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{v - \frac{F_0}{\alpha}} = -\int\limits_0^t \frac{\alpha}{m}\,dt.$$

После интегрирования имеем

$$\ln\left(\frac{\frac{F_0}{\alpha} - v}{\frac{F_0}{\alpha}}\right) = -\frac{\alpha t}{m}.$$

После потенцирования окончательно получаем уравнение для скорости автомобиля как функции времени:

$$v = \frac{F_0}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha\, t}{m}\right)\right).$$

Предельную скорость автомобиля определяем при $t \to \infty$:

$$v_\infty = \frac{F_0}{\alpha}.$$

Последнее выражение согласовывается с решением уравнения движения автомобиля, в котором правую часть равна 0. (При выходе на предельную скорость изменение скорости (ускорение) стремится к нулю.)

Пример 2.3. На тело единичной массы, которое находится в покое в начале координат, в нулевой момент времени начинает действовать сила, которая зависит от времени согласно закону $\vec{F} = 2\vec{i} + 6t\,\vec{j}$. Определить вид траектории движения тела.

Решение. Поскольку масса тела $m = 1$, то для него II закон Ньютона в компонентах имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = 2, \quad \frac{dv_y}{dt} = 6t.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$v_x = v_x(0) + \int\limits_0^t 2\,dt, \quad v_y = v_y(0) + \int\limits_0^t 6t\,dt.$$

Поскольку в начальный момент времени тело было в состоянии покоя, то $v_x(0) = v_y(0) = 0$, откуда

$$v_x = 2\,t, \quad v_y = 3\,t^2.$$

Для определения зависимости координат тела от времени воспользуемся определением компонент скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\,t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 3\,t^2.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$x = x(0) + \int\limits_0^t 2\,t\,dt, \quad y = y(0) + \int\limits_0^t 3\,t^2\,dt.$$

Согласно начальным условиям $x(0) = y(0) = 0$. Поэтому

$$x = t^2, \quad y = t^3.$$

Эти соотношения задают траекторию движения тела в параметрическому виде. Выразив из первого уравнения параметр t через координату x $(t = \sqrt{x})$ и подставив его во второе, получим уравнение траектории в декартовых координатах:

$$y = x^{3/2}.$$

Вариант 2.1

2.1.1. На тело массой m, которое лежит на ровной горизонтальной плоскости, в момент $t_0 = 0$ начала действовать сила, которая зависит от времени: $F = kt$, где k — постоянная величина. Направление этой силы и линия горизонта образовывают все время угол α. Найти скорость тела в момент отрыва от плоскости и путь, который прошло тело до этого момента.

2.1.2. При движении парашютиста в воздухе силу сопротивления можно считать заданной в виде $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $\vec{v}$ — скорость. Считая, что в момент раскрытия парашюта начальная скорость движения парашютиста равняется нулю, а его масса m, определить скорость парашютиста и путь как функции времени. Найти скорость установившегося движения.

2.1.3. На горизонтальной плоскости лежит тело массой m. В момент времени $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, которая зависит от времени: $F = bt$, где $b = \mathrm{const}$. Определить путь, который прошло тело за первые t секунд действия этой силы, если коэффициент трения скольжения по плоскости μ.

2.1.4. Определить изменение импульса материальной точки под действием силы $\vec{F} = 4t^3\vec{i} + 2t\vec{j}$ за промежуток времени $0 \leq t \leq \tau$.

2.1.5. Найти положение центра масс системы Земля – Луна. Среднее расстояние между Землёй и Луной $L_{Mm} = 3.84 \cdot 10^5$ км, масса Земли $M = 5.96 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $m = 7.3 \cdot 10^{22}$ кг.

Вариант 2.2

2.2.1. Найти модуль и вектор силы, которая действует на частичку массой m во время её движения в плоскости xy по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, где A, B, ω — постоянные величины.

2.2.2. Шарик массой m расположили в высоком сосуде с некоторой жидкостью и отпустили без толчка. Плотность шарика в n раз больше плотности жидкости. Во время движения шарика возникает сила сопротивления среды, пропорциональная скорости движения: $\vec{F} = -r\vec{v}$. Определить скорость шарика как функцию времени.

2.2.3. На тело массой m, которое равномерно двигалось вдоль оси x с скоростью $v_{0x} = v_0$, в некоторой момент времени начала действовать сила $\vec{F} = b\,t\,\vec{j}$, где $b = \text{const}$. Считая, что в этот момент тело находилось в точке $x_0{=}y_0{=}0$, записать уравнение траектории движения тела в плоскости xy.

2.2.4. На частичку, которая находилась в покое, в момент времени $t_0 = 0$ начала действовать сила $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin\frac{\pi t}{\tau}$, где $\vec{F}_0$ — постоянный вектор, τ — время действия силы. Определить импульс частички после окончания действия силы.

2.2.5. Посреди невесомого стрежня длиной $2l$ размещён небольшой шарик массой m, на его концах — шарики с массами $2m$ и $3m$. Определить положение центра масс этой системы относительно её геометрического центра.

Вариант 2.3

2.3.1. Маленькой шайбе, размещённой на верхней грани клина (угол наклона к горизонту α) на расстоянии h от ребра, в начальный момент времени сообщили скорость v_0 параллельно к ребру клина. Пренебрегая трением, определить траекторию движения шайбы в плоскости клина. Считать, что $x(0) = 0$, $y(0) = h$.

2.3.2. Лодка под парусом развила скорость v_0, а потом парус был спущен. Считая, что сила сопротивления движения лодки пропорциональная скорости $\vec{F} = -r\vec{v}$, где $r = \text{const}$, определить скорость движения лодки и пройденный путь как функции времени.

2.3.3. Вектор силы задано в виде $\vec{F} = 6\,t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$. Для тела единичной массы определить траекторию движения при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$, $v_x(0) = v_y(0) = 0$.

2.3.4. Тело массой m брошено под углом к линии горизонта. Во время движения тела по траектории между точками А и В изменение импульса тела по величине составило $|\Delta\vec{p}|$. Определить время полёта тела между точками А и В.

2.3.5. Плотность тонкого стержня длиной l линейно увеличивается с увеличением расстояния от одного из его концов: $\rho = \rho_0(1 + \frac{x}{l})$. Определить положение центра масс стержня.

Вариант 2.4

2.4.1. Тело брошено с высоты h с начальной скоростью v_0, направленной под углом α к линии горизонта. Пренебрегая сопротивлением воздуха, записать уравнение траектории движения тела.

2.4.2. На тело массой m, которое движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0, в некоторый момент времени в направлении движения начинает действовать сила $F = \alpha/2v$, где $\alpha = \text{const}$, v — мгновенная скорость тела. Определить зависимость скорости тела от временами.

2.4.3. Материальная точка массой m приходит в движение в момент времени $t_0 = 0$ под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega t$, где $\vec{F}_0$ и ω — постоянные величины. Определить путь, который проходит материальная точка, в зависимости от времени.

2.4.4. Часть шнура, положенного на горизонтальную доску свисает через отверстие в ней. Длина шнура l длина свисающей части l_0. В начальный момент времени шнур отпускают, и он начинает скользить по доске. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью выскользнет из отверстия конец шнура.

2.4.5. Определить положение центра масс однородного конуса высотой H.

Задачи для повторения школьной программы

2.Ш.1. Движение материальной точки описывается уравнением $x = 5 - 8t + 4t^2$. Считая, что масса точки равняется 2 кг, определить ее импульс через 2 с и 4 с после начала отсчёта времени, а также силу, которая обусловила это изменения импульса.

Ответ: $p_1 = 16$ кг·м/с; $p_2 = 48$ кг·м/с; $F = 16$ Н.

2.Ш.2. Тепловоз массой 100 т тянет два вагона, каждый из которых имеет массу 50 т, с ускорением 0.1 м/с^2. Определить силу тяги тепловоза и силу натяжения сцепок, если коэффициент сопротивления движению равняется 0.006.

Ответ: $F_{\text{т}} = 32$ кн, $F_{\text{н1}} = 16$ кН, $F_{\text{н2}} = 8$ кН.

2.Ш.3. Определить силу натяжения троса лифта массой 500 кг в начале и в конце подъёма, если ускорение в обеих случаях составляет 2 м/с^2.

Ответ: $F_{\text{н1}} = 6$ кН, $F_{\text{н2}} = 4$ кН.

2.Ш.4. Груз массой m с помощью нити, перекинутой через невесомый блок, тянет по наклонной плоскости груз такой же массы. Определить ускорение, с которым движутся грузы, если наклонная плоскость образовывает с линией горизонта угол $\alpha = 30°$, а коэффициент трения $\mu = 0.05$.

Ответ: $a = 2.2$ м/с^2.

2.Ш.5. К концам нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешено два тела массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. С каким ускорением будут двигаться тела и с какой силой при этом будет натянута нить? С каким ускорением будет двигаться тело массой $m_1 = 1$ кг, если ко второму концу нити вместо подвешенного тела массой $m_2 = 2$ кг приложить силу $F = 20$ Н? Массой блока и трением пренебречь.

Ответ: $a_1 = g/3$, $F_н = 13$ Н, $a_2 = g$.

2.Ш.6. Две пружины одинаковой длины, которые скреплены одними концами, растягивают за свободные концы руками. Пружина жёсткостью 100 Н/м удлинилась на 5 см. Какова жёсткость второй пружины, если она удлинилась на 1 см?

Ответ: $k = 0.5$ кН/м.

2.Ш.7. Снаряд, который летел в горизонтальном направлении со скоростью $v = 700$ м/с, разорвался на две части массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 5$ кг. Направление движения большего куска осталось после взрыва горизонтальным, а его скорость увеличилась до $v_2 = 1200$ м/с. Определить скорость меньшей части и угол между направлениями движения частей.

Ответ: $v_1 = 133.3$ м/с, $\alpha = \pi$.

2.Ш.8. Пустой грузовой автомобиль массой 4 т начал движение с ускорением 0.3 м/с^2. Какой должна быть масса груза, чтобы автомобиль, имея такую же силу тяги, двигался с места с ускорением 0.2 м/с^2?

Ответ: $m_в = 2$ т.

2.Ш.9. На гладкой горизонтальной поверхности лежат три связанных нитью тела с одинаковыми массами $m = 1$ кг. На первое тело действует сила $F = 9$ Н, направленная горизонтально. Найти ускорение, с которым будет двигаться система этих тел, а также натяжение каждой из нитей. Трение не учитывать.

Ответ: $a = 3$ м/с^2, $F_{12} = 6$ Н, $F_{23} = 3$ Н.

2.Ш.10. На вершине наклонной плоскости, которая образовывает с линией горизонта угол $\alpha = 30°$, закреплён блок, через который перекинута нерастяжимая нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_1 = 6$ кг, который лежит на наклонной плоскости. Ко второму концу нити подвешен груз массой $m_2 = 5$ кг. С каким ускорением движется эта система тел и чему равняется натяжение нитей, если коэффициент трения скольжения груза m_1 по плоскости $\mu = 0.3$?

Ответ: $a \approx 0.4$ м/с^2, $F_{\text{н}} = 47$ Н.

2.Ш.11. Лифт спускается с ускорением $|a| = 3$ м/с^2. Найти силу давления груза массой $m = 50$ кг на пол лифта.

Ответ: $F_{\text{т}} = 350$ Н.

2.Ш.12. Две гири массой $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 3$ кг висят на концах нити, перекинутой через лёгкий блок, причём более лёгкая гиря находится на $h = 10$ см ниже от массивной. Через какое время гири будут на одной высоте, если предоставить гирям возможность двигаться под действием силы тяготения?

Ответ: $t \approx 0.2$ с.

2.Ш.13. Определить удлинение буксирного троса, жёсткость которого 100 кН/м, во время буксирования автомобиля массой 2 т с ускорением 0.5 м/с^2. Трением пренебречь.

Ответ: $\Delta x = 1$ см.

2.Ш.14. Лодка массой $m_1 = 140$ кг стоит неподвижно в стоящей воде. Человек массой $m_2 = 60$ кг, что находится в лодке, переходит с носа на корму. При этом лодка смещается на расстояние $\Delta s = 1.2$ м. Определить длину лодки. Сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $l = 4$ м.

Глава 3

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
3.1	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	Мгновенная угловая скорость	$d\vec{\varphi}$ – элементарный угол поворота
3.2	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Угловое ускорение	Производная угловой скорости по времени
3.3	$\nu = \frac{N}{t}$	Частота равномерного вращения	N – полное количество оборотов за время t
3.4	$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu}$	Период равномерного вращение	
3.5	$s = \varphi\, R$	Путь, пройденный точкой по дуге окружности	φ – угол поворота в радианах; R – радиус окружности
3.6	$v = \omega\, R$	Модуль линейной скорости точки	ω – угловая скорость; R – радиус траектории

1	2	3	4
3.7	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	Вектор линейной скорости	$\vec{r}$ – радиус-вектор точки, проведённый от оси вращения
3.8	$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon\, R$	Модуль вектора тангенциального ускорения точки	ε – угловое ускорение
3.9	$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$	Вектор тангенциального ускорение	
3.10	$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$	Модуль вектора нормального ускорения	
3.11	$\vec{\omega} = \text{const}$, $\vec{\varepsilon} = 0$, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$	Кинематические уравнения равномерного вращения	φ_0 – угол поворота в начальный момент времени
3.12	$\vec{\varepsilon} = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	Кинематические уравнения равноускоренного вращения	ω_0 – начальная угловая скорость

1	2	3	4
3.13	$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$, $\omega = \omega_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon(t)\,dt$	Общие кинематические уравнения вращательного движения тела ($\varepsilon \neq \mathrm{const}$)	
3.14	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $M = Fr\sin\alpha$	Вектор момента силы и его модуль	$\vec{F}$ – вектор силы; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки; α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{r}$
3.15	$J = mr^2$	Момент инерции материальной точки	m – масса материальной точки; r – расстояние от оси вращения до точки
3.16	$J = \sum m_i r_i^2$	Момент инерции системы материальных точек	
3.17	$J_z = \int\limits_m r^2\,dm = \int\limits_V \rho r^2\,dV$	Момент инерции абсолютно твёрдого тела относительно оси z	ρ – плотность тела; dV – элементарный объем

1	2	3	4
3.18	а) $J_z = \frac{1}{12}ml^2$; б) $J_z = \frac{1}{3}ml^2$	Момент инерции однородного тонкого стрежня относительно оси, перпендикулярной к нему и проходящей через его: а) центр масс; б) конец	m – масса стрежня; l – длина стрежня
3.19	$J_z = mR^2$	Момент инерции тонкого кольца относительно оси, которая проходит через его центр перпендикулярно к плоскости кольца	m – масса кольца; R – радиус кольца
3.20	$J_z = \frac{1}{2}ml^2$	Момент инерции круглого однородного цилиндра относительно его оси симметрии	m – масса цилиндра; R – радиус цилиндра

1	2	3	4
3.21	$J_z = \frac{2}{5}mR^2$	Момент инерции однородного шара относительно оси, которая проходит через его центр	m – масса шара; R – радиус шара
3.22	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	Вектор момента импульса материальной точки	$\vec{p}$ – импульс материальной точки; $\vec{r}$ – её радиус-вектор
3.23	$L_\omega = J_\omega \omega$	Момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения	J_ω – момент инерции относительно оси обращения; ω – угловая скорость
3.24	$J_{\text{O}} = J_{\text{C}} + ma^2$	Момент инерции тела относительно некоторой оси (теорема Штейнера)	J_{C} – момент инерции тела относительно оси, параллельной к выбранной и проходит через центр масс тела; m – масса тела; a – расстояние между осями
3.25	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$	Уравнение моментов	

1	2	3	4
3.26	$J_\omega\varepsilon = M_\omega$	Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси	M_ω – момент силы относительно оси вращения; ε – угловое ускорение

Пример 3.1. В течении некоторого времени t частота вращения маховика уменьшилась от $\nu_0 = 10$ Гц до $\nu = 6$ Гц. При этом маховик вращался равнозамедленно и совершил 50 оборотов ($N = 50$). Найти угловое ускорение ε маховика и время торможения t.

Решение. Угловая скорость ω маховика, который вращается равнозамедленно с угловым ускорением ε, зависит от времени t:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

где ω_0 — угловая скорость в начальный момент времени.

Угол поворота маховика φ во время такого движения определяется уравнением

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Исключая время из этих соотношений, можно выразить угловое ускорение через угол поворота и начальное и конечное значения угловой скорости:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi}.$$

Поскольку $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi\nu$, то

$$\varepsilon = \frac{\pi(\nu_0^2 - \nu^2)}{N}.$$

Продолжительность торможения определим из первой формулы, используя полученные формулы для углового ускорения:

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = (\omega_0 - \omega)\frac{2\varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\varphi}{\omega + \omega_0} = \frac{2N}{\nu + \nu_0}.$$

Подставив числовые значения ν, ν_0 N и выполнив вычисление, имеем

$$\varepsilon = 4.02 \text{ об/с}^2, \quad t = 6.25 \text{ с}.$$

Пример 3.2. Вал в виде однородного цилиндра массой $m_1 = 10$ кг одет на горизонтальную ось. На цилиндр накручен нить, к свободному концу которой подвешена гиря массой $m_2 = 2.5$ кг. С каким ускорением будет опускаться гиря, если ее отпустить?

Решение. В этой задаче поступательное движение гири и вращательное движение вала связаны между собой. Согласно второму закону Ньютона ускорение гири a определяют силы, действующие на неё. На гирю действуют сила тяготения $m_2 g$ и сила натяжения нити T, Поскольку,

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Ускорение гири a равняется тангенциальному ускорению a_τ точек на цилиндрической поверхности вала и связано с угловым ускорением вала соотношением

$$a = a_\tau = \varepsilon R \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{R},$$

где R — радиус вала.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение вала ε определяется моментом M сил, которые на него действуют, и его моментом инерции J. $J\varepsilon = M$. Лишь сила натяжения нити T создаёт момент вала $M = TR$. Для сплошного однородного цилиндра момент инерции $J = m_1 R^2/2$.

Подставляем в уравнение моментов выражения для M, J и ε:

$$\frac{m_1 R^2}{2}\frac{a}{R} = TR \to \frac{m_1 a}{2} = T.$$

Последнее выражение для T подставим в первое уравнение и получим уравнение с одной неизвестной a:

$$m_2 a = m_2 g - \frac{m_1 a}{2}.$$

Решив это уравнение относительно ускорения a, получаем

$$a = g\frac{2m_2}{2m_2 + m_1}.$$

После подстановки числовых значений окончательно имеем $a = g/3 \approx 3.3$ м/с^2.

Вариант 3.1

3.1.1. Маховик начал вращаться равноускоренно и через 10 секунд ($\Delta t = 10$ с) имел частоту вращения $\nu = 300$ мин$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε и число оборотов N, которые он совершил на протяжении этого времени.

3.1.2. Вращение диска радиусом $R = 20$ см описывается уравнением $\varphi = B\,t + C\,t^3$, где $B = -1$ рад/с, $C = 0.1$ рад/с^3. Определить ускорение a точек на ободе диска, а также его тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие в момент времени $t = 5$ с.

3.1.3. Во время вращения махового колеса его угловое ускорение изменяется по закону $\varepsilon = a - b\omega$, где a, $b \neq 0$ — постоянные величины. Какой будет угловая скорость маховика через t секунд после начала торможения, если перед торможением она равняла ω_0?

3.1.4. Какую силу нужно приложить к земному шару, чтобы остановить его вращение за время $T = 24$ часа? Землю считать однородным сплошным шаром радиусом $R_з = 6.37 \cdot 10^6$ м и массой $M_з = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг.

3.1.5. Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из этих тел подымется выше? Найти отношение высот поднятия.

Вариант 3.2

3.2.1. Велосипедное колесо вращается с частотой $\nu_0 = 5$ Гц. Под действием силы трения оно остановилось через время $t = 1$ мин. Считая вращение колеса равнозамедленным, найти угловое ускорение ε и количество оборотов N, осуществлённых колесом в течении этого времени.

3.2.2. На барабан радиусом $R = 0.5$ м намотана нить, к концу которой подвешена гиря массой $m = 1$ кг. Определить момент инерции барабана, если известно, что гиря за время $t = 2$ с опускается на высоту два метра ($h = 2$ м).

3.2.3. Ротор двигателя низкого давления (ТРДД – турбореактивный двухконтурный двигатель) вращается с частотой $\nu = 10^4$ мин$^{-1}$. Время остановки двигателя τ (время с момента прекращения подачи топлива в двигатель до его полной остановки) составляет 50 с. Считая, что момент силы трения не зависит от скорости вращения, и пренебрегая другими моментами, определить мощность P, которую развивает двигатель, если момент инерции ротора $J = 18$ кг$\cdot$м^2.

3.2.4. По горизонтальному столу может катиться без скольжения цилиндр массой m, на который намотана нить. К свободному концу нити, перекинутой через лёгкий блок, подвешен груз с такой же массой. Системе предоставлена возможность действовать самостоятельно. Найти ускорение груза и силу трения между цилиндром и столом. Задачу решить для сплошного и полого цилиндров.

3.2.5. Сплошной однородный диск радиусом $R = 10$ см, который имеет начальную угловую скорость $\omega_0 = 50$ рад/с, вращается относительно своей оси симметрии. Диск кладут основой на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов совершит диск до его остановке, если коэффициент трения между диском и плоскостью $\mu = 0.1$ не зависит от угловой скорости вращения диска?

Вариант 3.3

3.3.1. Угол поворота колеса радиусом $R = 5$ см изменяется с течением времени по закону

$$\varphi = A + B\,t + C\,t^2 + D\,t^3,$$

где $D = 1$ рад/с^3. Для точек на ободе колеса найти изменение тангенциального ускорения Δa_τ за каждую секунду.

3.3.2. Колесо диаметром D вращается таким образом, что линейная скорость точек на его ободе зависит от времени t по закону

$$v = v_0 \frac{\tau^2}{(t+\tau)^2}.$$

Найти зависимость угловой скорости ω и углового ускорения ε, а также угла поворота φ (считая, что в начальный момент он равняется 0) от времени.

3.3.3. Маховик с равномерно распределённой массой $m = 6$ кг и диаметром $D = 10$ см свободно вращается вокруг горизонтальной оси, которая проходит через его центр. Частота обращения $\nu_0 = 840$ мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через $\Delta t = 15$ с. Найти тормозной момент и количество оборотов, которое совершит маховик до полной остановки.

3.3.4. Однородный шар массой m и радиусом R вращается вокруг оси, которая проходит через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид

$$\varphi = B\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

Найти как функцию времени момент силы M, действующей на шар.

3.3.5. Вал массой $m = 50$ кг и диаметром $D = 10$ см вращается с частотой $\nu_0 = 16$ Гц. К боковой поверхности вала прижата колодка с силой $F = 31.4$ Н, под действием которой вал остановился через время $\tau = 10$ с. Определить коэффициент трения μ.

Вариант 3.4

3.4.1. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов N проделал диск при изменении частоты вращения от $\nu_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $\nu_2 = 90$ мин$^{-1}$? Найти время Δt, в течении которого это состоялось.

3.4.2. Маховик диаметром D вращается вокруг своей оси. При этом уравнение зависимости угла поворота маховика от времени имеет вид

$$\varphi = A + B\,t^2 + C\,t^3.$$

Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε вращения маховика, а также линейную скорость и тангенциальное ускорение точек на ободе маховика.

3.4.3. Через блок в виде диска массой $m = 50$ г перекинута тонкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 75$ г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если дать системе действовать самостоятельно?

3.4.4. Сравнить ускорение, с которыми будут катиться без скольжения по наклонной плоскости два цилиндра, один из которых полый, а другой — однородный сплошной. Зависит ли отношение ускорений цилиндров от их геометрических размеров?

3.4.5. Пуля массой $m = 5$ г летит со скоростью $v = 200$ м/с и натыкается на выступ неподвижного зубчатого колеса, момент инерции которого $J = 0.2$ кг·м^2. Расстояние от точки попадания пули до оси вращения $R = 30$ см. Считая столкновение неупругим, определить угловую скорость колеса ω, с которой оно начнёт вращаться. Пуля двигалась в плоскости вращения колеса.

Задачи для повторения школьной программы

3.Ш.1. Скорость точек рабочей поверхности наждачного круга, который имеет диаметр 300 мм, не должна превышать 35 м/с. Можно ли насадить этот круг на вал электродвигателя, который осуществляет 1400 оборотов в минуту?

Ответ: можно.

3.Ш.2. Круглая пила имеет диаметр 600 мм. На ось пилы насажен шкив диаметром 300 мм, который приводится во вращение с помощью ременной передачи от шкива диаметром 120 мм, насаженного на вал электродвигателя. Какова скорость зубьев пилы, если вал электродвигателя осуществляет 1200 оборотов в минуту?

Ответ: $v = 15$ м/с.

3.Ш.3. Если радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли увеличить в четыре раза, то период его вращения увеличится в восемь раз. Как и в сколько раз изменится скорость движения спутника на орбите?

Ответ: уменьшится вдвое.

3.Ш.4. Две материальные точки двигаются по окружностям радиусами R_1 и R_2, причём $R_1 = 2R_2$. Сравнить их центростремительные ускорения в таких случаях: а) скорости одинаковые; б) периоды вращения точек одинаковые.

Ответ: а) 1:2; б) 2:1.

3.Ш.5. Мальчик бросил горизонтально мяч из окна, расположенного на высоте 20 м. На протяжении какого времени мяч летел к земле и с какой скоростью его было брошено, если он упал на расстоянии 6 м от фундамента дома?

Ответ: $t = 2$ с, $v_0 = 3$ м/с.

3.Ш.6. Тело брошено с высоты h над поверхностью земли со скоростью v_0 под углом α к линии горизонта. Найти: 1) максимальную высоту поднятия над поверхностью земли H; 2) время полёта t; 3) горизонтальную дальность помета s; 4) скорость тела v в момент удара об землю.

Ответ: 1) $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + h$; 2) $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}}$; 3) $s = v_0 t \cos\alpha$; 4) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

3.Ш.7. Каким должен быть радиус круговой орбиты искусственного спутника и его линейная скорость, чтобы период вращения спутника был таким же, как и Земли?

Ответ: $R = 4.2 \cdot 10^7$ м; $v = 3.1$ км/с.

3.Ш.8. Самолет выходит из пикирования, описывая в вертикальной плоскости дугу окружности радиусом 800 м и имея в нижней точке траектории скорость 200 м/с. Какую перегрузку испытает лётчик в нижней точке?

Ответ: 6.

3.Ш.9. Тело лежит на поверхности диска, который вращается в горизонтальной плоскости, на расстоянии $R = 4$ см от оси вращения. Коэффициент трения между поверхностями тела и диска $\mu = 0.2$. При какой угловой скорости вращения тело начнёт сползать с диска?

Ответ: $\omega > \sqrt{\mu g/R}$.

3.Ш.10. Радиус рабочего колеса гидротурбины в восемь раз больший, а частота обращения в 40 раз меньшая, чем те же параметры паровой турбины. Сравнить скорости и центростремительные ускорения точек обода колёс турбин.

Ответ: $v_1 : v_2 = 1 : 5$; $a_1 : a_2 = 1 : 200$.

3.Ш.11. Мальчик прыгает в воду с крутого берега высотой 3.2 м, имея после разбега горизонтально направленную скорость 6 м/с. Какими будут скорость движения мальчика и угол между вектором скорости и поверхностью воды в момент касания мальчиком воды?

Ответ: $v = 10$ м/с; $\alpha = \arcsin 0.8$.

3.Ш.12. Какую начальную скорость футболист должен сообщить мячу во время выполнения одиннадцатиметрового штрафного удара, чтобы мяч попал под верхнюю перекладину футбольных ворот? Начальная скорость мяча направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к линии горизонта, высота ворот $h = 2.44$ м.

Ответ: $v_0 \approx 12$ м/с.

3.Ш.13. Спутник движется вокруг сферической планеты, на высоте $h = 0.12\ R$ (R — радиус планеты) над её поверхностью. Определить среднюю плотность вещества планеты, если период вращения спутника $T = 1.5$ часа?

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3 \approx 6.81 \cdot 10^3$ кг/м^3.

3.Ш.14. На экваторе некоторой планеты тело весит вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты $\rho = 3$ г/см^3. Найти период вращения планеты вокруг своей оси.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} \approx 9703$ с $= 2$ час 41 мин 43 с.

Глава 4

РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
4.1	$\delta A = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$	Элементарная механическая работа	$\vec{F}$ – вектор силы; $d\vec{r}$ – вектор элементарного перемещения
4.2	$A = \int\limits_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$	Работа при перемещении вдоль криволинейной траектории	L – траектория, вдоль которой происходит перемещение
4.3	$A = F\, s \cos\alpha$	Работа постоянной силы при прямолинейном движении тела	s – путь, пройденный телом; α – угол между направлением действия силы и перемещением

1	2	3	4
4.4	$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Мощность	δA – работа, выполненная на протяжении времени dt
4.5	$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Кинетическая энергия поступательного движения	m, v, p – масса, скорость и импульс тела
4.6	$U = \frac{kx^2}{2}$	Потенциальная энергия деформированного тела	x – деформация; k – коэффициент упругости
4.7	$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек	m_1, m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между телами; G – гравитационная постоянная

1	2	3	4
4.8	$U = mgh$	Потенциальная энергия тела в поле силы тяготения	h – высота тела над поверхностью; m – масса тела
4.9	$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$	Связь силы с потенциальной энергией	$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты
4.10	$\vec{F} = -\frac{d}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$	Связь центральной силы с её потенциалом	
4.11	$E = E_K + U = \mathrm{const}$	Закон сохранения механической энергии	E – полная механическая энергия; E_K – кинетическая энергия; U – потенциальная энергия
4.12	$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$	Элементарная работа при вращательном движении	$\vec{M}$ – момент силы; $d\vec{\varphi}$ – элементарный угол поворота

1	2	3	4
4.13	$E_K = \frac{J\omega^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	J – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения

Пример 4.1. Снаряд, который летел горизонтально на высотые $H = 40$ м со скоростью $v = 100$ м/с, разорвался на две равные части. Одна часть через время $t = 1$ с падает на землю точно под местом разрыва. Определить скорости движения частей снаряда сразу после взрыва.

Решение. Движение первой части снаряда после взрыва — это падение с начальной скоростью u_1, направленною вертикально вниз. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то время t и высота падения H этой части будут связаны уравнением

$$H = u_1 t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2}.$$

Скорость движения частей снаряда изменяется вследствие взрыва под действием сил давления газов, которые возникают во время взрыва. Если обе части снаряда рассматривать как систему тел, то эти силы станут внутренними и потому не будут изменять импульс системы. Силы, которые возникают во время взрыва, есть настолько большими, что сравнительно с ними можно пренебречь действием других сил (тяготение, сопротивления воздуха) на каждую из частей снаряда. В этому случая систему можно считать замкнутой на протяжении времени взрыва. Согласно закону сохранения импульса импульс системы в течение взрыва не меняется :

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

где $\vec{p}_0 = m\vec{v}$ — импульс снаряда до взрыва (m — масса снаряда до взрыва); $\vec{p}_1 = m\vec{u}_1/2$ и $\vec{p}_2 = m\vec{u}_2/2$ — импульсы частей снаряда после взрыва; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — векторы скорости частей снаряда после взрыва.

Рассматривая последнее уравнение в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} mv &= \frac{m}{2}u_{2x}; \\ 0 &= \frac{m}{2}u_1 - \frac{m}{2}u_{2y}, \end{cases}$$

где u_{2x} и u_{2y} — компоненты вектора скорости второй части снаряда после взрыва.

Из этой системы имеем $u_{2x} = 2v$, $u_{2y} = u_1$. Используя теорему Пифагора $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$, выразим скорость второй части снаряда u_2 через скорость снаряда до взрыва v и скорость его первой части u_1:

$$u_2 = \sqrt{4v^2 + u_1^2}.$$

Подставив числовые значения, получаем $u_1 \approx 35$ м/с, $u_2 \approx 203$ м/с.

Пример 4.2. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом $R = 20$ см сначало был раскручен до частотя вращения $\nu = 480$ мин.$^{-1}$, а потом ему была предоставлена возможность двигаться самостоятельно. Вследствие трения маховик остановился. Найти момент M силы трения, считая его постоянным, если маховик до полной остановки совершил 200 оборотов ($N = 200$).

Решение. Вся кинетическая энергия, которую сначала имел маховик, тратится на работу по преодолению силы трения. Тогда, работа силы трения A равна начальной кинетической энергии, взятой с противоположным знаком:

$$A = -\frac{J\omega^2}{2},$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — начальная угловая скорость маховика, J — его момент инерции.

Поскольку сила трения и ее момент M являются постоянными величинами, можно записать

$$A = M\varphi,$$

где $\varphi = 2\pi N$ — угол поворота маховика до остановки.

Учитывая, что момент инерции маховика $J = mR^2/2$, запишем выражение для момента силы трения:

$$M = -\frac{J\omega^2}{2\varphi} = -\frac{mR^2}{2}\frac{4\pi^2\nu^2}{2\,2\pi N} = -\frac{\pi m R^2\nu^2}{2N}.$$

После подстановки в последнюю формулу числовых значений найдем момент силы трения $M \approx 0.56$ Н·м.

Вариант 4.1

4.1.1. Пуля массой $m = 10$ г, которая летела со скоростью $v = 600$ м/с, попала в баллистический маятник массой $M = 5$ кг и застряла в нем. На какую высоту h, отклонившись после удара, поднялся маятник?

4.1.2. На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком общей массой $m_1 = 5 \cdot 10^3$ кг. В песок попадает снаряд массой $m_2 = 5$ кг, который летел вдоль рельсов. В момент попадания скорость движения снаряда составляет $v_2 = 400$ м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 60^\circ$ к линии горизонта. Найти скорость движения платформы, если снаряд застрянет в песке.

4.1.3. На пружине длиной $l_1 = 30$ см висит груз массой $m_1 = 4$ кг. При увеличении массы груза до $m_2 = 10$ кг пружина удлиняется до $l_2 = 37$ см. Найти работу растяжения пружины.

4.1.4. Скорость движения поезда массой $m = 3 \cdot 10^6$ кг изменяется по закону $v = D + B\,t + C\,t^2$. Найти работу силы тяги за промежуток времени от $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с, если $D = 1$ м/с, $B = 0.1$ м/с^2, $C = 0.01$ м/с^3.

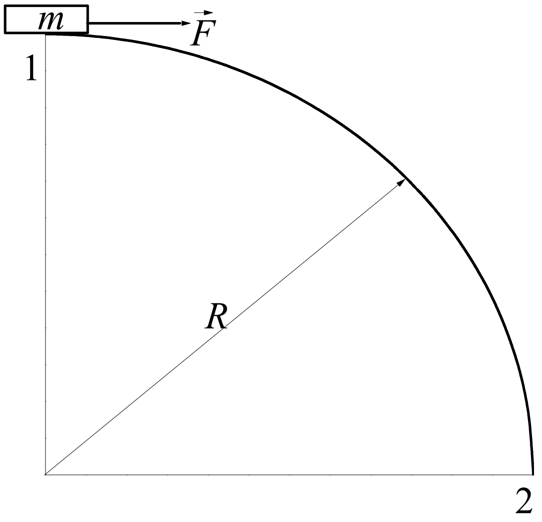

Рис. 4.1

4.1.5. Муфта массой $m = 0.125$ кг (рис. 4.1) движется по гладкому проводу, согнутому в горизонтальной плоскости в виде дуги окружности радиусом $R = 0.4$ м. В точке 1 на муфту, имеющую скорость $v_1 = 8$ м/с, начала действовать постоянная горизонтальная сила $\vec{F}$. Найти скорость муфты в точке 2, если $F = 30$ Н.

Вариант 4.2

4.2.1. Цепочка массой $m = 1.5$ кг и длиной $l = 1.25$ м подвешена на нити так, что ее нижний конец касается поверхности стола. После пережигання нити цепочка упала на стол. Найти импульс, переданный цепочкой столу.

4.2.2. После абсолютно упругого столкновения тела массой m_1, которое двигалось поступательно, с телом массой m_2, которое было в покое, оба тела разлетелись симметрично относительно направления вектора скорости первого тела до удара. Найти зависимость угла разлета α от отношения масс тел $n = m_1/m_2$.

4.2.3. Брусок массой $m = 1$ кг лежит на горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени ему сообщили начальную скорость $v_0 = 1.5$ м/с. Найти среднюю мощность $\langle N \rangle$

силы трения за все время движения бруска, если коэффициентом трения бруска о поверхность $\mu = 0.2$.

4.2.4. Телу, которое лежало на поверхности Земли, сообщили первую космическую скорость, направленную вертикально вверх. На какую высоту $h_{\max}$ подымется тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.2.5. Санки, которые двигались по льду с начальной скоростью v_0, въезжают на асфальт. Длина полозьев санок $l = 1$ м. Коэффициент трения по асфальту $\mu = 0.625$. При какой начальной скорости санки полностью выедут на асфальт? Считать, что масса санок равномерно распределена по их длине. Трением по льду пренебречь.

Вариант 4.3

4.3.1. Локомотив массой m начинает в движение от станции со скоростью, которая изменяется по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, где α — постоянная величина, s — пройденный путь. Найти суммарную работу сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

4.3.2. Найти изменение кинетической энергии системы из двух шариков массами m_1 и m_2 во время их абсолютно неупругого столкновения. Перед столкновением шарики имели скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

4.3.3. Маховик с моментом инерции $J = 40$ кг·м^2 начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы $M = 20$ Н·м. Момент силы действовал в течение времени $\tau = 20$ с. Найти кинетическую энергию, приобретенную маховиком.

4.3.4. Акробат прыгает на сетку с высоты $H_1 = 4$ м над сеткой. На какой предельной высоте h_1 над полом нужно натянуть сетку, чтобы акробат не ударился об пол во время прыжка? Известно, что сетка прогибается на $h_2 = 1$ м, если акробат прыгает на нее с высоты $H_2 = 2$ м над сеткой.

4.3.5. Однородный ящик в виде куба перемещают на некоторое расстояние сначала волоком, потом перекатыванием через ребро. При каком значении коэффициента трения скольжения работы во время перемещения ящика волоком и перекатыванием будут одинаковыми?

Вариант 4.4

4.4.1. Платформа в виде диска радиусом $R = 1.5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $\nu_0 = 10$ мин.$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если перейдёт на край платформы?

4.4.2. Молотком массой $m_1 = 1$ кг забивают в стену гвоздь массой $m_2 = 25$ г. Найдите КПД удара молотка. Удар считать неупругим.

4.4.3. Вертикально размещенный однородный стрежень длиной l и массой M может вращаться вокруг горизонтальной оси, которая проходит через его конец. В точку, которая находится на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от оси вращения, ударяется шарик массой m, которая летит перпендикулярно к стрежня и его оси вращения. После удара стержень отклоняется на угол α, а шарик отлетает назад. Найти скорости шарика до удара v_0 и после удара v.

4.4.4. В течение какого времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной $l = 2$ м и высотой $h = 10$ см?

4.4.5. Небольшой движущийся шарик испытывает упругое столкновенье с неподвижным шариком такой же массы. Под каким углом разлетятся шарики в случае не лобового столкновения? Считать, что во время столкновения вращение не возникает.

Задачи для повторения школьной программы

4.Ш.1. Троллейбус массой 15 т трогается с места с ускорением 1.4 м/с^2. Определить работу силы тяги A_1 и работу силы сопротивления A_2 на первых 10 м пути, если коэффициент сопротивления равняется 0.02. Какую кинетическую энергию приобрёл троллейбус?

Ответ: $A_1 = 240$ кДж; $A_2 = -30$ кДж; $W_{_K} = 210$ кДж.

4.Ш.2. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы по наклонной плоскости с углом наклона 30° поднять груз массой 400 кг на высоту 2 м, если коэффициент трения равняется 0.3? Определить КПД наклонной плоскости.

Ответ: $A = 12$ кДж; $\eta = 66$ %.

4.Ш.3. Определить среднюю полезную мощность, которую развивает самолёт во время разбега, если масса самолёта 1 т, длина разбега 300 м, взлётная скорость 30 м/с, а коэффициент сопротивления 0.03. Движение самолёта во время разбега считать равноускоренным.

Ответ: $\langle P \rangle = 27$ кВт.

4.Ш.4. Тело массой 0.5 кг, брошенное под углом 45° к линии горизонта, упало на горизонтальную поверхность на расстоянии 16 м от места броска. Найти работу, израсходованную на бросание тела.

Ответ: $A = 40$ Дж.

4.Ш.5. Самолёт массой 10^3 кг летит горизонтально на высоте 1120 м с скоростью 60 м/с. Потом с отключённым двигателем самолёт начинает снижаться и приземляется, имея скорость 20 м/с. Определить силу сопротивления воздуха во время снижения, считая, что по инерции самолёт пролетел 8 км.

Ответ: $F = 1600$ Н.

4.Ш.6. На тележке массой 20 кг, находящейся в состоянии покоя, стоит человек массой 60 кг. Какую скорость относительно Земли разовьёт тележка, если человек пойдет по тележке со скоростью 1 м/с относительно ее поверхности?

Ответ: $v_з = 0.75$ м/с.

4.Ш.7. Два тела массой 10 кг и 15 кг подвешены на нитях длиной 2 м так, что касаются друг друга. Одно тело отвели вбок так, чтобы угол между нитями равнял $60°$, и отпустили. На которую высоту поднимутся тела после удара, если удар был абсолютно неупругим?

Ответ: $h = 0.16$ м.

4.Ш.8. Частичка массой m, движущаяся со скоростью v, испытывает упругое столкновение с неподвижной частичкой массой $m/2$ и продолжает двигаться под углом $30°$ к направлению своего первоначального движения. С какой скоростью после столкновения пришла в движение вторая частичка?

Ответ: $v_2 = v\frac{2}{\sqrt{3}}$.

4.Ш.9. Какую работу выполняет человек, поднимая груз массой 2 кг на высоту 1 м с ускорением 3 м/с^2?

Ответ: $A = 26$ Дж.

4.Ш.10. Сани съезжают с горы высотой $h = 10$ м, склон которой образует с линией горизонта угол $\alpha = 45°$. Дальше сани двигаются по горизонтальному участку. Коэффициент трения саней на всем пути одинаковый и равняется $\mu = 0.08$. Определить расстояние, которое пройдут сани по горизонтальному участку до полной остановки.

Ответ: $s = 115$ м.

4.Ш.11. Автомобиль массой 1500 кг, двигатель которого имеет мощность 75 кВт, поднимается вверх со скоростью 36 км/ч. Определить угол наклона горы. Трением пренебречь.

Ответ: $\alpha = 30°$.

4.Ш.12. Тело брошено в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v = 15$ м/с. Через сколько секунд после начала движения кинетическая энергия тела увеличится вдвое?

Ответ: $t = 1.5$ с.

4.Ш.13. Самолёт, масса которого составляет 2 т, летит в горизонтальном направлении со скоростью 50 м/с на высоте 420 м. Потом с отключённым двигателем он начинает снижаться и достигает полосы аэродрома, имея скорость 30 м/с. Определить работу силы сопротивления воздуха во время планерного полёта самолёта.

Ответ: $A = -10^7$ Дж.

4.Ш.14. На невесомой нити длиной $l = 90$ см подвешен ящик с песком массой 2.5 кг. Пуля массой 20 г, летевшая горизонтально, попала в ящик и застряла в песке, вследствие чего ящик отклонился так, что нить образовала с вертикалью угол 60°. Определить, с какой скоростью v летела пуля и какую скорость u приобрёл ящик с песком после попадания пули.

Ответ: $v = 375$ м/с; $u = 3$ м/с.

4.Ш.15. Во время центрального абсолютно неупругого удара двух шариков с массами $m_1 = 0.25$ кг и $m_2 = 1$ кг, которые двигались навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, во внутреннюю энергию превратилось $Q = 160$ Дж их механической энергии. Определить скорости шариков перед ударом.

Ответ: $v = 20$ м/с.

Глава 5

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
5.1	$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $y = y'$; $z = z'$; $t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Преобразование Лоренца координат (x, y, z) и времени t при переходе от одной инерциальной системы к другой	V – скорость движения системы вдоль оси x; c – скорость света в вакууме; (x', y', z', t') – координаты и время в подвижной системе отсчёта; $\beta = V/c$

1	2	3	4
5.2	$u_x = \dfrac{v_x + V}{1 + \frac{v_x V}{c^2}}$	Релятивистский закон сложения скоростей	u_x – скорость тела в неподвижной системе отсчёта; v_x – скорость тела в подвижной системе; V – скорость движения одной системы относительно другой
5.3	$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$	Релятивистское сокращение длины	l_0 – длина стрежня в собственной системе отсчёта; l – длина стрежня в системе, относительно которой он движется со скоростью V
5.4	$\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивистское замедление времени	τ – промежуток времени в системе, связанной с объектом события; τ_0 – промежуток времени в системе, которая движется относительно объекта события со скоростью V

1	2	3	4
5.5	$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивистская масса тела движущегося со скоростью v	m_0 – масса покоя тела (частички); $\beta = v/c$
5.6	$\vec{p} = m\vec{v} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Релятивистский импульс	$\vec{v}$ – скорость движения тела (частички)
5.7	$E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Полная энергия тела (формула Ейнштейна)	m – релятивистская масса
5.8	$E_0 = m_0c^2$	Энергия покоя	
5.9	$E_K = E - E_0$	Кинетическая энергия	E – полная энергия; E_0 – энергия покоя
5.10	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$; $\vec{p} = \dfrac{E\vec{v}}{c^2}$	Связь между энергией и импульсом релятивистской частички	E – полная энергия

Пример 5.1. Стержень пролетает без ускорения мимо метkb в неподвижной системе отсчёта K за время $\Delta t = 0.4$ фс (1 фс (фемтосекунда) $= 10^{-15}$ с), определённое в этой системе. В системе отсчёта K', связанной со стрежнем, метка движется относительно стрежня на протяжении времени $\Delta t_0 = 0.5$ фс. Найти скорость движения стержня v в неподвижной системе K и его собственную длину.

Решение. Пусть стержень в системе отсчёта K движется со скоростью v, его длина в этой системе $l = v\Delta t$. С другой стороны, согласно принципу относительности можно считать, что метка движется с той же скоростью v, но в противоположном направлении относительно стрежня. Тогда длина стрежня в собственной системе (системе K') будет $l_0 = v\Delta t_0$.

Одним из следствий преобразований Лоренца есть так называемое сокращение длины, которые выражается формулой

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Подставляя значение l и l_0, имеем

$$v\Delta t = v\Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

После сокращения на v и простых преобразований выражаем скорость движения стержня через промежутки времени Δt и Δt_0:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{0.4}{0.5}\right)^2} = \frac{3}{5}c = 0.6c.$$

Собственная длина стрежня

$$l_0 = v\Delta t_0 = c\Delta t_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2} = c\sqrt{(\Delta t_0)^2 - (\Delta t)^2}.$$

После подстановки имеем $l_0 = 9 \cdot 10^{-8}$ м$=$ 90 нм.

Пример 5.2. Частица массой m_0, которая летела со скоростью $v_1 = 0.8$c, неупруго ударилась о неподвижную частицу с такой же массой. Вследствие столкновения образовалась новая частица. Считая систему тел изолированной, найти массу покоя M_0 и скорость частицы v_2, которая образовалась вследствие удара.

Решение. В специальной теории относительности в изолированной системе тел выполняются законы сохранения импульса и энергии. Перед столкновением частица, которая двигалась, имела полную энергию

$$E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{3} m_0 c^2 = \frac{5}{3} E_0,$$

где $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя частицы (неподвижной частицы). Согласно закона сохранения энергии полная энергия новообразованной частицы E_2 буде суммой полных энергий частиц перед столкновением:

$$E_2 = E_1 + E_0 = \frac{8}{3} E_0.$$

В специальной теории относительности полная энергия E частицы, которая движется со скоростью $\vec{v}$, и ее импульс $\vec{p}$ связанные соотношением

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c}.$$

Согласно закону сохранения импульса импульс $\vec{p}_1$ движущейся частицы должен равняться импульсу $\vec{p}_2$ образовавшейся частицы:

$$\vec{p}_1 = \frac{E_1 \vec{v}_1}{c} = \vec{p}_2 = \frac{E_2 \vec{v}_2}{c}.$$

Из последнего выражения имеем

$$v_2 = v_1 \frac{E_1}{E_2} = v_1 \frac{E_1}{E_1 + E_0} = v_1 \frac{\frac{5}{3} E_0}{\frac{8}{3} E_0} = \frac{5}{8} v_1 = 0.5c.$$

Для нахождения массы покоя образовавшейся частицы M_0 воспользуемся формулой Эйнштейна:

$$E_2 = Mc^2 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{{v_2}^2}{c^2}}}.$$

Подставив $0.5c$ вместо v_2, получим

$$E_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\ M_0c^2 = \frac{8}{3}E_0 = \frac{8}{3}m_0c2,$$

откуда выражаем массу покоя образовавшейся частицы $M_0 = 4/\sqrt{3}\ m_0 \approx 2.309\ m_0$.

Вариант 5.1

5.1.1. Есть две системы отсчёта S и S', относительная скорость которых неизвестна. Параллельно вектору скорости относительного движения систем движется стержень. В системе S' он имеет длину $l' = 1.1$ м и скорость $v'_x = 0.1c$. В системе S длина стержня $l = 1$ м. Найти скорость движения стержня v_x в системе S и скорость движения v_0 системы S' относительно системы S.

5.1.2. Какую работу необходимо осуществить, чтобы увеличить скорость движения частички с массой покоя m_0 от $v_1 = 0.6c$ до $v_2 = 0.8c$? Сравнить полученный результат со значением, рассчитанным по классической формуле.

5.1.3. Собственное время жизни τ_0 мезона равняется 2 мкс. От точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчёта мезон пролетел расстояние $l = 6$ км. С какой скоростью v двигался мезон?

5.1.4. Пучок релятивистских частиц с кинетической энергией E_K падает на поглощающую мишень. Сила тока в пучке составляет I, заряд и масса покоя частицы — e и m_0. Найти силу давления пучка на мишень и его мощность.

5.1.5. Вычислить ускорение электрона, который движется под действием постоянной силы F вдоль линии её действия, в тот момент, когда его кинетическая энергия E_K вдвое меньше энергии покоя электрона.

Вариант 5.2

5.2.1. Длину космического корабля $l_0 = 10$ м измерели перед стартом. Какую скорость должен иметь корабль, чтобы его длина в системе отсчёта, связанной с Землёй, изменилась на $\Delta l = 5$ мкм? Сравнить с скоростью обращения Земли вокруг Солнца ($V_з = 30$ км/с).

5.2.2. На космическом корабле-спутнике находятся часы, которые перед полётом были синхронизированы с часами на Земле. Скорость спутника $v = 9$ км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя относительно земных часов, которые показали время $\tau = 1$ год?

5.2.3. Частица с массой покоя m_0, которая движется со скоростью $v_1 = 0.8c$, испытывает неупругое столкновение с такой же частицой, которая движется со скоростью $v_2 = 0.6c$. Каковы будут масса покоя M_0 и скорость v образовавшейся частицы? Рассмотреть два случая: а) частицы движутся навстречу друг другу; б) первая частица догоняет вторую.

5.2.4. Частица с массой покоя m в некоторый момент времени приходит в движение под действием постоянной силы $\vec{F}$. Определить скорость частички $\vec{v}$ и пройденный путь s как функции времени. Сравнить с результатом классической теории.

5.2.5. В лабораторной системе отсчета π-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l = 75$ м. Скорость π-мезона $v = 0.995c$. Определить собственное время жизни мезона.

Вариант 5.3

5.3.1. Какую скорость v должно иметь тело, чтобы его продольный линейный размер уменьшился на 20 %, т.е. в 0.8 раза

$(n = 0.8)$?

5.3.2. Какую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его продольный размер стал в K раз меньше поперечного?

5.3.3. Кинетическая энергия релятивистской частицы равняется её энергии покоя. Во сколько раз увеличится импульс частицы, если её кинетическая энергия увеличится в четыре раза $(K = 4)$?

5.3.4. Заряженная частица с полной энергией $E = 50$ кэВ движется в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0.6c$ по кругу радиусом $R = 3.6$ см. Определить силу Лоренца F_L, которая действует на частицу со стороны поля.

5.3.5. В системе S' находится стержень в состоянии покоя, его собственная длина $l_0 = 1$ м. Стержень расположен под углом $\varphi_0 = 45°$ к оси x'. Определить длину стержня в системе S, если скорость системы S относительно S' равняется $v_0 = 0.6c$.

Задачи для повторения школьной программы

5.Ш.1. Какова масса протона, летящего со скоростью $2.4 \cdot 10^8$ м/с? Считать, что масса протона в состоянии покоя равняется 1 а.е.м.

Ответ: $m = 1.67$ а.е.м.

5.Ш.2. В чайник налили 2 л води и нагрели ее от 10 °C до кипения. Как и насколько изменится масса воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4.2$ кДж/(кг·К).

Ответ: увеличится на $8.4 \cdot 10^{-12}$ кг.

5.Ш.3. На сколько увеличится масса α-частицы вследствие движения со скоростью $0.9c$? Считать, что масса покоя α-частица составляет 4 а.е.м.

Ответ: на 5.18 а.о.г.

5.Ш.4. Как и насколько изменяется масса 1 кг льда во время его плавления ($\lambda = 333$ кДж/кг)?

Ответ: увеличивается на $3.7 \cdot 10^{-12}$ кг.

Глава 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
6.1	$T = \frac{t}{N}$; $\nu = \frac{1}{T}$	Период T и частота колебаний ν	N – количество полных колебаний за время t
6.2	$\omega = 2\pi\nu$	Циклическая частота колебаний	
6.3	$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний	ω_0 – циклическая частота собственных незатухающих колебаний
6.4	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$	Смещение при гармоничных колебаниях	x – отклонение от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний

1	2	3	4
6.5	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	Период колебаний математического маятника	l – длина математического маятника
6.6	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Период колебаний пружинного маятника	k – коэффициент жёсткости пружины; m – масса груза
6.7	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$	Период колебаний физического маятника	J – момент инерции тела относительно оси обращения; l – расстояние от оси вращения до центра масс тела
6.8	$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний	β – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота собственных незатухающих колебаний

1	2	3	4
6.9	$x = A_0 \exp(-\beta t)\times$ $\times \cos(\omega t + \varphi_0)$	Смещение при затухающих колебаниях	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний
6.10	$\xi(x,t) = A\times$ $\times \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, $k = 2\pi/\lambda$	Уравнение плоской волны	$\xi(x,t)$ – смещение точки среды с координатой x в момент времени t; λ – длина волны
6.11	$v = \lambda\nu = \omega/k$	Фазовая скорость распространения волны	ν – частота колебаний
6.12	$v_{\parallel} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$	Скорость звуковых волн в упругой среде	E – модуль Юнга; ρ – плотность вещества
6.13	$v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$	Скорость звуковых волн в газах	γ – показатель адиабаты; T – температура газа; μ – молярная масса; P – давление; ρ – плотность

1	2	3	4
6.14	$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$	Средняя объёмная плотность энергии волны	A – амплитуда волны; ω – циклическая частота; ρ – плотность среды
6.15	$\vec{j} = \langle w\rangle\vec{v}$	Вектор плотности потока энергии волны	$\vec{v}$ – вектор скорости распространения волны
6.16	$\langle\Phi\rangle = \langle w\rangle v S_{\perp}$	Средний поток энергии волны	$S_{\perp}$ – площадь, перпендикулярная к направлению распространения волны, через которую переносится энергия

Пример 6.1. Тело, которое можно считать материальной точкой, массой $m = 5$ г осуществляет гармонические колебания с частотой $\nu = 0.5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 0.03$ м. Определить:
1) скорость точки в момент времени, когда ее смещение $x = 1.5$ см; 2) максимальную силу F_{max}, действующую на точку.

Решение:

1. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость точки определяется как производная по времени от координаты:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота колебаний тела.

Пользуясь основной тригонометрической тождественностью ($\sin^2 + \cos^2 = 1$), можно исключить время t с этих двух уравнений и связать скорость v и координату x тела в произвольный момент времени:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1.$$

Решая последнее уравнение относительно v, найдем

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Подставив числовые значения, имеем $v \approx \pm 8.16 \cdot 10^{-2}$ м/с. Знак "плюс" отвечает случаю, когда точка удаляется от положения равновесия (направления смещения и скорости совпадают), знак "минус" — случая, когда точка возвращается в положение равновесия (направления смещения и скорости противоположные друг другу).

2. Силу, которая действует на тело, выразим через ускорение по второму закону Ньютона:

$$F = m\frac{dv}{dt} = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x.$$

Сила будет максимальной тогда, когда отклонение тела x от положения равновесия максимально, т.е. равняется амплитуде колебаний A:

$$F_{max} = m\omega^2 A = 4\pi 2\nu^2 mA.$$

После подстановки числовых значений получаем $F_{max} \approx 1,48 \cdot 10^{-3}$ Н.

Пример 6.2. Частичка массой $m = 0.02$ кг осуществляет гармонические колебания с периодом $T = 2\pi$ с. Полная энергия частички при колебании $E = 10^{-4}$ Дж. Определить амплитуду колебаний A.

Решение. Полную энергию частички, которая осуществляет гармонические колебания, можно выразить через ее максимальную скорость:

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Максимальная скорость частички v_{max} связана с амплитудой колебаний A и круговой частотой ω: $v_{max} = A\omega$, где $\omega = 2\pi/T$ (см. решение предыдущей задачи). Амплитуду колебаний частички выразим через полную энергию:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Подставив числовые значения, имеем $A = 0.1$ м.

Вариант 6.1

6.1.1. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = 0.02\sin 5t$. Определить максимальные скорость $v_{\max}$ и ускорение $a_{\max}$ точки.

6.1.2. Материальная точка массой $m = 0.04$ кг осуществляет гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x = 0.1\sin 5t$. Найти силу F, действующую на точку в момент, когда фаза колебаний $\varphi = \frac{\pi}{6}$, и в положении наибольшего отклонения точки.

6.1.3. Гиря массой $m = 500$ г, подвешенная на пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, совершает упругие колебания в вязкой среде. Логарифмический декрементзатухания $\lambda = 6.93 \cdot 10^{-3}$. Сколько колебаний должна совершить гиря, чтобы амплитуда A колебаний уменьшилась в два раза? За какое время t это произойдет?

6.1.4. Складываются два колебания, одинаковые по направлениею: $x_1 = \sin \pi\, t$ и $x_2 = \sin(\pi\, t + \frac{\pi}{2})$. Определить амплитуду

A_Σ и начальную фазу $\varphi_{0\Sigma}$ результирующего колебания.

6.1.5. Цилиндрический брусок высотой h находится в вертикальном положении на границе раздела двух жидкостей (ρ_1 — плотность нижней жидкости, ρ_2 — верхней). Плотность материала бруска ρ. Найти период малых колебаний бруска, если пренебречь силой сопротивления.

Вариант 6.2

6.2.1. Точка осуществляет колебание согласно синусоидальному закону. Наибольшее смещение точки $A = 10$ см, наибольшая скорость $v_{\text{max}} = 20$ м/с. Определить период колебаний и максимальное ускорение точки.

6.2.2. Материальная точка принимает участие в двух колебаниях, которые осуществляются в одном направлении: $x_1 = \sin t$, $x_2 = 2\cos t$. Найти амплитуду A_Σ результирующего колебания и начальную фазу $\varphi_{0\Sigma}$. Записать уравнение движения.

6.2.3. На середине горизонтально натянутой струны длиной l закреплен груз массой m. Найти период T свободных малых колебаний груза, которые осуществляются в горизонтальном направлении при условии, что сила натяжения струны F постоянна и значительно превышает вес груза. По сравнению с массой груза массой струны можно пренебречь.

6.2.4. Материальная точка принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях: $x = \sin\frac{\pi t}{2}$, $y = \frac{1}{2}\cos\pi t$. Определить траекторию точки.

6.2.5. Груз, колеблясь на пружине, за период теряет 3.14 % механической энергии ($\eta = 3.14$ %). Определить относительную разность циклической частоты его колебаний и циклической частоты свободных незатухающих колебаний такой системы.

Вариант 6.3

6.3.1. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает колебания по синусоидальному закону с периодом $T = \frac{1}{5}$ с и амплитудой $A = 20$ см. Найти возвращающую силу F в момент времени $\tau = \frac{1}{12}$ с, а также полную энергию E точки.

6.3.2. Определить период малых колебаний сплошного однородного шарика радиусом r, который может катиться без скольжения по внутренней поверхности горизонтально размещённого цилиндра радиусом R.

6.3.3. Найти логарифмический декремент затухания колебаний математического маятника длиной $l = 144$ см, если он за время $\tau = 10$ мин. теряет 99 % своей энергии ($\eta = 99$ %).

6.3.4. Брусок массой m подвешен на двух одинаковых параллельных пружинах с коэффициентом жёсткости k. Определить период малых вертикальных колебаний системы.

6.3.5. Найти значение циклической частоты вынужденных колебаний ω , при котором система с коэффициентом затухания β и частотой свободных колебаний ω_0 будет иметь резонансный максимум. Известно, что амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

где F_0 — амплитуда внешней силы, m — масса тела.

Вариант 6.4

6.4.1. Точка осуществляет гармонические колебания. В некоторый момент времени τ смещение точки $x = 5$ см, скорость $v = 20$ см/с и ускорение $a = -80$ см/с^2. Найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T и фазу φ колебаний в этот момент времени.

6.4.2. На гладком горизонтальном столе лежит тело массой M, которое прикреплено к пружине с коэффициентом жёсткости k. Второй конец пружины жёстко прикреплен к вертикальной стенке. В тело попадает пуля массой m, которая имеет в момент удара скорость v_0, направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду и период колебаний системы.

6.4.3. Если к невесомой пружине подвесить груз массой m, то её длина увеличится на Δ. На этот груз, который находится в состоянии покоя, с высоты Δ падает второй груз с такой же массой. Столкновение грузов неупругое. Найти период и амплитуду колебаний, которые возникнут при этом.

6.4.4. Небольшой груз осуществляет колебания по закону $x = 0.02\,\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$. Определить амплитуду, период, начальную фазу колебаний, а также максимальные значения скорости и ускорение груза. Через какое время после начала отсчёта груз пройдёт положение равновесия?

6.4.5. Определить период колебаний тела, которое движется в мысленном прямолинейном туннеле, что соединяет две точки на поверхности Земли и проходит через ее центр. Силами сопротивления пренебречь. Землю считать однородным шаром.

Вариант 6.5

6.5.1. По цилиндрической трубе диаметром $d = 20$ см и длиной $l = 5$ м, которая заполнена воздухом, распространяется звуковая волна со средней плотностью потока энергии $j = 50$ мВт/м^2. Найти энергию звукового поля в трубе. Температура воздуха $T = 293$ К.

6.5.2. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии с амплитудой колебаний $A = 10$ см. Каким будет смещение ξ точки, удалённой от источника волны на расстояние $x = \frac{5}{3}\lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = \frac{1}{3}T$?

6.5.3. Две точки расположены на расстоянии $\Delta x = 50$ см одна от другой на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $v = 50$ м/с. Период колебаний $T = 0.05$ с. Найти разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ в этих точках.

6.5.4. Средняя объёмная плотность энергии $\langle w \rangle = 3$ мДж/м^3. Определить плотность потока энергии j звуковой волны, если звук распространяется в сухом воздухе при нормальных условиях.

6.5.5. Мощность изотропного точечного источника звуковых волн $N = 10$ Вт. Какой будет средняя объёмная плотность $\langle w \rangle$ энергии на расстоянии $R = 10$ м от источника волн? Температура воздуха $T = 250$ К.

Задачи для повторения школьной программы

6.Ш.1. Во сколько раз время прохождения точкой, которая колеблется, первой половины амплитуды меньше времени прохождения ею второй половины амплитуды?

Ответ: $t_2/t_1 = 2$.

6.Ш.2. На протяжении определённого времени первый математический маятник осуществляет 50 колебаний, а второй — 30. Определить длины этих маятников, если один из них на 32 см короче другого.

Ответ: $l_1 = 0.18$ м, $l_2 = 0.50$ м.

6.Ш.3. Если к грузику, который колеблется на пружине, прицепить гирю массой 300 г, то частота колебаний уменьшится в 2 раза. Определить массу грузика.

Ответ: $m_1 = 0.1$ кг.

6.Ш.4. На какое расстояние от положения равновесия нужно отвести грузик массой 640 г, который закреплен на пружине жёсткостью 0.4 кН/м, чтобы он проходил это положение со скоростью 1 м/с?

Ответ: $x = 0.04$ м.

6.Ш.5. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура составляет 1.2 с, амплитуда колебаний — 2 см. Определить длину волны, фазу колебаний и смещение точки, расположенной на расстояния 66 м от источника колебаний, в момент времени 5 с.

Ответ: $\lambda = 18$ м, $\varphi = \pi$, $x = -0.02$ м.

6.Ш.6. Амплитуда незатухающих колебаний точки струны равняется 1 мм, а частота — 1 кГц. Какой путь пройдёт точка за 0.2 с?

Ответ: $s = 0.8$ м.

6.Ш.7. Два маятники начинают колебаться одновременно. На протяжении определённого времени первый маятник осуществил 15 колебаний, второй — 10. Определить отношение длин этих маятников.

Ответ: $l_1/l_2 = 4/9$.

6.Ш.8. Определить массу груза, который на пружине жёсткостью 250 Н/м осуществляет 20 колебаний в течение 16 с.

Ответ: $m = 4$ кг.

6.Ш.9. Найти массу грузика, который колеблется на пружине жёсткостью 500 Н/м, если при амплитуде колебаний 6 см его максимальная скорость составляет 3 м/с.

Ответ: $m = 0.2$ кг.

6.Ш.10. Волна распространяется от источника колебаний вдоль натянутого шнура со скоростью 3 м/с. Определить разность фаз колебаний двух точек, которые отдалены от источника на расстоянии $l_1 = 4$ м.

Ответ: $\Delta\varphi = 2.5$ рад.

Глава 7
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснення
1	2	3	4
7.1	$PV = \nu RT$	Уравнение Клапейрона – Менделеева	P – давление; V – объєм; ν – количество вещества; $R = 8.31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура
7.2	$P = nkT$	Давление идеального газа	n – концентрация частиц газа; $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана

1	2	3	4
7.3	$P = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon_{\text{П}}\rangle =$ $= \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle$	Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	$\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle = \frac{3}{2}kT$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы массой m
7.4	$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT$	Закон равного распределения энергии по степеням свободы молекулы	$\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия движения молекул; i – число степеней свободы молекулы
7.5	$f(v) = \frac{dN}{Ndv} =$ $= Av^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right);$ $A = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$	Распределение Максвелла молекул идеального газа по абсолютним значенням скорости	dN – число молекул, имеющих скорости в интервале от v до $v+dv$; N – общее число молекул
7.6	$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2\rangle} =$ $= \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$	Среднеквадратичная скорость молекул идеального газа	$m = \mu/N_A$ – масса молекулы; $N_A = R/k$ – число Авогадро
7.7	$v_{\text{iм}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$	Наиболее вероятная скорость движения молекул	Скорость, при которой функция Максвелла имеет максимум

1	2	3	4
7.8	$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$	Средняя арифметическая скорость молекул идеального газа	
7.9	$P(z) = P_0 \exp^{-\frac{\mu g z}{RT}}$	Барометрическая формула	$P(z)$ – давление на висоте z; P_0 – давление вблизи поверхности Земли
7.10	$n(z) = n_0 \exp^{-\frac{mgz}{kT}} = = n_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)$	Распределение Больцмана молекул идеального газа в поле тяжести Земли	n_0 – концентрация молекул вблизи поверхности Земли; z – координата, отсчитанная от поверхности Земли

Пример 7.1. Сосуд объёмом $V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 содержит кислород массой $m = 10^{-2}$ кг под давлением $P = 4 \cdot 10^5$ Па. Найти количество молекул N кислорода в сосуде, их среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ и плотность кислорода ρ.

Решение. Согласно к молекулярно-кинетической теории газов средняя квадратичная скорость молекул газа определяется формулой

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где молярная масса кислорода μ известна ($\mu = 0.032$ кг/моль), а температура газа T неизвестна. Определим её из уравнение

Клапейрона – Менделеева:

$$T = \frac{PV\mu}{Rm}.$$

Тогда

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3PV}{m}} = 490 \text{ м/с}.$$

Количество молекул кислорода найдем как

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где m/μ — количество молей газа, N_A — число Авогадро. Подставим числовые значения:

$$N = \frac{10^{-2} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{3.2 \cdot 10^{-2}} = 1.9 \cdot 10^{23}.$$

Плотность газа рассчитываем по формуле $\rho = \frac{m}{V} = 5$ кг/м^3.

Пример 7.2. В воздухе находятся некоторые лёгкие частицы пыли, которые имеют массу m и объем V. Как изменится концентрация этих частиц с высотой h?

Решение. Физическая система состоит из частиц пыли и воздуха, которые находятся в поле тяжести Земли. Поэтому концентрация и частиц пыли, и молекул воздуха подчиняется распределению Больцмана. Но если для молекул воздуха это распределение можно использовать непосредственно, то применение его к частицам пыли может привести к ошибочному результату. Дело в том, что на частицы пыли кроме силы тяжести mg действует выталкивающая сила Архимеда F_A, которая по порядку величины может быть сопоставимой с mg. Если сила Архимеда мало отличается от силы тяжести, то необходимо найти эффективную массу частиц пыли:

$$m_{\text{эф}} g = mg - F_A = mg - \rho g V,$$

где ρ — плотность воздуха, которую, в свою очередь, определим из уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Таким образом,

$$m_{\text{эф}} g = mg - \frac{P\mu}{RT} gV.$$

Используя распределение Больцмана, найдём изменение концентрации частиц пыли с высотой h:

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{m_{\text{эф}} gh}{k}\right) = \exp\left[-\frac{\left(m - \dfrac{P\mu V}{RT}\right) gh}{k}\right].$$

Вариант 7.1

7.1.1. Какое количество молекул N двухатомного газа содержится в объёме $V = 10$ см^3 под давлением $P = 5.3$ кПа при температуре $T = 27$ °C? Какую суммарную энергию теплового движения E имеют эти молекулы?

7.1.2. В сколько раз средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ пылинки массой $m = 1.2 \cdot 10^{-11}$ кг, которая зависла в воздухе, меньше наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$ молекул воздуха? Воздух считать однородным газом с молярной массой $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.1.3. Найти среднее значение величины, обратной к скорости движения молекул газа $\left\langle \dfrac{1}{v} \right\rangle$.

7.1.4. Определить относительное количество молекул азота $\frac{\Delta N}{N}$, которые при температуре T имеют скорости, лежащие в интервале от $v_{\text{в}}$ до $v_{\text{в}}+\Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с, если: а) $T = 400$ К; б) $T = 900$ К.

7.1.5. Считая атмосферу изотермической ($T = 290$ К), а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, найти атмосферное давление на высоте $h_1 = 5$ км и в шахте на глубине $h_2 = 2$ км. Давление на уровне поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Вариант 7.2

7.2.1. Некоторый газ, молекулы которого имеют среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 450$ м/с, находится под давлением $P = 50$ кПа. Найти плотность газа при этих условиях.

7.2.2. При нормальных условиях смесь гелия и азота имеет плотность $\rho = 0.6$ кг/м^3 . Найти концентрацию атомов гелия в смеси.

7.2.3. Азот находится под давлением $P = 10^5$ Па при температуре $T = 300$ К. Найти относительное количество молекул азота $\frac{\Delta N}{N}$, модуль скорости которых лежит в интервале от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + \Delta v$, где $\Delta v = 1$ м/с. Внешние силы отсутствуют.

7.2.4. На какой высоте h давление воздуха составляет $\eta = 0.8$ от давления на уровне моря? Температуру $T = 290$ К считать постоянной величиной.

7.2.5. Источник атомов серебра образует узкий цилиндрический пучок, который попадает на внутреннюю поверхность неподвижного цилиндра радиусом $R = 30$ см и создаёт на ней пятно. Цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = 100\pi$ рад/с. Найти скорость атомов серебра, если пятно сместилось на угол $\varphi = 18^\circ$ от начального положения.

Вариант 7.3

7.3.1. Найти кинетическую энергию поступательного движения молекул воздуха массой $m = 1$ г при температуре

$T = 15$ °C. Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

7.3.2. Найти среднюю квадратичную, среднюю арифметическую и вероятную скорости молекул газа, который при $P = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0.3$ кг/м^3.

7.3.3. Смесь водорода и гелия имеет температуру $T = 300$ K. При какой скорости v молекул значения функций распределения молекул этих газов по скоростям $f(v)$ будут одинаковыми?

7.3.4. Отношение концентрации молекул водорода к концентрации молекул азота на уровне поверхности Земли равно η_0, а на высоте $h = 3000$ м — η. Найти отношение η/η_0 при температуре $T = 280$ K. Считать, что ускорение свободного падения и температура не зависят от высоты.

7.3.5. Во время наблюдения в микроскопе зависших частичек гумигута было определено, что среднее количество их в слоях, расстояние между которыми $\Delta h = 40$ мкм, отличается в два раза ($\alpha = 2$). Температура среды $T = 290$ K. Диаметр частичек $d = 0.40$ мкм, плотность гумигута на величину $\Delta\rho = 0.22$ г/см^3 больше плотности окружающей среды. По этим данным найти число Авогадро.

Вариант 7.4

7.4.1. При нормальных условиях молекулы некоторого газа движутся со средней квадратичной скоростью $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 461$ м/с. Какое количество молекул n содержит единица массы этого газа?

7.4.2. Найти температуру азота, при которой скоростям молекул $v_1 = 300$ м/с и $v_2 = 600$ м/с отвечают одинаковые значения функций распределения $f(v)$ молекул газа по скоростям.

7.4.3. Двухатомный газ массой $m = 1$ кг и плотностью $\rho = 4$ кг/м^3 находится под давлением $P = 80$ кПа. Найти суммарную энергию теплового движения E молекул газа при этих условиях.

7.4.4. Возле поверхности Земли количество молекул гелия почти в $\alpha = 10^5$ раз меньше количества молекул азота. На какой высоте количество молекул гелия будет равно количеству молекул азота? Среднюю температуру атмосферы считать $T = 0$ °С. Ускорение свободного падение $g = 9.81$ м/с^2.

7.4.5. Молекулы азота, который содержится в очень высоком сосуде, находятся в однородном поле тяжести при температуре T. Температуру увеличили в η раз. На какой высоте h концентрация молекул осталась неизменной?

Задачи для повторения школьной программы

7.Ш.1. Считая, что диаметр молекулы водорода составляет около $2.3 \cdot 10^{-10}$ м, определить, какую длину имела бы нить из молекул содержащихся в 1 мг водорода, есмли бы их можно было расположить в один ряд плотно одна к другой.

Ответ: $l = 6.9 \cdot 10^{10}$ м.

7.Ш.2. Определить среднюю кинетическую энергию молекулы одноатомного газа и концентрацию молекул при температуре 290 К и давлении 0.6 мПа.

Ответ: $W_K = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж; $n = 1.5 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$.

7.Ш.3. Определить плотность смеси, которая состоит из 50 г кислорода и 20 г водорода, при температуре 20 °С и давлении $9 \cdot 10^4$ Па.

Ответ: $\rho \approx 0.23$ кг/м^3.

7.Ш.4. Давление воздуха внутри плотно закрытой бутылки при температуре 280 К представляет 10^5 Па. На сколько градусов нужно нагреть бутылку, чтобы из неё вылетела пробка, если известно, что из холодной бутылки без нагревания пробку можно вытянуть, приложив силу 10 Н? Площадь поперечного сечения пробки составляет 4 см^2.

Ответ: $\Delta T = 70$ К.

7.Ш.5. Цилиндрический сосуд высотой $h = 40$ см поделили на две части невесомым поршнем, который может скользить без трения.Под поршнем содержится водород, а над ним — некоторый газ. Поршень установился на высоте $h_1 = 26.7$ см над дном цилиндра. Определить молярную массу μ газа, если его масса равняется массе водорода.

Ответ: $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.Ш.6. Балластный резервуар подводной лодки объёмом 5 м^3 заполнен водой. Какое давление воздуха необходимо создать в баллоне объёмом 0.2 м^3, чтобы при присоединении баллона к резервуару подводная лодка могла полностью освободиться от балласта на глубине 100 м? Температура воздуха не изменяется. Атмосферное давление составляет $1.01 \cdot 10^5$ Па, плотность морской воды — 1030 кг/м^3.

Ответ: $P \approx 3 \cdot 10^7$ Па.

7.Ш.7. Открытую с обеих концов стеклянную трубку длиной 1 м наполовину погружают в ртуть. Потом трубку закрывают сверху и вынимают из ртути. Какой будет длина X столбика ртути, которая осталась в трубке? Атмосферное давление составляет 750 мм рт. ст.

Ответ: $X = 0.25$ м.

7.Ш.8. На дне сосуда, заполненного воздухом, лежит полый шарик радиусом 2 см. Масса шарика составляет 5 г. Какое давление необходимо создать в сосуде, чтобы шарик поднялся вверх? Считать, что при больших давлениях для воздуха можно применять уравнение состояния идеального газа. Сжатие воздуха считать квазистатическим. Температура воздуха составляет 20 °C.

Ответ: $124 \cdot 10^5$ Па.

7.Ш.9. Налитая в стакан вода массой 200 г полностью испаряется на протяжении 20 суток. Сколько в среднем молекул вылетало из поверхности воды каждую секунду?

Ответ: $N = 3.87 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$.

7.Ш.10. Какова средняя квадратичная скорость движения молекул газа объёмом 5 м^3 и массой 6 кг при давлении $2 \cdot 10^5$ Па?

Ответ: $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 707$ м/с.

7.Ш.11. В баллоне находился газ при температуре 313 К и под давлением $1.6 \cdot 10^7$ Па. Определить давление в баллоне после того, как 30 % массы газа выпустили, а температура стала 283 К.

Ответ: $P \approx 10^7$ Па.

7.Ш.12. Баллон объёмом 20.5 л содержит смесь водорода и гелия. Масса смеси составляет 13 г, температура — 27 °C, давление — $5.4 \cdot 10^5$ Па. Определить массы указанных газов.

Ответ: $m_{\text{H}_2} = 4.76 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_{\text{He}} = 8.24 \cdot 10^{-3}$ кг.

7.Ш.13. Закрытый с обоих краёв цилиндр наполнен газом, давление которого составляет 10^5 Па, а температура — 30 °C. Цилиндр разделен лёгким подвижным поршнем на две равные части длиной 50 см каждая. На какую величину ΔT нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние 20 см, если во второй половине цилиндра температура газа не изменяется? Определить давление газа после смещения поршня.

Ответ: $\Delta T = 404$ К; $P_2 = 1.67 \cdot 10^5$ Па.

Глава 8
ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
8.1	$\delta Q = dU + \delta A$	Первый закон термодинамики	δQ – элементарное количесвто теплоты, переданное термодинамической системе; dU – элементарное приращение внутренней энергии системы; δA – элементарная работа, выполняемая системой над внешними телами
8.2	$\delta A = PdV$	Элементарная работа, виполненная газом	P – давление газа; dV – элементарное изменение объема

1	2	3	4
8.3	$C = \frac{\delta Q}{dT}$	Теплоемкость тела	δQ – количество теплоты, переданное телу; dT – изменение температуры тела
8.4	$U = N\langle\varepsilon\rangle = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{\mu}C_{\mathrm{V}}T$	Внутрнняя энергия идеального газа	N – число молекул идеального газа; $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя энергия молекулы; m – масса газа; μ – молярная масса газа; C_V – молярная теплоемкость газа при обстоянном объеме
8.5	$c = \frac{C}{m}$	Удельная теплоемкость вещества	C – теплоемкость тела; m – масса тела
8.6	$C_\mu = \mu c = \frac{\mu}{m}C$	Молярная теплоемкость вещества	

1	2	3	4
8.7	$C_V = \frac{\mu}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{i}{2}R$	Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме	$\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V$
8.8	$C_P = \frac{\mu}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R$	Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении	
8.9	$C_P = C_V + R$	Уравнение Майера	Только для идеального газа
8.10	$PV^\gamma = \text{const}$; $TV^{\gamma-1} = \text{const}$; $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$	Уравнение Пуассона для адиабатического процесса	$\gamma = C_P/C_V$ – показатель адиабаты; $\gamma = \frac{i+2}{i}$; $i = \frac{2}{\gamma-1}$
8.11	$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_1}{P_2}$	Работа газа при изотермическом процессе	P_1 и P_2 – начальное и конечное значения давления газа; V_1 и V_2 – начальное и конечное значения объема газа

1	2	3	4
8.12	$A=\frac{m}{\mu}C_V(T_1-T_2)= =\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{\mu}{m}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$	Работа газа при адиабатическом процессе	T_1 и T_2 – начальное и конечное значения температуры газа
8.13	$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}$	Коэффициент полезного действия цикла Карно	T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодльника
8.14	$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}$	Коэффициент полезного действия тепловой машины	Q_1 – количество теплоты, переданное рабочему телу от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику
8.15	$\Delta S=\int\limits_1^2\frac{\delta Q}{T}$	Изменение энтропии	

Пример 8.1. Идеальный двухатомный газ сначала изохорно нагревают до тех пор, пока абсолютная температура газа не увеличится на треть ($\alpha = 1/3$). Потом газ изотермически расширяется, и наступает момент, когда его давление становится равным начальному. После этого осуществляют изобарное сжатие газа, вследствие чего газ возвращается в начальное состояние. Найти КПД цикла.

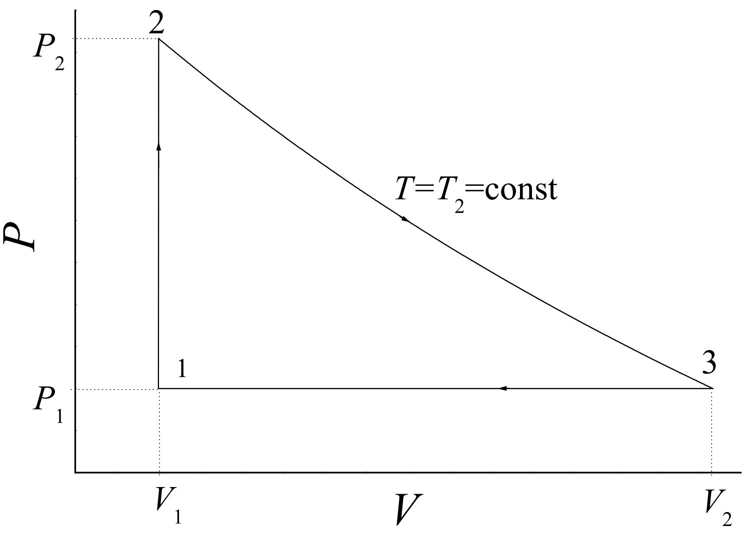

Рис. 8.1

Решение. Обозначим начальные термодинамические параметры системы: P_1, V_1, T_1 — давление, объем и температура соответственно. На рис. 8.1 изображена PV-диаграмму цикла, которая состоит из изохоры, изотермы и изобари. Коэффициент полезного действия цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (\text{П8.1})$$

где Q_1 — количество теплоты, которую получает газ от нагревателя за цикл; Q_2 — количество теплоты, которую газ отдаёт за цикл холодильнику. Газу передаётся теплота Q_1 на двух этапах цикла: $Q_{1\to2}$ – на этапе 1–2 (изохорный процесс); $Q_{2\to3}$ — на этапе 2–3 (изотермический процесс). Таким образом,

$$Q_1 = Q_{1\to2} + Q_{2\to3}.$$

Количество теплоты, которая передаётся газу в изохорном процессе:

$$Q_{1\to2} = C_V\nu(T_2 - T_1)$$

где C_V — молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме, ν — количество молей газа, а T_2 — конечное значение температуры на этом участке цикла. Согласно условию задачи $T_2 = T_1(1+\alpha)$, тогда

$$Q_{1\to 2} = C_V \nu T_1 \alpha.$$

Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, которая передаётся газу в изотермическом процессе, равняется работе, выполненной газом:

$$Q_{2\to 3} = A_{2\to 3} = \nu R T_2 \ln\frac{V_2}{V_1},$$

где V_2 — объем газа при температуре T_2 и давления P_1. На этапе 3–1 газ отдает количество теплоты

$$Q_2 = Q_{3\to 1} = C_P \nu (T_2 - T_1) = C_P \alpha \nu T_1,$$

где C_P — молярная теплоёмкость газа при постоянном давлении.

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (П8.1):

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_P \alpha T_1}{\nu C_V \alpha T_1 + \nu R T_2 \ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

Заменим отношение V_2/V_1 на T_2/T_1, которое равняется $1+\alpha$. Выразим C_V и C_P через число степеней совбоды молекул i (для двухатомного идеального газа $i=5$). Тогда после сокращения на ν и $R/2$ получим

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)\alpha}{i\alpha + 2(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}.$$

После подстановки числовых значений имеем $\eta = 0.041$ или $\eta = 4.1~\%$.

Пример 8.2. Найти изменение энтропии ΔS во время нагревания воды массой $m = 100$ г от $T_1 = 0$ °C до $T_2 = 100$ °C и последующего превращения воды в пар.

Решение. Найдём отдельно изменение энтропии $\Delta S'$ во время нагревания воды и изменение энтропии $\Delta S''$ во время преобразования ее на пара. Полное изменение энтропии будет выражаться суммой $\Delta S'$ и $\Delta S''$.

Запишем изменение энтропии общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (\Pi 8.2)$$

При бесконечно малом изменении температуры dT тратится количество теплоты $dQ' = cmdT$, где m — масса тела, c — его удельная теплоёмкость. Подставив выражение dQ' в уравнение (П8.2), получим формулу для изменения энтропии во время нагревание воды:

$$\Delta S' = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{c\,m\,dT}{T} = c\,m \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где $c = 4200$ Дж/(кг·К).

Численное значение изменения энтропии $\Delta S' = 131$ Дж/К.

Определяя по формуле (П8.2) изменение энтропии в случае превращения воды в пар, постоянную температуру T_2 выносят за знак интеграла:

$$\Delta S'' = \frac{1}{T_2} \int\limits_1^2 dQ'' = \frac{Q''}{T_2}, \qquad (\Pi 8.3)$$

где Q'' — количество теплоты, израсходованноt на превращение воды в пар.

Подставив в уравнение (П8.3)

$$Q'' = rm,$$

где r — удельная теплота парообразования ($r = 2.26 \cdot 10^6$ Дж/кг), получим

$$\Delta S'' = \frac{rm}{T_2} = 606 \text{ Дж/К}.$$

Итак, полное изменение энтропии во время нагревания воды и превращении её в пар:

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = 737 \text{ Дж/К}.$$

Вариант 8.1

8.1.1. Определить удельную теплоёмкость c_P смеси кислорода и азота, если количество вещества ν_1 первого компонента равняется 2 молям, а количество вещества ν_2 второго — 4 молям.

8.1.2. Кислород нагревается при постоянном давлении $P = 80$ кПа. Его объем увеличивается от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Определить: 1) изменение внутренней энергии кислорода ΔU; 2) работу A, выполненную газом при расширении; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

8.1.3. Азот массой $m = 2$ г, который имел температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в 10 раз ($n = 10$). Найти конечное значение температуры T_2 газа и работу A сжатия.

8.1.4. Углекислый газ массой $m = 0.22$ кг изобарно нагревается от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Найти изменение энтропии газа.

8.1.5. Вследствие нагревания азота массой $m = 2.2$ г его температура увеличилась в два раза ($n = 2$), а энтропия — на $\Delta S = 1.6$ Дж/К. При каких условиях проходило нагревание: при $V = \text{const}$ или при $P = \text{const}$?

Вариант 8.2

8.2.1. Некоторый газ при нормальных условиях имеет плотность $\rho = 8.94 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Определить его молярную массу, химическую формулу, а также удельные теплоемкости c_V и c_P.

8.2.2. Определённую массу азота сжали в пять раз ($n = 5$) по объёму: первый раз — адиабатно, второй — изотермически. Начальное состояние газа в обеих случаях одинаково. Найти отношение работ, затраченных на сжимание газа в первом и втором случаях.

8.2.3. Три моля ($\nu = 3$ моль) идеального газа, который имел температуру $T = 273$ К, изотермически расширили в пять раз ($n = 5$), а дальше изохорно нагрели так, что давление стало равно первоначальному. На протяжении всего процесса газ получил количество теплоты $Q = 80$ кДж. Определить показатель адиабаты γ этого газа.

8.2.4. Воду массой $m_1 = 5$ кг и $T_1 = 280$ К смешали с водой массой $m_2 = 8$ кг и $T_2 = 350$ К. Найти: 1) температуру смеси θ; 2) изменение энтропии ΔS во время смешивания. Удельная теплоёмкость воды $c = 4.2$ кДж/(кг·К).

8.2.5. Паровая машина мощностью $P = 14.7$ кВт тратит за один час работы угля массой $m = 8.1$ кг с теплообразовательной способностью $q = 3.3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температура котла $T_1 = 473$ К, охладителя $T_2 = 331$ К. Найти фактический КПД машины и сравнить его с КПД идеальной тепловой машины, которая работает по циклу Карно в интервале тех же температур.

Вариант 8.3

8.3.1. Найти эффективный показатель адиабаты γ для смеси газов, которая содержит гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

8.3.2. Кислород занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 0.2$ МПа. Сначала газ был нагрет при постоянном давлении до объёма $V_2 = 3$ м^3, а потом при постоянном объёме — до давления $P_2 = 0.5$ МПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа ΔU; 2) выполненную газом работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

8.3.3. Воздух, находящийся под давлением $P_1 = 100$ кПа, был адиабатически сжат до $P_2 = 1$ МПа. Рассчитать давление P_3, которое установится, когда сжатый воздух остынет до начальной температуры при неизменном объёме.

8.3.4. Вычислить изменение энтропии, если воздух массой $m = 2$ г переходит от объёма $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 при давлении $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па к объёму $V_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3 при давлении $P_2 = 10^5$ Па.

8.3.5. В машине, которая работает по циклу Карно, температура нагревателя в n раз большая температуры хододильника. Какую часть теплоты, полученную за один цикл от нагревателя, рабочее тело отдаёт холодильнику?

Вариант 8.4

8.4.1. Какое количество теплоты Q выделится, если азот массой $m = 1$ г при температуре $T = 280$ К и начальном давлении $P_1 = 10^5$ Па изотермически сжать до $P_2 = 1$ МПа?

8.4.2. Найти молярную массу газа, если для изобарного нагревания килограмма ($m = 0.5$ кг) этого газа на $\Delta T = 10$ К нужно тепла на $\Delta Q = 1.48$ кДж больше, чем для изохорного нагревания той самой массы газа до той же температуры.

8.4.3. Кислород нагревают при постоянном давлении от $T_1 = 323$ К до $T_2 = 373$ К. Масса кислорода $m = 0.16$ кг. Найти изменение внутренней энергии ΔU и энтропии ΔS в этом процессе.

8.4.4. Холодильная машина, которая работает по обратному циклу Карно, выполняет за один цикл работу $A = 37$ кДж. При этом она отбирает тепло от тела с температурой $T_2 = -10$ °C и передаёт его телу с температурой $T_1 = 17$ °C. Найти КПД цикла, количество теплоты Q_2, отобраннot от холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданнot более горячему телу за один цикл.

8.4.5. Изменение энтропии между адиабатами в цикле Карно $\Delta S = 4200$ Дж/К. Разность температур между изотермами $\Delta T = 100$ К. Какое количество теплоты превращается в работу в этом цикле?

Задачи для повторения школьной программы

8.Ш.1. При уменьшении объёма одноатомного газа в 3,6 раза его давление увеличилось на 20 %. Как изменилась внутренняя энергия газа?

Ответ: уменьшилась в три раза.

8.Ш.2. Воздух, который находится в цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем, занимает объем 7 л и имеет температуру 280 К. Вычислить работу, выполненную воздухом во время его нагревания до 296 К, при условии, что атмосферное давление оставалось неизменным и равнялось 10^5 Па.

Ответ: $A = 40$ Дж.

8.Ш.3. Объем кислорода массой 160 г, температура которого составляет 27 °C, во время изобарного нагревания увеличился вдвое. Определить работу газа при расширении, количество теплоты, которое было израсходовано на нагревание кислорода, и изменение его внутренней энергии. Удельная теплоёмкость кислорода при постоянном давлении равняется 920 Дж/(кг·К).

Ответ: $A = 12.5$ кДж; $Q = 43.63$ кДж; $\Delta U = 31.16$ кДж.

8.Ш.4. Чтобы охладить 200 г воды, которая имеет температуру 25 °C, у неё бросают куски льда объёмом 6.4 $см^3$ каждый, температура которых -5 °C. Сколько нужно бросить кусков для охлаждения воды до 5 °C? Для расчёта использовать: $c_в = 4200$ Дж/(кг·К); $c_л = 2100$ Дж/(кг·К); $\rho_л = 900$ кг/$м^3$; $\lambda_л = 3.3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: 8 кусков.

8.Ш.5. В алюминиевый чайник, масса которого 400 г, налили 2 кг воды при температуре 10 °C и поставили на газовую горелку, которая имеет КПД 40 %. Каккова мощность горелки, если через 10 мин. вода закипела, причём 20 г её выкипело? Для расчёта взять: $c_{Al} = 380$ Дж/(кг·К); $c_в = 4200$ Дж/(кг·К); $r_в = 2.3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Ответ: $P = 3.4$ кВт.

8.Ш.6. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % теплоты, полученной от нагревателя, передаётся холодильнику, температура которого 0 °C. Определить температуру нагревателя и коэффициент полезного действия тепловой машины.

Ответ: $T_1 = 341$ К; $\eta = 0.2$.

8.Ш.7. Идеальная тепловая машина, для которой холодильником является воздух при нормальных условиях, поднимает груз массой 400 кг. Рабочее тело машины получает от нагревателя, температура которого составляет 200 °C, количество теплоты $8 \cdot 10^4$ Дж. На какую максимальную высоту поднимает груз тепловая машина? Трением пренебречь.

Ответ: $h = 8.46$ м.

8.Ш.8. Определить внутреннюю энергию гелия, который заполняет аэростат объёмом 60 $м^3$ при давлении 10^5 Па.

Ответ: $U = 9 \cdot 10^6$ Дж.

8.Ш.9. Какое количество теплоты необходимо передать водороду массой $m = 12$ г, чтобы нагреть его на $\Delta T = 50$ К при условиях постоянства: а) давления; б) объёма? (Удельная теплоёмкость водорода при постоянном давлении $c_P = 14 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).)

Ответ: $Q_P = 8.4$ кДж; $Q_V = 6.23$ кДж.

8.Ш.10. Кислород массой 3 кг при температуре 320 К охлаждают изохорно, вследствие чего его давление уменьшается в три раза. Потом газ изобарно расширяют так, что его температура достигает начального значения. Какую работу выполнил газ? Найти изменение его внутренней энергии.

Ответ: $A = 166$ кДж; $\Delta U = 0$.

8.Ш.11. Кислород нагревают при постоянном давлении 80 кПа. При этом его объем увеличивается от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Определить: увеличение внутренней энергии кислорода; работу, выполненную кислородом во время расширения; количество теплоты, переданное кислороду.

Ответ: $\Delta U = 400$ кДж; $A = 160$ кДж; $Q = 560$ кДж.

8.Ш.12. Какую массу стали, температура которой составляет 20 °C, можно расплавить в печи с КПД 50 %, если сжечь 2 т каменного угля? Для расчёта взять $c_{\text{ст}} = 460$ Дж/(кг·К); $\lambda_{\text{ст}} = 82 \cdot 10^3$ Дж/кг; $t_{\text{пл}} = 1400$ °C; удельная теплота сгорания угля $q = 2.9 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Ответ: $m_{\text{ст}} = 4$ т.

Глава 9

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Номер формулы	Формула	Название формулы	Пояснения
1	2	3	4
9.1	$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d_{\text{эф}}^2 n\langle v\rangle$	Число столкновений молекул газа в единицу времени	$d_{\text{эф}}$ – эффективный диаметр молекулы; $\langle v\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул
9.2	$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{эф}}^2 n}$	Средняя длина свободного пробега молекулы	n – концентрация молекул
9.3	$dM = -D\frac{d\rho}{dx}dS_{\perp}dt$	Уравнение диффузии (закон Фика)	dM – масса газа, переносимая через площадку $dS_{\perp}$ за время dt; ρ – плотность газа
9.4	$D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle$	Коэффициент диффузии	

1	2	3	4
9.5	$dF = \eta \left\| \frac{du}{dz} \right\| dS$	Сила внутреннего трения (закон Ньютона)	$\frac{du}{dz}$ – градиент скорости движения слоев; u – скорость движения слоя
9.6	$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\lambda\rangle\langle v\rangle = \rho D$	Коэффициент вязкости	ρ – плотность среды
9.7	$dQ = -\varkappa \frac{dT}{dx} dS dt$	Уравнение теплопроводности (закон Фурье)	dQ – количество теплоты, переносимое через площадку dS за время dt; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры
9.8	$\varkappa = \frac{1}{3} c_V \rho\langle\lambda\rangle\langle v\rangle = \eta c_V = \rho c_V D$	Коэффициент теплопроводности газа	c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

Пример 9.1. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул гелия при температуре $T = 273$ К и давлении $P = 101.3$ кПа, если коэффициент вязкости гелия $\eta = 13$ мкПа·с.

Решение. Коэффициент вязкости определяется формулой

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v\rangle \langle\lambda\rangle \rho,$$

где

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \qquad (\text{П}9.1)$$

— средняя арифметическая скорость молекул. Плотность ρ найдём из уравнения Клапейрона – Менделеева ($\rho = m/V$):

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \qquad (\text{П}9.2)$$

где $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.

Из формулы (9.6) выразим $\langle \lambda \rangle$ и подставим это уравнение в формулы (П9.1), (П9.2):

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\langle v \rangle \rho} = \frac{3\eta}{2P}\sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}.$$

Числовой расчёт даёт $\langle \lambda \rangle = 1.82 \cdot 10^{-9}$ м.

Пример 9.2. Скорость самолёта $v = 720$ км/ч. Считая, что слой воздуха возле крыла самолёта, который захватывается вследствие вязкости, имеет толщину $\Delta z = 4$ см, найти касательную силу, которая действует на каждый квадратный метр поверхности крыла. Эффективный диаметр как молекулы азота, так и молекулы кислорода $d_{\text{эф}} = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Температура воздуха $T = 0$ °C.

Решение. Сила внутреннего трения определяется формулой

$$F = \left|\frac{dp}{dt}\right| = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z}S.$$

При этом сила трения на единицу поверхности крыла будет равна:

$$\frac{F}{S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z}.$$

В этих формулах η — коэффициент вязкости, который можно рассчитать по формуле (9.6):

$$\eta = \frac{1}{3}\langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho,$$

где $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул,

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{эф}}^2 n}.$$

Кроме того, коэффициент вязкости η зависит от средней арифметической скорости движения молекул воздуха

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Плотность определяется уравнением состояния идеального газа:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Градиент скорости $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ в этой задаче можно записать в виде: $\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{v}{\Delta z}$, поскольку $\Delta v = v - 0 = v$. Тогда окончательно

$$\frac{F}{S} = \frac{2}{3\pi d_{\text{еф}}^2 N_A}\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}\frac{v}{\Delta z} = 9 \cdot 10^{-2}\ \text{Н/м}^2.$$

Вариант 9.1

9.1.1. Плотность газа увеличили в два раза ($k_1 = 2$), температуру уменьшили в четыре раза ($k_2 = 4$). Как изменится среднее число столкновений молекул в единицу времени?

9.1.2. Найти среднюю длину свободного пробега и частоту столкновений молекул углекислого газа CO_2 при температуре $T = 300$ К и давлении $P = 10$ Па. Эффективный диаметр молекулы CO_2 $d_{\text{эф}} = 3.2$ Å.

9.1.3. Найти коэффициент теплопроводности гелия, из которого состоит атмосфера Солнца. Температура солнечной поверхности $T = 6 \cdot 10^3$ К. Эффективный диаметр атома гелия $d_{\text{эф}} = 2.18$ Å.

9.1.4. Найти коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях. Как изменится эта величина, если повысить температуру водорода до $T_2 = 600$ K при постоянном давлении? Эффективный диаметр молекулы водорода $d_{эф} = 2.3$ Å.

9.1.5. Вычислить коэффициент теплопроводности водорода, коэффициент вязкости которого $\eta = 8.6$ мкПа·с.

Вариант 9.2

9.2.1. Найти среднюю частоту столкновений $\langle z \rangle$ атомов аргона ($\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) при $T = 290$ K и $P = 15$ Па. Эффективный диаметр атома аргона $d_{эф} = 2.9 \cdot 10^{-10}$ м.

9.2.2. Сосуд объемом $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3 содержит $N = 10^{23}$ молекул одноатомного газа. Коэффициент теплопроводности газа $\varkappa = 8.4 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м·К). Найти коэффициент диффузии газа.

9.2.3. При нормальных условиях коэффициент внутреннего трения азота $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Рассчитать среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ молекул азота.

9.2.4. Какой должна быть предельная концентрация n молекул газа внутри сферического сосуда, чтобы они не сталкивались одна с другой? Эффективный диаметр молекул газа $d_{эф} = 3 \cdot 10^{-10}$ м, диаметр сосуда $D = 15$ см.

9.2.5. Какая сила сопротивления возникает при вязком трении в условиях обтекания воздухом крыла самолёта Ан-225 “Мрія” при скорости $v = 792$ км/ч, если на расстоянии $\Delta z = 4.4$ см от поверхности крыла воздух неподвижен, а площадь крыла $S = 905$ м^2? Температура воздуха $T = -23$ °C. Эффективный диаметр молекул азота и кислорода $d_{эф} = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Универсальные физические стали

$G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2	Гравитационная постоянная	Закон всемирного тяготения
$c = 299\,792\,458$ м/с	Скорость распространения света в вакууме	$c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с
$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Постоянная Больцмана	Энтропия термодинамической системы
$N_{\text{А}} = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	Число Авогадро	Количество молекул (атомов) в 1 моле вещества
$R = 8.31$ Дж/(К·моль)	Универсальная газовая постоянная	$R = k\,N_A$

Некоторые характеристики планеты Земля

$M_{з} = 6.0 \cdot 10^{24}$ кг	Масса Земли	
$L_{з} = 4.0 \cdot 10^{7}$ м	Длина меридиана	Устаревшее определение метра
$R_{з} = L_{з}/(2\pi)$	Радиус Земли (средний)	$R_{з} \approx 6.4 \cdot 10^6$ м
$g = GM_{з}/R_{з}^2$	Ускорение свободного падения	$g \approx 10$ м/с^2 (в расчётах)
$\mu_{\text{воз}} = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Молярная масса воздуха	
$\gamma_{\text{воз}} = 1.4$	Показатель адиабаты	$N_2{:}O_2 \approx 80:20$ – состав воздуха
$T_{\text{норм}} = 0$ °C	Нормальные условия	$T_{\text{норм}} \approx 273$ К
$P_{\text{норм}} = 1$ атм	Нормальные условия	$P_{\text{норм}} \approx 10^5$ Па

Производные. Общие правила

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad \frac{d(Cf)}{dx} = C\frac{df}{dx} \quad (C = \mathrm{const})$$

$$\frac{d(f\,g)}{dx} = \frac{df}{dx}\,g + f\,\frac{dg}{dx} \qquad \frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\,g - f\,\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} \qquad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} \quad \left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$$

Производные некоторых функций

$$\frac{d}{dx} = 0 \qquad \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\exp^x\right) = \exp^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) - \text{первообразная функции } f(x)$$

Неопределённые интегралы (первообразные) некоторых функций [1]

$$\int dx = x \qquad \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int \exp^x\,dx = \exp^x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

[1] К правой части каждого равенства может быть добавлена произвольная постоянная.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1.1. $\langle v\rangle = -B + C(t_1+t_2) = 7$ м/с, $\langle a\rangle = 2C = 4$ м/с^2.
1.1.2. $y = C\sqrt{(x-A)/B}$, $\vec{v} = 2Bt\vec{i} + C\vec{j}$, $\vec{a} = 2B\vec{i}$, $v = \sqrt{4B^2t^2+C^2}$, $a = 2|B|$, $a_\tau = \frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}}$, $a_n = 2\frac{|B||C|}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}}$, $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4B^2t^2+C^2)^{3/2}}{2|B||C|}$. **1.1.3.** $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha\beta t^2\vec{j}$, $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \alpha\beta t\vec{j}$, $\vec{a} = \alpha\beta\vec{j}$. **1.1.4.** $\langle v\rangle = \pi R/\tau = \frac{\pi}{10}$ м/с, $|\langle\vec{v}\rangle| = \frac{2R}{\tau} = 0.2$ м/с, $|\langle\vec{a}\rangle| = \frac{2\pi R}{\tau^2} = \frac{\pi}{50}$ м/с^2. **1.1.5.** $s(t) = \frac{1}{\nu}\left(1-e^{-\nu t}\right)$.
1.2.1. $\langle v\rangle = B + Ct_f = 12$ м/с, $\langle a\rangle = 1$ м/с^2.
1.2.2. $\vec{v} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{a} = 6\vec{i}$, $v = 2\sqrt{9t^2+1}$, $a = 6$, $a_\tau = \frac{2\cdot 9t}{\sqrt{9t^2+1}}$, $a_n = \frac{6}{\sqrt{9t^2+1}}$, $R = \frac{2}{3}(9t^2+1)^{3/2}$.
1.2.3. $\vec{a} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$, $a = 2\sqrt{1+9t^2}$, $\Delta\vec{r} = t_f\vec{i} + t_f^2\vec{j} + t_f^3\vec{k} = 2\vec{i} + 4^2\vec{j} + 8\vec{k}$, $|\Delta\vec{r}| = t_f\sqrt{1+t_f^2+t_f^4} = 2\sqrt{21}$.
1.2.4. $S = \frac{k^2t^2}{4}$, $v = \frac{k^2t}{2}$, $a = \frac{k^2}{2}\sqrt{1+\frac{k^4t^4}{4R^2}}$, $\cos\alpha = \frac{2R}{\sqrt{4R^2+k^4t^4}}$.
1.2.5. $v = \frac{2}{\pi}(1-\cos\pi t)$, $s = \frac{2}{\pi}\left(t - \frac{\sin\pi t}{\pi}\right)$, $R = \frac{2}{\pi^2}\frac{(1-\cos\pi t)^2}{\cos\pi t}$.
1.3.1. $t_f = \frac{a_f - 2C}{6D}$, $\langle a\rangle = C + \frac{a_f}{2} = 0.64$ м/с^2.
1.3.2. $\vec{v} = 2\omega(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})$, $\vec{a} = -2\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$, $v = 2\omega$, $a = 2\omega^2$, $a_\tau = 0$, $a_n = 2\omega^2$, $R = 2$. **1.3.3.** $\vec{r} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + t^4\vec{k}$, $|\Delta\vec{r}| = t_1^2\sqrt{1+t_1^2+t_1^4} = 4\sqrt{21}$. **1.3.4.** $v = v_0e^{-rt}$, $s = \frac{v_0}{r}\left(1-e^{-rt}\right)$. **1.3.5.** $\vec{v} = v_0(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$, $\vec{a} = -v_0\omega\sin\omega t\,\vec{i} + v_0\omega\cos\omega t\,\vec{i}$, $v = v_0$, $a = v_0\omega$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
1.4.1. $a = -\frac{v_0}{\tau}$, $s(t<\tau) = v_0t - \frac{v_0t^2}{2\tau}$, $s(t>\tau) = v_0(\tau - t) + \frac{v_0t^2}{2\tau}$. **1.4.2.** $\vec{v} = 6\,t\,\vec{i} + 8\,t\,\vec{j}$, $v = 10t$, $\vec{a} = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$, $a = 10$, $a_\tau = 10$, $a_n = 0$, $s(t_f) = 5t_f^2 = 500$.

1.4.3. $\vec{a} = -g\vec{j}$, $a = g$, $\vec{v}(t) = v_0\vec{i} - gt\vec{j}$, $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$, $\vec{r}(t) = v_0t\vec{i} + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}$, $a_\tau = g\frac{gt}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$, $a_n = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$, $R = \frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$. **1.4.4.** $a = \frac{k^2}{2}$, $v = \frac{k^2t}{2}$, $\langle v\rangle = \frac{k\sqrt{S_1}}{2}$.
1.4.5. $R = \frac{c^3}{2bS}$, $a = \sqrt{c^2 + b^2\left(\frac{2S}{c}\right)^4}$.

Глава 2

2.1.1. $v = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $s = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.
2.1.2. $v = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right)$, $s = \frac{mg}{\alpha}\left[t + \frac{m}{\alpha}\left(\exp(-\frac{\alpha}{m}t) - 1\right)\right]$, $v_\infty = \frac{mg}{\alpha}$. **2.1.3.** $t \le \frac{\mu mg}{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow s = 0$, $t > \frac{\mu mg}{b} \Rightarrow s = \frac{b}{6m}\left(t - \frac{\mu mg}{b}\right)^3$. **2.1.4.** $\Delta\vec{p} = \tau^4\vec{i} + \tau^2\vec{j}$.
2.1.5. $R_C = \frac{m}{M+m}L_{Mm} \approx 4600$ км. **2.2.1.** $\vec{F} = -m\omega^2(x\vec{i}+y\vec{j})$, $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$. **2.2.2.** $v = \frac{mg}{r}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1 - \exp(-\frac{r}{m}t)\right)$.
2.2.3. $y = \frac{b\,x^3}{6mv_0^3}$. **2.2.4.** $\vec{p} = \frac{2\tau}{\pi}\vec{F}_0$. **2.2.5.** $X_C = \frac{1}{6}l$.
2.3.1. $y = h - \frac{gx^2\sin\alpha}{2v_0^2}$. **2.3.2.** $v(t) = v_0\exp\left(-\frac{r}{m}\,t\right)$, $s(t) = \frac{v_0m}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r}{m}\,t\right)\right)$. **2.3.3.** $y = x^{2/3}$.
2.3.4. $t_B - t_A = \frac{|\Delta\vec{p}|}{mg}$. **2.3.5.** $X_C = \frac{5}{9}l$.
2.4.1. $y = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. **2.4.2.** $v(t) = \sqrt{v_0^2 + \frac{\alpha}{m}t}$.
2.4.3. $s(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t)$. **2.4.4.** $v = \sqrt{g\frac{l^2-l_0^2}{l}}$.
2.4.5. $X_C = \frac{3}{4}H$.

Глава 3

3.1.1. $\varepsilon = \frac{2\pi\nu}{\Delta t} = \pi$ рад/с^2, $N = \frac{\nu\Delta t}{2} = 25$ с.
3.1.2. $a_n = (B + 3C\,t^2)^2\,R = 115.2$ м/с^2, $a_\tau = 6RC\,t =$ $= 0.6$ м/с^2, $a = R\sqrt{(B+3C\,t^2)^4 + 36\,C^2\,t^2} = 115.2$ м/с^2.
3.1.3. $\omega(t) = \frac{a}{b} + \left(\omega_0 - \frac{a}{b}\right)\exp^{-bt}$.
3.1.4. $F = \frac{4\pi}{5}\frac{M_3R_3}{T^2} = 1.28\cdot10^{22}$ Н.
3.1.5. $h_{\text{ц}}/h_{\text{к}} = \left(1 + \frac{J_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}R_{\text{ц}}^2}\right)\Big/\left(1 + \frac{J_{\text{к}}}{m_{\text{к}}R_{\text{к}}^2}\right) = 15/14$.

3.2.1. $\varepsilon = \frac{2\pi\nu_0}{t} = \frac{\pi}{6}$ рад/с^2, $N = \frac{\nu_0 t}{2} = 150$.
3.2.2. $J = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = 2.25$ кг·м^2.
3.2.3. $P = J\frac{4\pi^2\nu^2}{\tau} \approx 400$ кВт. **3.2.4.** $a = g\frac{4mR^2}{J+5mR^2} \Rightarrow a_\text{п} = \frac{2}{3}g$, $a_\text{с} = \frac{8}{11}g$, $F = mg\frac{mR^2-J}{J+5mR^2} \Rightarrow F_\text{п} = 0$, $F_\text{с} = \frac{1}{11}mg$.
3.2.5. $N = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g} = 15$. **3.3.1.** $\frac{\Delta a_\tau}{dt} = 6DR = 0.3$ м/с^3.
3.3.2. $\omega = \frac{2v_0}{D}\frac{\tau^2}{(t+\tau)^2}$, $\varepsilon = -\frac{4v_0}{D}\frac{\tau^2}{(t+\tau)^3}$, $\varphi = \frac{2v_0\tau}{D}\frac{t}{t+\tau}$.
3.3.3. $N = \frac{1}{2}\nu_0\Delta t = 105$, $M = \frac{\pi\nu_0\, mD^2}{4\Delta t} \approx 0.044$ Н·м.
3.3.4. $M = -\frac{2}{5}\,mR^2\,\frac{B}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. **3.3.5.** $\mu = \frac{\pi\nu_0 mD}{2F\tau} = 0.4$.
3.4.1. $N = \pi\frac{\nu_2^2-\nu_1^2}{\varepsilon} \approx 21.6$, $\Delta t = 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{\varepsilon} \approx 7.85$ с.
3.4.2. $\omega = 2B\,t{+}3C\,t^2$, $v = \frac{1}{2}\,D\,(2B\,t{+}3C\,t^2)$, $\varepsilon = 2B + 6C\,t$, $a_\tau = D\,(B + 3C\,t)$. **3.4.3.** $a = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m} = \frac{1}{8}g$.
3.4.4. $a_1/a_2 = \left(1 + \frac{J_2}{m_2R_2^2}\right) \Big/ \left(1 + \frac{J_1}{m_1R_1^2}\right) = \frac{3}{4}$.
3.4.5. $\omega = \frac{mvR}{J+mR^2} \approx \frac{mvR}{J} = 1.5$ рад/с.

Глава 4

4.1.1. $h = \frac{m^2v^2}{2g(M+m)^2} = 72$ мм. **4.1.2.** $v_1 = \frac{m_2v_2\cos\alpha}{m_1} = 0.2$ м/с.
4.1.3. $A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g(l_2 - l_1) = 4.9$ Дж.
4.1.4. $A = \frac{m}{2}\left((D + B\,t_2 + C\,t_2^2)^2 - (D + B\,t_1 + C\,t_1^2)^2\right) = 60$ МДж. **4.1.5.** $v_2 = \sqrt{\frac{2FR}{m} + v_1^2} = 16$ м/с.
4.2.1. $p_\Sigma = \frac{2}{3}m\sqrt{2gl} = 5$ кг·м/с.
4.2.2. $\frac{m_1}{m_2} = 2\cos\alpha + 1$. **4.2.3.** $\langle N\rangle = \frac{1}{2}\mu mgv_0 = 1.5$ Вт.
4.2.4. $h_\text{max} = R_3$. **4.2.5.** $v_0 = \sqrt{\mu gl} = 2.5$ м/с.
4.3.1. $A_\Sigma(t) = \frac{m\alpha^4t^2}{8}$. **4.3.2.** $\Delta E_K = -\frac{m_1m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)}$.
4.3.3. $E_K = \frac{M^2\tau^2}{2J} = 2$ кДж.
4.3.4. $h_1 = \frac{h_2}{2(H_2+h_2)}\left(h_2 + \sqrt{h_2^2 + 4(H_2 + h_2)H_1}\right) \approx 1.33$ м.
4.3.5. $\mu = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.2$. **4.4.1.** $v = 2\pi\nu_1 R\frac{m_1}{m_1+2m_2} \approx 0.942$ м/с.

4.4.2. $\eta = \frac{m_1}{m_1+m_2} = 97.5\%$. **4.4.3.** $v = \left(\frac{M}{2m} - \frac{1}{6}\right)\sqrt{6gl}\sin\frac{\alpha}{2}$, $v_0 = \left(\frac{M}{2m} + \frac{1}{6}\right)\sqrt{6gl}\sin\frac{\alpha}{2}$. **4.4.4.** $t = \frac{2l}{\sqrt{gh}} = 4$ с. **4.4.5.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Глава 5

5.1.1. $v_x = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2}\right)\left(\frac{l}{l'}\right)^2} \approx 0.426c$, $v_0 = \frac{v_x - v_x'}{1 - v_x v_x'/c^2} \approx$ $\approx 0.341c$. **5.1.2.** $A = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = \frac{5}{12}m_0c^2$, $A_K = \frac{m_0(v_2^2-v_1^2)}{2} = 0.14\ m_0c^2$, $A_K < A$.

5.1.3. $v \approx c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c\tau_0}{l}\right)^2\right) = 0.995c$.

5.1.4. $F = \frac{I}{ec}\sqrt{E_K(E_K + 2m_0c^2)}$, $P = \frac{IE_K}{e}$.

5.1.5. $a = \frac{F}{m_e}\frac{1}{(1+E_K/m_ec^2)^3} = \frac{8}{27}\frac{F}{m_e}$.

5.2.1. $v = c\sqrt{\frac{2\Delta l}{l_0}} = 10^{-3}c = 10 \cdot V_3$.

5.2.2. $\Delta\tau = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\tau \approx 14$ мс. **5.2.3.** $M_r = \frac{35}{12}m_0$, $v = \frac{16\pm9}{35}c$, $M_{0+} = \frac{5\sqrt{6}}{6}m_0 \approx 2.04\,m_0$, $M_{0-} = \frac{7\sqrt{6}}{6}m_0 \approx 2.86\,m_0$.

5.2.4. $s(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1\right)$, $\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}t}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$, $v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{mc}{Ft}\right)^2}}$. **5.2.5.** $\tau_0 \approx \frac{l}{c}\sqrt{\frac{2(c-v)}{c}} = 25$ нс.

5.3.1. $v = c\sqrt{1-n^2} = 0.6\,c$. **5.3.2.** $U = \frac{m_ec^2}{e}(K-1)$. **5.3.3.** $\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{K(K+2)}{3}} = 2\sqrt{2}$. **5.3.4.** $F_L = \frac{E}{R}\left(\frac{v}{c}\right)^2 =$ $= 8 \cdot 10^{-14}$ Н. **5.3.5.** $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ м.

Глава 6

6.1.1. $v_{\max} = 0.1$ м/с, $a_{\max} = 0.5$ м/с^2.
6.1.2. $F_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}m\omega^2A = 0.05$ Н, $F_{\max} = m\omega^2A = 0.1$ Н.
6.1.3. $N_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 100$, $t_{1/2} = \frac{2\pi\ln 2}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 100$ с.
6.1.4. $A_\Sigma = \sqrt{2}$, $\varphi_{0\Sigma} = \frac{\pi}{4}$. **6.1.5.** $T = 2\pi\left(\frac{\rho}{\rho_1-\rho_2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{h}{g}}$.

6.2.1. $T = 2\pi\frac{A}{v_{max}} = 0.03$ с, $a_{max} = \frac{v_{max}^2}{A} = 4000$ м/с^2.

6.2.2. $x_\Sigma = A_\Sigma \sin(t + \varphi_{0\Sigma})$, $A_\Sigma = \sqrt{5}$, $\varphi_{0\Sigma} = \operatorname{arctg} 2$. **6.2.3.** $T = \pi\sqrt{\frac{ml}{F}}$. **6.2.4.** $y = \frac{1}{2} - x^2$ $(-1 \le x \le 1)$. **6.2.5.** $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\eta^2}{32\pi^2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. **6.3.1.** $F = \frac{4\pi^2 mA}{T^2} \sin\frac{2\pi\tau}{T} \approx$ ≈ 1 Н, $E = \frac{2mA^2\pi^2}{T^2} \approx 0.2$ Дж. **6.3.2.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$. **6.3.3.** $\lambda = \frac{\pi|\ln(1-\eta)|}{\tau}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$. **6.3.4.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{m}}$. **6.3.5.** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. **6.4.1.** $\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}} = 4$ с$^{-1}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1.57$ с, $A = \sqrt{x^2 - \frac{v^2 x}{a}} \approx 7.07$ см, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{x\omega}\right) = \frac{\pi}{4}$ рад. **6.4.2.** $A = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$. **6.4.3.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\Delta}{g}}$, $A = \Delta\sqrt{2}$. **6.4.4.** $A = 2$ м, $T = 2$ с, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_{\max} \approx 6.28$ м/с, $a_{\max} \approx 20$ м/с^2, $\tau(x=0) = 0.5$ с. **6.4.5.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 5 \cdot 10^3$ с. **6.5.1.** $E = \frac{\pi d^2}{4} lj\sqrt{\frac{\mu}{\gamma RT}}$. **6.5.2.** $\xi\left(\frac{5}{3}\lambda, \frac{1}{3}T\right) = -\frac{A}{2}$. **6.5.3.** $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{vT}$. **6.5.4.** $j = \langle w\rangle\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$. **6.5.5.** $\langle w\rangle = \frac{N}{4\pi R^2}\sqrt{\frac{\mu}{\gamma RT}}$.

Глава 7

7.1.1. $N = \frac{PV}{kT} = 1.28 \cdot 10^{19}$, $E = \frac{5}{2}PV = 133$ мДж. **7.1.2.** $\frac{v_i}{\langle v_{\text{кв}}\rangle} = \sqrt{\frac{2mN_A}{3\mu}} = 1.29 \cdot 10^7$. **7.1.3.** $\left\langle\frac{1}{v}\right\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$. **7.1.4.** $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}\Delta v$, а) $\frac{\Delta N}{N} = 3.4$ %, б) $\frac{\Delta N}{N} = 2.3$ %. **7.1.5.** $P_1 = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT}\right) = 5.54 \cdot 10^4$ Па,
$P_2 = P_0 \exp\left(\frac{\mu g h_2}{RT}\right) = 1.27 \cdot 10^5$ Па.
7.2.1. $\rho = \frac{3P}{\langle v_{\text{кв}}\rangle^2} = 0.74$ кг/м^3.
7.2.2. $n_{He} = \left(\frac{P}{kT} - \frac{\rho N_A}{\mu_{N_2}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\mu_{He}}{\mu_{N_2}}\right) \approx 1.64 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **7.2.3.** $\frac{\Delta N}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\pi RT}}\, e^{-\frac{4}{\pi}}\Delta v = 1.9 \cdot 10^{-3}$. **7.2.4.** $h = -\frac{RT\ln\eta}{\mu g} = 1890$ м. **7.2.5.** $v = \frac{\omega R}{\varphi} = 300$ м/с.

7.3.1. $E = \frac{3mRT}{2\mu} = 124$ Дж. **7.3.2.** $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = 632$ м/с, $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8P}{\pi\rho}} = 582$ м/с, $v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} = 516$ м/с.
7.3.3. $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2 - \mu_1}} \sqrt{\ln \frac{\mu_2}{\mu_1}} = 1610$ м/с.
7.3.4. $\frac{\eta}{\eta_0} = \exp \frac{(\mu_2 - \mu_1)gh}{RT} = 1.398$.
7.3.5. $N_A = \frac{6RT \ln \alpha}{\pi d^3 g \Delta\rho \Delta h} = 6.35 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.
7.4.1. $n = \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3kT} = 1.88 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.
7.4.2. $T = \frac{\mu(v_2^2 - v_1^2)}{4R \ln \frac{v_2}{v_1}} = 328$ К. **7.4.3.** $E = \frac{5mP}{2\rho} = 50$ кДж.
7.4.4. $h = \frac{RT \ln \alpha}{(\mu_1 - \mu_2)g} = 111$ км. **7.4.5.** $h = \frac{RT}{\mu g} \frac{\eta \ln \eta}{(\eta - 1)}$.

Глава 8

8.1.1. $c_P = \frac{(i+2)(\nu_1 + \nu_2)R}{2(\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2)} = 992$ Дж/(кг·К).
8.1.2. $\Delta U = \frac{i}{2} P(V_2 - V_1) = 400$ кДж,
$A = P(V_2 - V_1) = 160$ кДж, $Q = \frac{i+2}{2} P(V_2 - V_1) = 560$ кДж.
8.1.3. $T_2 = T_1 n^{2/i} = 754$ К, $A = \frac{imRT_1}{2\mu}(n^{2/i} - 1) = 673$ Дж.
8.1.4. $\Delta S = \frac{(i+2)mR}{2\mu} \ln \frac{T_2}{T_1} = 115.2$ Дж/К. **8.1.5.** $P = \text{const}$.
8.2.1. $\mu = \frac{\rho RT}{P} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, H_2, $c_V = 10.37$ кДж/(кг · К), $c_P = 14.54$ кДж/(кг · К).
8.2.2. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{i(n^{2/i} - 1)}{2 \ln n} \approx 1.4$.
8.2.3. $\gamma = 1 + (n-1) \Big/ \left(\frac{Q}{\nu RT} - \ln n \right) \approx 1.4$.
8.2.4. $\theta = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 323$ К, $\Delta S = c(m_1 \ln \frac{\theta}{T_1} - m_2 \ln \frac{T_2}{\theta}) =$ $= 303$ Дж/К. **8.2.5.** $\eta_1 = \frac{Pt}{qm} = 19.8\%$. $\eta_2 = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 30.0\%$.
8.3.1. $\gamma = 1 + 2 \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \Big/ \left(i_1 \frac{m_1}{\mu_1} + i_2 \frac{m_2}{\mu_2} \right) = 1.51$.
8.3.2. $\Delta U = \frac{i}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1) = 3.25$ МДж,
$A = P_1(V_2 - V_1) = 0.4$ МДж, $Q = \Delta U + A = 3.65$ МДж.
8.3.3. $P_3 = P_2 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{2}{i+2}} = 518$ кПа.

8.3.4. $\Delta S = \frac{mR}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1} = 0.63$ Дж/К.
8.3.5. $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n}$. **8.4.1.** $Q = \frac{mRT}{\mu}\ln\frac{P_2}{P_1} = 191$ Дж.
8.4.2. $\mu = \frac{mR\Delta T}{\Delta Q} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
8.4.3. $\Delta U = \frac{imR}{2\mu}(T_2 - T_1) = 5.19$ кДж.
$\Delta S = \frac{(i+2)mR}{2\mu}\ln\frac{T_2}{T_1} = 21$ Дж/К. **8.4.4.** $\eta = \frac{T_2-T_1}{T_1} = 0.093$,
$Q_2 = \frac{AT_2}{T_1-T_2} = 360$ кДж, $Q_1 = \frac{AT_1}{T_1-T_2} = 397$ кДж.
8.4.5. $A = \Delta S \Delta T = 4.2 \cdot 10^5$ Дж.

Глава 9

9.1.1. Не изменится. **9.1.2.** $\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 P} = 9.1 \cdot 10^{-4}$ м,
$\langle z\rangle = \frac{4d_{\text{еф}}^2 P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{\mu T}} = 4.2 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.
9.1.3. $\varkappa = \frac{k}{\pi d_{\text{еф}}^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} = 0.185$ Вт/(м·К).
9.1.4. $D_1 = \frac{2}{3}\frac{kT_1}{\pi d_{\text{еф}}^2 P}\sqrt{\frac{RT_1}{\pi\mu}}$ $=9.1 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} =$
$= 3.26$. **9.1.5.** $\varkappa = \frac{i\eta R}{2\mu} = 89$ мВт/(м·К).
9.2.1. $\langle\nu\rangle = \frac{4d_{\text{еф}}^2 P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{\mu T}} = 5.5 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.
9.2.2. $D = \frac{2\varkappa V}{3Nk} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.
9.2.3. $\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{2P}\sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}} = 9.1 \cdot 10^{-6}$ м.
9.2.4. $n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{еф}}^2 D} = 1.67 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.
9.2.5. $F = \frac{2}{3\pi d_{\text{еф}}^2 N_A}\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}\frac{v}{\Delta z}S \approx 77$ Н.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иродов И.Е. Задачи по физике / И.Е. Иродов. — М. : Наука, 1988. — 416 с.
2. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. — М. : Наука, 1988. — 288 с.
3. Чертов А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. — М. : Высш. шк., 1981. — 496 с.
4. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка : навч. посіб. до практ. занять / Б.Г. Падалка, Л.С. Завертанна, П.А. Комозинський, А.О. Таран. — Х. : Держ. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 1999. — 84 с.
5. Дущенко В.П. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка / В.П. Дущенко, І.М. Кучерук. — К. : Вища шк., 1993. — 431 с.
6. Пастушенко С.М. Загальна фізика. Механіка / С.М. Пастушенко. — К. : НАУ, 2002. — 284 с.
7. Воловик П.М. Фізика для університетів / П.М. Воловик. — К. ; Ірпінь : Перун, 2005. — 864 с.
8. Савельев И.В. Курс общей физики : в 3 т. / И.В. Савельев. — СПб. : Лань, 2008. — Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. — 432 с.
9. Джанколи Д. Физика : в 2 т. / Д. Джанколи. — М. : Мир, 1989. — Т. 1. — 656 с.

Содержание

Охримовский Андрей Михайлович
Комозинский Петр Адамович
Подшивалова Оксана Владимировна
Лунёв Игорь Валентинович

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
ТЕРМОДИНАМИКА

Редактор

Св. план, 2010
Подписано в печать 7 сентября 2010 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офс. № 2. Офс. печать
Усл. печ. л. 6.45 Уч.-изд. л. 7,25. Тираж 500 экз.
Заказ 73. Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. М. Е. Жуковского
“Харьковский авиационный институт”
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Издательский центр “ХАИ”
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu