

Министерство образования Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра информатики и вычислительной математики

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

Часть 1

**Основы дискретной математики**

Рабочая программа

Задание на контрольную работу

Методические указания к выполнению контрольной работы

Направления и специальности подготовки высшего  
профессионального образования  
650000 – техника и технологии,  
кроме специальностей 060800, 061100, 150200, 220100, 240100.

Направление подготовки бакалавра  
550000 – технические науки,  
кроме 521500, 551400, 532800.

Санкт-Петербург  
2003

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 519.2.06(07)

Вычислительная математика, ч.1. Основы дискретной математики. Рабочая программа, задания на контрольную работу, методические указания к выполнению контрольной работы. – СПб.: СЗТУ, 2003. -30 с.

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по направлению подготовки дипломированного специалиста 650000 – техника и технологии и направлению подготовки бакалавра 550000 – технические науки.

В сборнике приводятся задания на контрольную работу и методические указания к её выполнению по разделам: алгебра логики, теория графов, автоматы.

Рассмотрено на заседании кафедры информатики и вычислительной математики 20 октября 2003г., одобрено методической комиссией факультета 20 октября 2003г.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: кафедра информатики и вычислительной математики СЗТУ (зав. кафедрой Г.Г.Ткаченко, канд. физ.-мат. наук, доц.)

Ю.В.Загашвили, д-р техн. наук, проф. Балтийского государственного технического университета.

СОСТАВИТЕЛИ: Т.Д.Бессонова, доц.,  
Г.Г.Ткаченко, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
В.В.Тарасенко, канд. физ.-мат. наук, ст. преп.,

## **Предисловие**

В предлагаемом комплексе, кроме заданий для контрольной работы по курсу “Вычислительная математика. Часть 1”, приводится рабочая программа курса, тематический план лекций, перечень тем практических занятий, список литературы и методические указания для успешного выполнения контрольной работы.

Контрольная работа предусматривает решение каждым студентом четырех задач, охватывающих следующие темы:

- алгебра логики;
- теория графов;
- теория автоматов.

Контрольная работа должна выполняться в тетради с полями не менее двух сантиметров. На обложке обязательно приводятся все данные автора работы (фамилия, имя, отчество, шифр, факультет, специальность). Условия каждой задачи записываются полностью. Решение задачи сопровождается подробными объяснениями. В условиях задачи и её решении не допускаются никакие сокращения слов.

### **Объём очных занятий**

по очно-заочной форме обучения:

- |                      |          |
|----------------------|----------|
| лекции               | 8 часов; |
| практические занятия | 4 часа.  |

## **1. Содержание дисциплины**

### **1.1. Рабочая программа**

(объём 80 часов аудиторных занятий)

#### **1.1.1. Элементы алгебры логики.**

Высказывания, значение истинности высказывания, эквивалентные высказывания. Определение двоичной переменной и булевой функции. Элементарные функции алгебры логики, сложные булевы функции. Свойства функций алгебры логики.

Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Полные системы функций. Построение минимальных дизъюнктивных и конъюнктивных форм (ДНФ и КНФ).

Применение алгебры логики к анализу и синтезу контактных схем.

#### **1.1.2. Элементы теории графов**

Определение графа. Основные понятия и определения теории графов. Задача о кратчайшем пути (алгоритм Дейкстры).

#### **1.1.3. Элементы теории автоматов**

Понятия и типы дискретных автоматов (ДА). Задачи математического исследования дискретных автоматов. Применение алгебры логики к анализу ДА.

## 1.2. Тематический план лекций

для студентов очно-заочной формы обучения

*Лекция 1.* Понятие булевой переменной. Элементарные и сложные функции алгебры логики. Их свойства. (2 часа)

*Лекция 2.* Минимизация функций алгебры логики. Применение алгебры логики к анализу и синтезу контактных схем. (2 часа).

*Лекция 3.* Основные понятия теории графов. Алгоритмы на графах. Задача о кратчайшем пути. (2 часа).

*Лекция 4.* Понятие дискретного автомата. Дискретные автоматы без памяти (комбинационные схемы). Дискретные автоматы с памятью (последовательные схемы). Принцип работы сумматора. (2 часа)

## 1.3. Тематический план практических занятий

1. Минимизация логических выражений. Применение алгебры логики к синтезу контактных схем. (2 часа)

2. Решение задачи о дереве кратчайших путей методом Дейкстры. (2 часа)

### 2. Библиографический список

#### Основной:

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

2. Потапенко А.А. Элементы алгебры логики: Учеб. Пособие.- Л.: СЗПИ, 1977.-38с.

#### Дополнительный:

3. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. –М.: Высш. Шк., 1998.-310 с.

4. Оре О. Графы и их применение. –М.: Мир, 1085.-174 с.

### 3. Задание на контрольную работу

В контрольной работе студенту предлагается выполнить четыре задачи, номера которых следует выбрать в соответствии с последней и предпоследней цифрами шифра, а так же первой буквой фамилии, из табл.1, приведенной ниже.

Таблица 1

Посл. Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
№.задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Предпол. цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
№ залач	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Первая буква фамилии	А И Т	Б О Ц	В М У	Г Ф Ч	Д З Х	Е Н Л	Ж С Р	К Э	П Щ	Ш Ю Я
№ задач	30 31	29 32	28 33	27 34	26 35	25 36	24 37	23 38	22 39	21 40

В заданиях 1-10 дана булева функция  $F(x,y,z,t)$ . Найти её отрицание  $\bar{F}$ . Вычислив обе функции, показать, что найденный результат правильный.

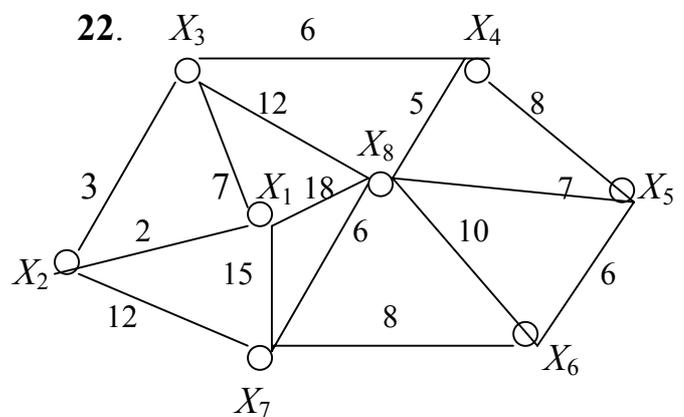
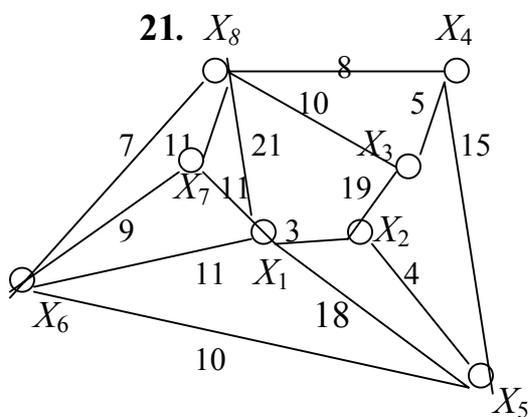
1.  $F(x, y, z, t) = \bar{x} \cup yz \cup t.$
2.  $F(x, y, z, t) = x \cup \bar{y} \cup zt.$
3.  $F(x, y, z, t) = xy\bar{z} \cup t.$
4.  $F(x, y, z, t) = x\bar{y}z \cup \bar{t}.$
5.  $F(x, y, z, t) = \bar{x} \cup y \cup \bar{z}t.$
6.  $F(x, y, z, t) = \bar{x}z \cup \bar{y}t.$
7.  $F(x, y, z, t) = x\bar{z} \cup y\bar{t}.$
8.  $F(x, y, z, t) = x\bar{t} \cup y\bar{z}.$
9.  $F(x, y, z, t) = xt \cup \bar{y} \cup \bar{z}.$
10.  $F(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{z} \cup y \cup t.$

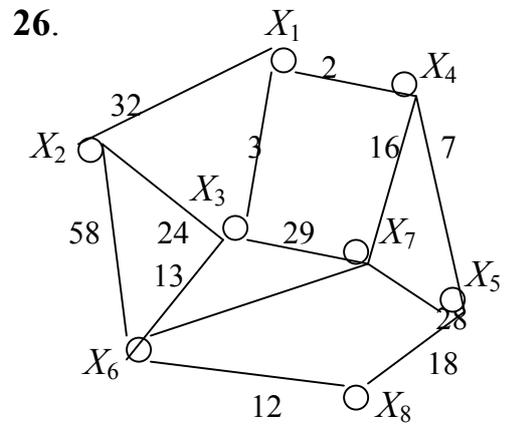
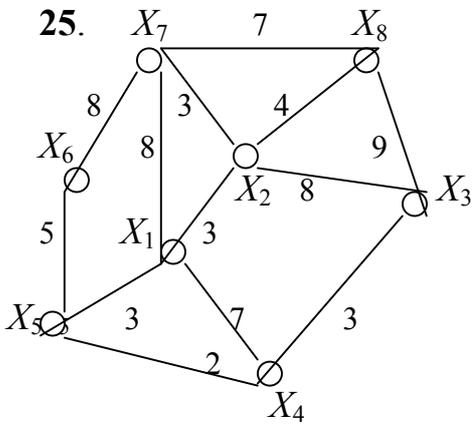
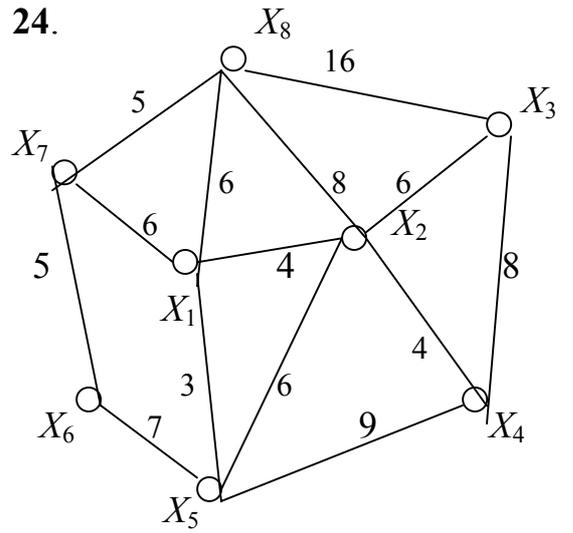
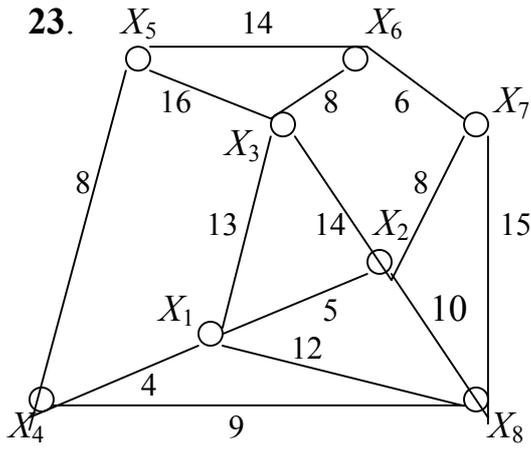
В заданиях 11-20 по таблице значений функции построить её СДНФ. Найти минимальные ДНФ. Построить контактные схемы для найденных форм функции. Показать, что найденная форма функции эквивалентна заданной, вычислив её значения. Значения заданной функции взять из табл.2.

Таблица 2

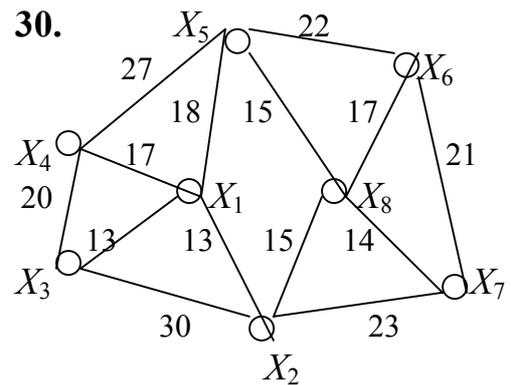
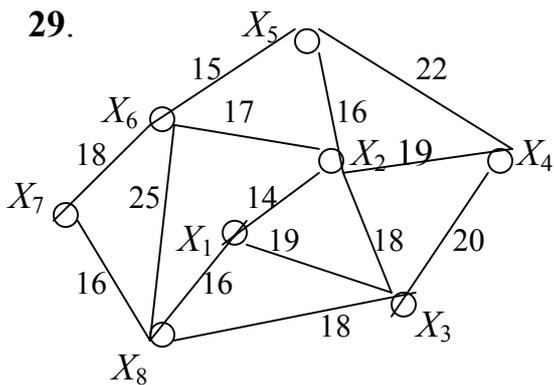
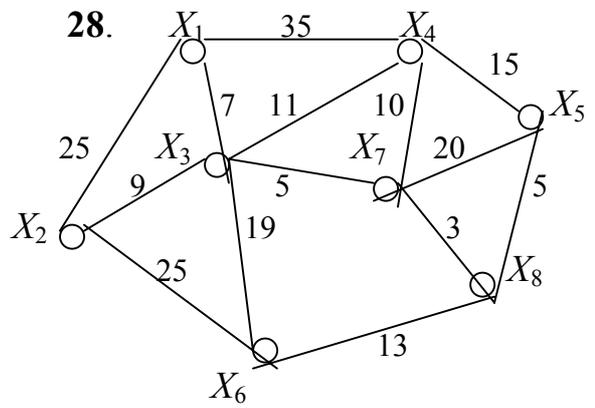
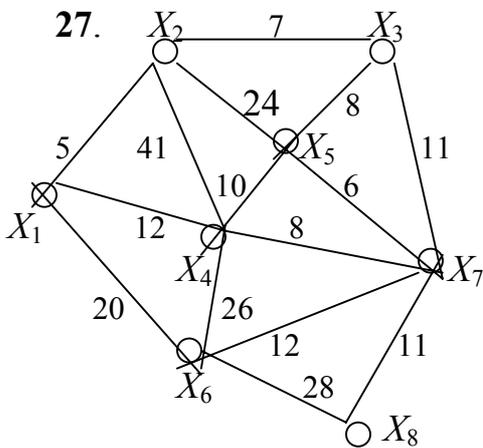
№ задачи			11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x$	$y$	$z$	Значения функции									
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0

В заданиях 21-30 для предложенного графа построить матрицы смежности и весов графа. Методом Дейкстры найти и построить остовное дерево минимальных путей.





19



В заданиях 31-40 дана табл.3, описывающая работу сумматора. На сумматор поданы две последовательности входных сигналов  $X_1$  и  $X_2$ . Найти выходной сигнал. Сделать проверку найденного результата, переведя слагаемые и сумму в десятичную систему счисления. Значения входных сигналов взять из табл.4.

Таблица 3

$X_{1i}$	$X_{2i}$	$Z_{i-1}$	$Z_i$	$Y_i$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Таблица 4

Номер задания	$X_1$	$X_2$
31	0,0,1,1	1,1,1,1
32	1,1,0,1	1,0,1,1
33	1,0,1,1	1,1,1,1
34	0,1,1,1	1,1,0,1
35	1,1,1,1	0,1,1,1
36	0,0,0,0,1	1,0,1,1
37	1,1,1,1	1,1,1,1
38	1,0,1,1	0,1,1,1
39	0,0,0,0,1	0,1,1,1
40	1,1,0,1	0,0,0,0,1

#### 4. Методические указания к выполнению контрольной работы

Прежде чем выполнять то или иное задание контрольной работы, необходимо проработать теорию раздела, разобрать данные в комплексе примеры и только потом приступать к решению заданий контрольной работы.

##### 4.1. Элементы алгебры логики

Перед выполнением первого задания следует внимательно прочитать [2] стр.3-16 и разобрать пример 1 настоящего пособия. Чтобы выполнить второе задание в [2], нужно обратиться к стр. 17-35 и примерам 2, 3.

**Пример 1.** Найти инверсию логической (булевой) функция  $f(x, y, z, t) = \bar{x} \cup y \cup z\bar{t}$ .

Инверсия функции  $f$  (отрицание  $f$ ) находится по правилу Моргана.

Чтобы найти  $\bar{f}$ , достаточно все аргументы функции заменить их отрицаниями, знаки дизъюнкции заменить знаками конъюнкции, знаки конъюнкции заменить знаками дизъюнкции, при этом следует сохранить порядок действий, предусмотренный в заданной функции. Для последней операции используются скобки. Изменим знаки функций на знаки их кофункций и получим выражение  $x\bar{y}\bar{z} \cup t$  (заметим, что  $\bar{\bar{x}} = x$ ). В заданной функции первой должна была быть вычислена конъюнкция  $z\bar{t}$ , поэтому в инверсии первой следует вычислять дизъюнкцию  $\bar{z} \cup t$ , следовательно, нужно поставить эту дизъюнкцию в скобки. Окончательно получаем  $\bar{f}(x, y, z, t) = x\bar{y}(\bar{z} \cup t)$ .

Для проверки правильности полученного результата следует вычислить обе функции, заданную -  $f$  и найденную -  $\bar{f}$ . Если значения функций для всех наборов аргументов будут противоположны, инверсия  $f$  найдена правильно. Все вычисления сведем в одну таблицу 5.

Таблица 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Наборы аргументов				Вычисление $f$				Вычисление $\bar{f}$				
$x$	$y$	$z$	$t$	$\bar{t}$	$z\bar{t}$	$\bar{x}$	$f$	$\bar{z}$	$\bar{z} \cup t$	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	$\bar{f}$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

В четыре первых столбца заносим 16 наборов переменных  $x, y, z, t$ . В 5–7 столбцах вычисляются значения исходной функции  $f(x, y, z, t) = \bar{x} \cup y \cup z\bar{t}$ . В столбце 5 вычисляется отрицание аргумента

$t$ , хранящегося в столбце 4. Для вычисления  $z\bar{t}$  находим конъюнкцию значений столбца 3 на соответственные значения столбца 5 и результат запишем в столбец 6. При вычислении следует помнить, что конъюнкция равна 1 в том и только в том случае, если все сомножители равны 1. В столбце 7 запишем инверсию (отрицание  $x$ ). Для заполнения столбца 8 осталось найти дизъюнкцию значений, записанных в столбцах 2,6 и 7. (Дизъюнкция имеет значение 1, если хотя бы одно слагаемое имеет значение 1.) Полученный результат - значения исходной функции; в таблице они выделены жирным шрифтом.

Столбцы 9-13 отведены для вычисления отрицания заданной функции  $\bar{f}(x, y, z, t) = x\bar{y}(\bar{z} \cup t)$ . Чтобы вычислить значения в скобках следует сначала вычислить отрицание  $z$  (результат в столбце 9), а затем найти его дизъюнкцию со столбцом 4. В столбцах 11 и 12 записываются соответственно отрицание  $y$  и его конъюнкция с  $x$ . Найдя конъюнкцию содержимого 10 и 12 столбцов, получим значения искомой функции. Результат жирным шрифтом записан в столбце 13.

Сравнивая значения функций, записанных в столбцах 8 и 13, убеждаемся, что для всех наборов они противоположны, то есть инверсия заданной функции найдена правильно.

**Пример 2.** Логическая функция  $f(x,y,z,t)$  задана табл.6. По предложенной таблице найти её совершенную дизъюнктивную форму (СДНФ). Найти минимальные ДНФ. Показать, что полученные формы эквивалентны заданной. Построить контактные схемы найденных форм функции.

Таблица 6

№ набора	$x$	$y$	$z$	$t$	$F(x,y,z,t)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	1	0	0	1
6	0	1	0	1	0
7	0	1	1	0	1
8	0	1	1	1	0
9	1	0	0	0	1
10	1	0	0	1	1
11	1	0	1	0	0
12	1	0	1	1	0
13	1	1	0	0	1
14	1	1	0	1	1
15	1	1	1	0	1
16	1	1	1	1	0

Для удобства работы в таблице добавлен столбец номеров наборов.

Для нахождения СДНФ следует воспользоваться алгоритмом, приведенном в [1] на стр.18:

1. Выбираются все наборы аргументов функции, для которых значение функции равно 1. В рассматриваемом случае это наборы под номерами 5, 7, 9, 10, 13, 14, 15.

2. Для каждого выбранного набора составляются конъюнкции, равные 1. Поскольку конъюнкция равна 1 в том и только в том случае, если каждый её член равен 1, значению 1 аргумента в рассматриваемом наборе будет соответствовать сам аргумент, а значению 0 – его отрицание. В соответствии с этим правилом получим:

для пятого набора -  $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$

для седьмого набора -  $\bar{x}yz\bar{t}$  ;

для девятого набора -  $x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$  ;

для десятого набора -  $x\bar{y}\bar{z}t$  ;

для тринадцатого набора -  $xy\bar{z}\bar{t}$  ;

для четырнадцатого набора -  $xy\bar{z}t$  ;

для пятнадцатого набора -  $xyzt$  .

3. Искомая СДНФ получается соединением найденных конъюнкций знаками дизъюнкции. Таким образом

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}yz\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z}t \cup xy\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}t \cup xyzt \quad (1)$$

Приступим к минимизации полученной функции. Воспользуемся методом Квайна, предназначенного для нахождения сокращенных ДНФ.

На первом шаге проведем все операции неполного склеивания, то есть воспользуемся соотношением

$$x\alpha \cup \bar{x}\alpha = \alpha \cup x\alpha \cup \bar{x}\alpha, \text{ где}$$

$\alpha$  - любая элементарная конъюнкция; склеивание производится по переменной  $x$ . Практически неполному склеиванию по некоторому аргументу подлежат конъюнкции, отличающиеся одним элементом, входящим в одну из склеиваемых конъюнкций как инверсия. В рассматриваемой функции можно произвести семь неполных склеиваний:

1. склеивая  $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$  с  $\bar{x}yz\bar{t}$  по  $z$ , получим  $\bar{x}y\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}yz\bar{t}$  ;

2. склеивая  $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}\bar{t}$  по  $x$ , получим  $y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}\bar{t}$  ;

3. склеивая  $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}\bar{t}$  по  $x$ , получим  $y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}\bar{t}$  ;

4. склеивая  $x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$  с  $x\bar{y}\bar{z}t$  по  $t$ , получим  $x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z}t$  ;

5. склеивая  $x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}\bar{t}$  по  $y$ , получим  $x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}\bar{t}$  ;

6. склеивая  $x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}\bar{t}$  по  $y$ , получим  $x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}\bar{t}$  ;

7. склеивая  $xy\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}t$  по  $t$ , получим  $xy\bar{z} \cup xy\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}t$  ;

8. склеивая  $xy\bar{z}\bar{t}$  с  $xy\bar{z}t$  по  $z$ , получим  $xy\bar{t} \cup xy\bar{z}\bar{t} \cup xy\bar{z}t$  .

Построим новую форму, эквивалентную найденной СДНФ, для чего сначала выпишем конъюнкции меньшего ранга, образовавшиеся в

результате операции неполного склеивания; к ним присоединим СДНФ. Такую запись можно сделать, если учесть, что  $\alpha \cup \alpha = \alpha$  ( $\alpha$  - любая элементарная конъюнкция).

$$f = \bar{x}y\bar{t} \cup y\bar{z}\bar{t} \cup yz\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{z}t \cup xy\bar{z} \cup xy\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}yz\bar{t} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{z}t \cup \bar{x}yzt.$$

На втором шаге следует произвести все возможные поглощения. Операция поглощения определяется соотношением  $\alpha \cup \alpha\beta = \alpha$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  - любые элементарные конъюнкции. Согласно ему

$\bar{x}y\bar{t}$  поглощает  $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$  и  $\bar{x}yz\bar{t}$ ;

$y\bar{z}\bar{t}$  поглощает  $xy\bar{z}\bar{t}$ ;

$yz\bar{t}$  поглощает  $xyz\bar{t}$ ;

$x\bar{y}\bar{z}$  поглощает  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ ;

$x\bar{z}\bar{t}$  поглощает  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ ;

$xy\bar{z}$  поглощает  $xy\bar{z}\bar{t}$ .

Таким образом, получаем новую форму заданной функции, каждая конъюнкция которой на ранг меньше, чем в функции (1).

$$f = \bar{x}y\bar{t} \cup y\bar{z}\bar{t} \cup yz\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{z}t \cup xy\bar{z} \cup xy\bar{t}. \quad (2)$$

Полученная форма СДНФ, поэтому можно продолжить понижение ранга конъюнкций, для чего снова проведем все операции неполного склеивания.

1.  $\bar{x}y\bar{t}$  склеивается с  $xy\bar{t}$  по  $x$ ; получаем  $y\bar{t} \cup \bar{x}y\bar{t} \cup xy\bar{t}$ ;

2.  $y\bar{z}\bar{t}$  склеивается с  $yz\bar{t}$  по  $z$ ; получаем  $y\bar{t} \cup y\bar{z}\bar{t} \cup yz\bar{t}$ ;

3.  $x\bar{y}\bar{z}$  склеивается с  $xy\bar{z}$  по  $y$ ; получаем  $x\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup xy\bar{z}$ ;

4.  $x\bar{z}\bar{t}$  склеивается с  $x\bar{z}t$  по  $t$ ; получаем  $x\bar{z} \cup x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{z}t$ .

Запишем новый вид функции:

$$f = y\bar{t} \cup y\bar{t} \cup x\bar{z} \cup x\bar{z} \cap \bar{x}y\bar{t} \cup y\bar{z}\bar{t} \cup yz\bar{t} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{z}\bar{t} \cup x\bar{z}t \cup xy\bar{z} \cup xy\bar{t}.$$

Учитывая, что  $y\bar{t} \cup y\bar{t} = y\bar{t}$ ;  $x\bar{z} \cup x\bar{z} = x\bar{z}$  и  $y\bar{t}$  поглощает  $\bar{x}y\bar{t}$ ,  $y\bar{z}\bar{t}$ ,  $yz\bar{t}$  и  $xy\bar{t}$ , а  $x\bar{z}$  поглощает  $x\bar{y}\bar{z}$ ,  $x\bar{z}\bar{t}$ ,  $x\bar{z}t$  и  $xy\bar{z}$ , получим

$$f = y\bar{t} \cup x\bar{z}. \quad (3)$$

Поскольку в полученной сокращенной форме дальнейшие склеивания и поглощения невозможны, она является тупиковой. Полученная тупиковая форма единственная, следовательно, она и будет минимальной. Убедимся, что полученная форма эквивалентна исходной. Построим табл.7 значений формы (3). Эти значения совпадают с заданными значениями табл.6. Следовательно, функции (1) и (3) эквивалентны, то есть найденная форма действительно является минимальной формой исходной функции.

Таблица 7

№ набора	$x$	$y$	$z$	$t$	$\bar{t}$	$y\bar{t}$	$\bar{z}$	$x\bar{z}$	$f(x,y,z,t)$	$F(x,y,z,t)$
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
6	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
7	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
8	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
11	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
12	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
14	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
15	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
16	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Построим контактные схемы, соответствующие исходной и полученной функциям. Имеем в виду, что конъюнкции соответствует последовательное соединение элементов, а дизъюнкции – параллельное.

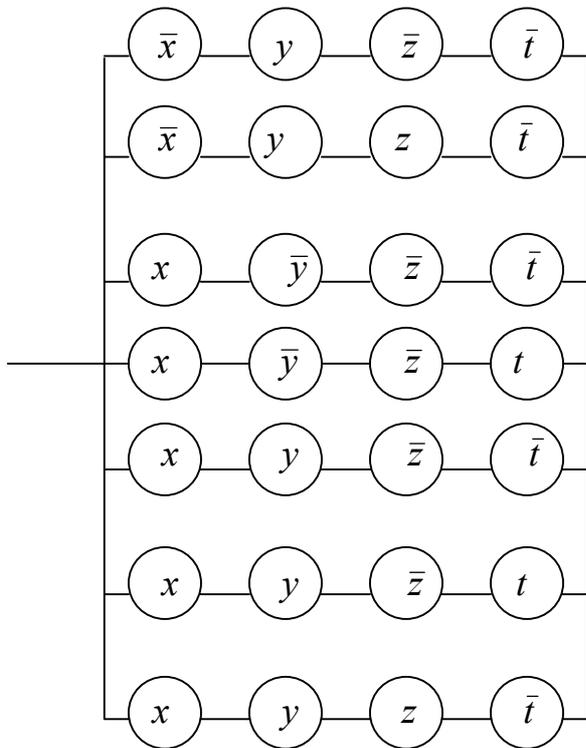


Рис.1

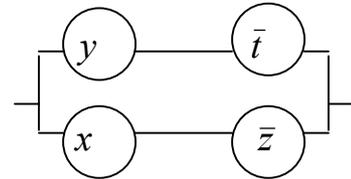


Рис.2

На рис.1 представлена схема исходной функции (1), а на рис.2 - схема минимизированной функции (3).

Из этих рисунков наглядно видно, насколько упростилась первоначальная схема.

**Пример 3.** Найти минимальную нормальную дизъюнктивную форму логической функции

$$f(x, y, z) = xy \cup x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}z. \quad (4)$$

Показать, что заданная и найденная формы эквивалентны. Для каждой формы построить контактные схемы.

Для минимизации заданной функции применим метод Квайна. Учитывая, что этот метод применим только к СДНФ, преобразуем данную функцию, которая не является СДНФ, так как входящие в неё конъюнкции имеют разные ранги. Для приведения их к одинаковому рангу (третьему) воспользуемся тем, что логическое умножение на 1 не меняет значения конъюнкции. Умножим первый член  $f$  на  $z \cup \bar{z} = 1$ , а последний на  $y \cup \bar{y} = 1$ .

$$\text{Получим } f(x, y, z) = xy(z \cup \bar{z}) \cup x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}z(y \cup \bar{y}).$$

После раскрытия скобок функция примет вид

$$f(x, y, z) = xyz \cup xy\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup \bar{x}\bar{y}z. \quad (5)$$

В СДНФ (5) произведем все операции неполного склеивания.

Первый член склеим со вторым по  $z$ , получим  $xy \cup xy\bar{z} \cup xy\bar{z}$ ,

первый - с четвертым по  $x \Rightarrow yz \cup xyz \cup \bar{x}yz$ ,

второй – с третьим по  $y \Rightarrow x\bar{z} \cup xy\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z}$ ,

четвертый – с пятым по  $y \Rightarrow \bar{x}z \cup \bar{x}yz \cup \bar{x}\bar{y}z$ .

Объединив все найденные выражения (выписав сначала конъюнкции второго ранга и присоединив к ним СДНФ), получим следующее выражение для рассматриваемой функции:

$$f(x, y, z) = xy \cup yz \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z \cup xyz \cup xy\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup \bar{x}\bar{y}z.$$

В полученном выражении произведем все операции поглощения.

$xy$  поглощает  $xyz$  и  $xy\bar{z}$ ,  $yz$  -  $\bar{x}yz$ ,  $x\bar{z}$  -  $x\bar{y}\bar{z}$ ,  $\bar{x}z$  -  $\bar{x}\bar{y}z$ .

$$f(x, y, z) = xy \cup yz \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z. \quad (6)$$

Функция (6) является сокращенной ДНФ, так как дальнейшие склеивания и поглощения невозможны.

Для получения тупиковых и минимальных форм воспользуемся методом Петрика. Итак, мы имеем СДНФ (5), имеющую пять конституент, и сокращенную ДНФ (6), состоящую из четырех импликат.

Далее по алгоритму метода Петрика выполняем операции:

1. Обозначим простые импликаты сокращенной ДНФ:

$$p_1 = xy, p_2 = yz, p_3 = x\bar{z}, p_4 = \bar{x}z.$$

2. Рассмотрим, какие импликаты поглощают каждую из конституент СДНФ, и составим из этих импликат дизъюнкции  $d_j$ .

$$xyz \text{ поглощается } p_1 \text{ и } p_2 \Rightarrow d_1 = p_1 \cup p_2;$$

$$xy\bar{z} \text{ поглощается } p_1 \text{ и } p_3 \Rightarrow d_2 = p_1 \cup p_3;$$

$$x\bar{y}\bar{z} \text{ поглощается только } p_3 \Rightarrow d_3 = p_3;$$

$$\bar{x}yz \text{ поглощается } p_2 \text{ и } p_4 \Rightarrow d_4 = p_2 \cup p_4;$$

$\overline{xyz}$  поглощается только  $p_4 \Rightarrow d_5 = p_4$ .

3. Составим конъюнкцию полученных дизъюнкций:

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 = (p_1 \cup p_2)(p_1 \cup p_3)p_3(p_2 \cup p_4)p_4.$$

Упрощаем полученное выражение, для чего сначала раскрываем скобки, а затем производим все возможные поглощения. Удобнее воспользоваться свойством коммутативности конъюнкции и сначала умножить вторую скобку на  $p_3$ , а потом третью – на  $p_4$ .

$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1 \cup p_2)(p_1 p_3 \cup p_3 p_3)(p_2 p_4 \cup p_4 p_4)$ . Учитывая свойство идемпотентности и поглощение  $p_3$  конъюнкции  $p_1 p_3$ ,

а  $p_4 - p_2 p_4$ , получим  $F(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1 \cup p_2)p_3 p_4$ . Окончательно форма принимает вид

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 p_3 p_4 \cup p_2 p_3 p_4.$$

Дальнейшее упрощение невозможно.

4. Двум конъюнкциям соответствуют две тупиковые формы, для получения которых достаточно вместо  $p_i$  записать их значения, а знаки конъюнкции заменить на знаки дизъюнкции. В результате получаем тупиковые формы

$$f_1 = xy \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z \text{ и } f_2 = yz \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z.$$

Поскольку они одинакового ранга, обе являются минимальными.

Убедимся, что найденные формы эквивалентны заданной функции.

Вычисления оформим в табл. 8.

Таблица 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$x$	$y$	$z$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$xy$	$xy\bar{z}$	$\bar{x}z$	$f$	$x\bar{z}$	$f_1$	$yz$	$f_2$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1

В столбцах 1-3, как обычно, записываем наборы аргументов; в столбцах 4-9 выполняем промежуточные вычисления для заданной функции; взяв дизъюнкцию содержимого столбцов 7,8 и 9, получим  $f$ ; дизъюнкция конъюнкций, записанных в столбцах 7,9 и 11, дает первую минимальную ДНФ ( $f_1$  в столбце 12); дизъюнкция конъюнкций из столбцов 9,11 и 13 дает вторую минимальную ДНФ ( $f_2$  в столбце 14). Как видно, значения этих трех форм совпадают для всех наборов аргументов, т.е. они эквивалентны и, следовательно, являются различными формами одной и той же функции.

Построим контактные схемы для этих форм. На рис.3,а изображена схема, соответствующая данной функции  $f(x, y, z) = xy \cup x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}z$  (4); на рис.3,б и 3,в – схемы соответствующие найденным минимальным ДНФ  $f_1 = xy \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z$  и  $f_2 = yz \cup x\bar{z} \cup \bar{x}z$ .

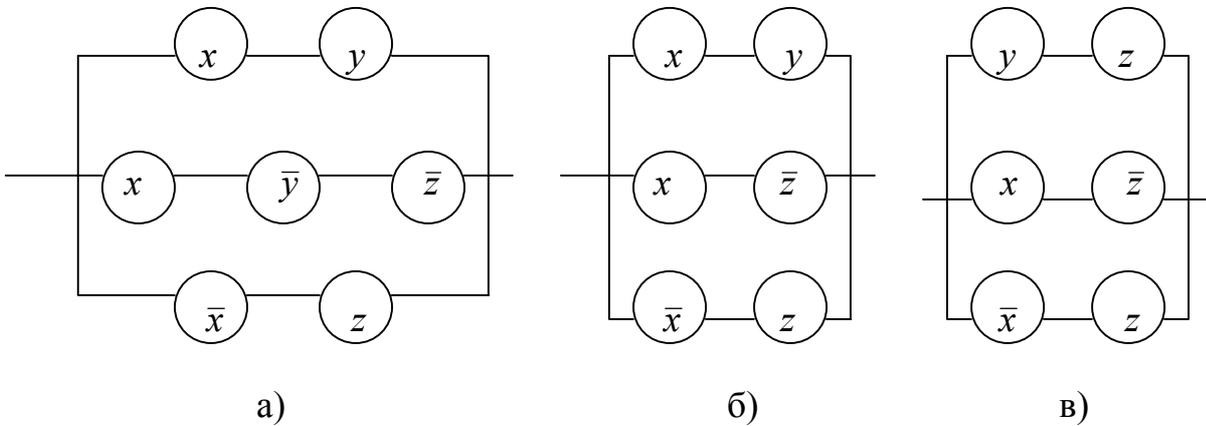


рис.3

#### 4.2. Элементы теории графов

Перед выполнением третьего задания следует обратиться к [1], стр. 82 - 120 и разобрать пример 4. Следует усвоить основные определения, связанные с видом графа, описание графа с помощью матриц, метод Дейкстры решения задачи о кратчайшем пути.

**Пример 4.** Для графа, представленного на рис. 4, построить матрицы смежности и весов; используя алгоритм Дейкстры, найти длины кратчайших путей от вершины 1 до остальных вершин; построить остовное дерево кратчайших путей.

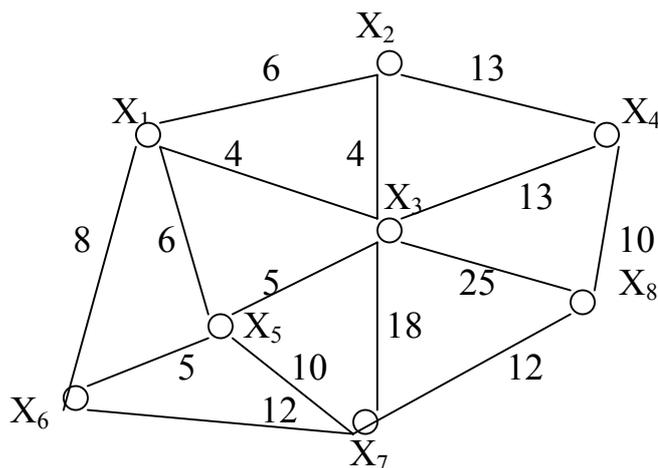


Рис.4

В задании предложен *взвешенный* граф, то есть граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некоторое число, называемое *весом*.

Для связного графа (графа, для каждой двух ребер которого существует хотя бы один путь, их соединяющий), имеющего восемь вершин, матрицей смежности будет квадратная матрица восьмого порядка,

то есть матрица, состоящая из восьми строк и восьми столбцов, каждый элемент которой  $a_{ij}$  равен 1, если существует ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , и 0, если такое ребро отсутствует. Для наглядности добавим строку и столбец с именами вершин.

Графу (рис.4) соответствует матрица смежности, приведенная в табл.9.

Таблица 9

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>
X <sub>1</sub>	0	1	1	0	1	1	0	0
X <sub>2</sub>	1	0	1	1	0	0	0	0
X <sub>3</sub>	1	1	0	1	1	0	1	1
X <sub>4</sub>	0	1	1	0	0	0	0	1
X <sub>5</sub>	1	0	1	0	0	0	1	0
X <sub>6</sub>	1	0	0	0	1	0	1	0
X <sub>7</sub>	0	0	1	0	1	1	0	1
X <sub>8</sub>	0	0	1	1	0	0	1	0

Заметим, что получившаяся матрица симметрична относительно главной диагонали, так как граф неориентированный. Эта матрица дает информацию только о наличии или отсутствии ребра между двумя вершинами.

Поскольку данный граф не только связный, но и взвешенный, можно построить матрицу весов графа, то есть квадратную матрицу восьмого порядка, каждый элемент которой равен весу, если существует ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , и равный  $\infty$ , если такое ребро отсутствует. Для рассматриваемого графа матрица смежности весов представлена в табл. 10.

Таблица 10

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>
X <sub>1</sub>	$\infty$	6	4	$\infty$	6	8	$\infty$	$\infty$
X <sub>2</sub>	6	$\infty$	4	13	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
X <sub>3</sub>	4	4	$\infty$	13	5	$\infty$	18	25
X <sub>4</sub>	$\infty$	13	13	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10
X <sub>5</sub>	6	$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	5	10	$\infty$
X <sub>6</sub>	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	$\infty$	12	$\infty$
X <sub>7</sub>	$\infty$	$\infty$	18	$\infty$	10	12	$\infty$	12
X <sub>8</sub>	$\infty$	$\infty$	25	10	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$

Обычно, для удобства использования матрицы весов, знак  $\infty$  опускают и табл.10 имеет вид табл.11.

Таблица 11

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>
X <sub>1</sub>		6	4		6	8		
X <sub>2</sub>	6		4	13				
X <sub>3</sub>	4	4		13	5		18	25
X <sub>4</sub>		13	13					10
X <sub>5</sub>	6		5			5	10	
X <sub>6</sub>	8				5		12	
X <sub>7</sub>			18		10	12		12
X <sub>8</sub>			25	10			12	

Метод Дейкстры нахождения кратчайшего пути от одной, зафиксированной вершины до остальных состоит в том, что вершинам графа присваиваются временные метки, а затем, по определенным правилам, временные метки заменяются постоянными. Они и будут кратчайшими расстояниями от одной вершины до остальных.

На первом шаге (нулевой итерации) одной из вершин, принятой за *первую*, являющуюся началом пути, присваивается постоянная метка  $L^*(x_1)=0$ , а всем остальным – временные метки  $\infty$ .

На всех последующих итерациях: пусть вершина  $X_i$  на предыдущей итерации получила постоянную метку. Из множества её последователей (вершин, имеющих с  $X_i$  общие ребра) выбираются имеющие временные метки. Для этих вершин вычисляются новые метки по формуле

$$L^h(X_j)=\min \{L^c(X_j),R_{ij}+L^*(x_i)\}, \quad (7)$$

где  $L^c(X_j)$  – старая временная метка вершины  $X_j$  ;

$L^h(X_i)$  – её новая временная метка;

$R_{ij}$  – вес ребра, соединяющего вершины  $X_i$  и  $X_j$ ;

$L^*(x_i)$  – постоянная метка вершины  $x_i$ .

После этого из **всех** временных меток выбирается наименьшая, и именно она станет следующей постоянной меткой. Поскольку в задаче требуется построить минимальное остовное дерево, процесс присваивания осуществляется до тех пор, пока не будут найдены постоянные метки для всех вершин.

Результаты вычислений представлены в табл.12 и на рис.11.

Поскольку при отыскании кратчайших путей методом Дейкстры удобно определять очередное звено пути на каждой итерации, после строки “итерации” добавим строку, в которой будем указывать вершину  $x_i$ , служившую для вычисления очередных временных меток. Постепенное заполнение табл.12 представлено в табл.12а – 12е.

*Нулевая итерация.*  $L^*(X_1)=0$ ;  $L(X_2)=L(X_3)=L(X_4)=L(X_5)=L(X_6)=L(X_7)=L(X_8)=\infty$ . Запишем эти данные в табл.12а.

*Первая итерация.* Запишем множество вершин, связанных с вершиной  $X_1$  ребрами, то есть множество последователей вершины  $X_1$ . Это

множество  $\Gamma(X_1) = \{X_2, X_3, X_5, X_6\}$ . Все они имеют временные метки. Поэтому для каждой из них найдем новые временные метки согласно формуле (7).

Находим временную метку для вершины  $X_2$ . Запишем формулу 7 для этой вершины.

$$L^h(X_2) = \min \{L^c(X_2); R_{12} + L^*(X_1)\}.$$

Из матрицы весов (табл.11) находим  $R_{12}=6$ . Так как  $L^c(X_2)=\infty$  и  $L^*(X_1)=0$ , то находим новую временную метку  $L^h(X_2) = \min(\infty, 6+0) = 6$ .

Аналогичными действиями находим временные метки для остальных вершин-последователей вершины  $X_1$ :

$$L^h(X_3) = \min \{L^c(X_3); R_{13} + L^*(X_1)\} = \min(\infty, 4+0) = 4; (R_{13}=4);$$

$$L^h(X_5) = \min \{L^c(X_5); R_{15} + L^*(X_1)\} = \min(\infty, 6+0) = 6; (R_{15}=6);$$

$$L^h(X_6) = \min \{L^c(X_6); R_{16} + L^*(X_1)\} = \min(\infty, 8+0) = 8; (R_{16}=8).$$

Заносим найденные новые метки в третий столбец (итерация 1) табл.12а (пока без знака \*, который появится позднее). Среди *всех* вершин, *имеющих временные метки* (их семь) находим вершину с наименьшей временной меткой и считаем эту метку постоянной.

$$\begin{aligned} \min L(X_j) &= \min \{L(X_2), L(X_3), L(X_4), L(X_5), L(X_6), L(X_7), L(X_8)\} = \\ &= \min \{6, 4, \infty, 6, 8, \infty, \infty\} = 4. \end{aligned}$$

Наименьшее значение 4 достигается на метке вершины  $X_3$ . Поэтому значение 4 на первой итерации помечаем знаком \*.

В третьей строке первой итерации укажем вершину, для последователей которой находились новые временные метки, то есть вершину  $X_1$ .

Таблица 12а

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$						
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	6						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$						
$X_5$	$\infty$	6						
$X_6$	$\infty$	8						
$X_7$	$\infty$	$\infty$						
$X_8$	$\infty$	$\infty$						

Приступим к построению дерева минимальных путей, которое будем строить последовательно, итерацией за итерацией. Процесс построения рис.11 представлен рисунками 5 – 10. Первая итерация дала постоянную метку вершине  $X_3$ , как последователю вершины  $X_1$ . В дереве кратчайших путей это соответствует появлению ребра, соединяющего вершины  $X_1$  и  $X_3$ . На рис.5 изображены все вершины графа, так как искомое дерево остовное, это значит, что его вершины должны совпадать

с вершинами исходного графа. Проведем первое найденное ребро, соединяющее вершины  $X_1$  и  $X_3$ .

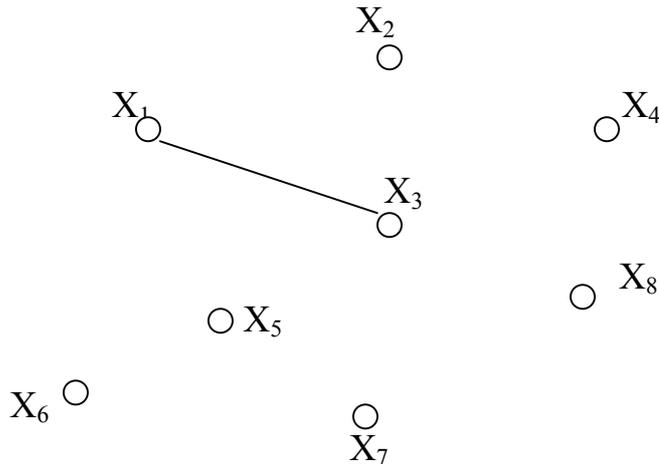


Рис.5

*Вторая итерация.* Определяем множество последователей вершины  $X_3$ :  $\Gamma(X_3) = \{X_1, X_2, X_4, X_5, X_7, X_8\}$ . Вершина  $X_1$  уже имеет постоянную метку, поэтому новые метки следует найти для вершин  $X_2, X_4, X_5, X_7, X_8$ .

$$\begin{aligned} L^H(X_2) &= \min \{L^c(X_2); R_{32} + L^*(X_3)\} = \min(6, 4+4) = \min(6, 8) = 6; \\ L^H(X_4) &= \min \{L^c(X_4); R_{34} + L^*(X_3)\} = \min(\infty, 13+4) = \min(\infty, 17) = 17; \\ L^H(X_5) &= \min \{L^c(X_5); R_{35} + L^*(X_3)\} = \min(6, 5+4) = \min(6, 9) = 6; \\ L^H(X_7) &= \min \{L^c(X_7); R_{37} + L^*(X_3)\} = \min(\infty, 18+4) = \min(\infty, 22) = 22; \\ L^H(X_8) &= \min \{L^c(X_8); R_{38} + L^*(X_3)\} = \min(\infty, 25+4) = \min(\infty, 29) = 29. \end{aligned}$$

Замечаем, что для вершин  $X_2$  и  $X_5$  метки остались прежними, поэтому не заносим их в столбец второй итерации табл. 12б, остальные обновленные заносим в соответствующие клетки столбца. Среди *всех вершин*, имеющих временные метки, ищем вершину с наименьшим значением:

$$\begin{aligned} \min L(X_j) &= \min \{6, 17, 6, 8, 22, 29\} = 6, \\ j &= 2, 4, 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

Минимальную метку имеют две вершины  $X_2$  и  $X_5$ . Присвоим постоянную метку вершине  $X_2$ :  $L^*(X_2) = 6$ .

Таблица 12б

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$					
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	17					
$X_5$	$\infty$	6						
$X_6$	$\infty$	8						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22					
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					

Занесем в столбец и вершину, для последователей которой переопределялись метки ( $X_3$ ). В результате выполнения второй итерации получено второе ребро из дерева минимальных путей. Поскольку постоянную метку получила вершина  $X_2$  и найдена эта метка была на первой итерации как последователь вершины  $X_1$ , очередное ребро соединяет именно эти вершины. Получающийся подграф изображен на рис. 6.

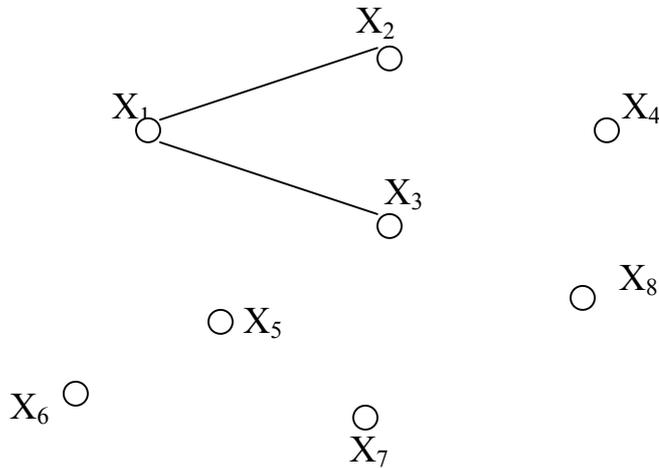


Рис. 6

*Третья итерация.* Множество последователей вершины  $X_2$ :  $\Gamma(X_2) = \{X_1, X_3, X_4\}$ . Среди этих вершин только  $X_4$  имеет временную метку. Переопределяем её:  $L^h(X_4) = \min\{L^c(X_4); R_{24} + L^*(X_2)\} = \min(17, 13+6) = \min(17, 19) = 17$ .

Заполняем столбец третьей итерации в табл. 12в (поскольку единственная найденная новая метка совпадает со старой, в столбце указываем только вершину, для последователей которой переопределялись метки) и выбираем новую постоянную метку  $\min L(X_j) = \min\{17, 6, 8, 22, 29\} = 6$ .

$j = 4, 5, 6, 7, 8$ .

Вершина  $X_5$  получает постоянную метку.  $L^*(X_5) = 6$ . В дерево кратчайших путей добавляется ребро, соединяющее вершины  $X_1$  и  $X_5$  (см. рис.7).

Таблица 12в

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$	$X_2$				
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	17					
$X_5$	$\infty$	$6^*$						
$X_6$	$\infty$	8						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22					
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					

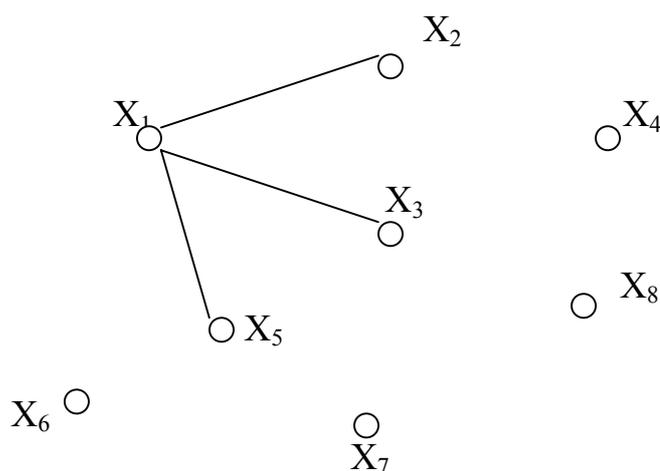


Рис.7

Четвертая итерация.  $\Gamma(X_5) = \{X_1, X_3, X_6, X_7\}$ . Находим новые метки вершин  $X_6$  и  $X_7$  ( $X_1$  и  $X_3$  уже имеют постоянные).

$$L(X_6) = \min\{L^c(X_6); R_{56} + L^*(X_5)\} = \min(8, 5+6) = \min(8, 11) = 8;$$

$$L(X_7) = \min\{L^c(X_7); R_{57} + L^*(X_5)\} = \min(\infty, 10+6) = \min(22, 16) = 16.$$

Заполняем итерацию 4 в табл.12г: метка для  $X_6$  не изменилась, поэтому заносим только метку для  $X_7$  и исходную вершину  $X_5$ . Выбираем постоянную метку.

$$\min L(X_j) = \min\{17, 8, 16, 29\} = 8. \text{ Следовательно, } L^*(X_6) = 8.$$

$$j = 4, 6, 7, 8.$$

В дерево добавляется ребро, соединяющее вершины  $X_1$  и  $X_6$  (рис.8).

Таблица 12г

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$	$X_2$	$X_5$			
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	17					
$X_5$	$\infty$	$6^*$						
$X_6$	$\infty$	$8^*$						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22		16			
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					

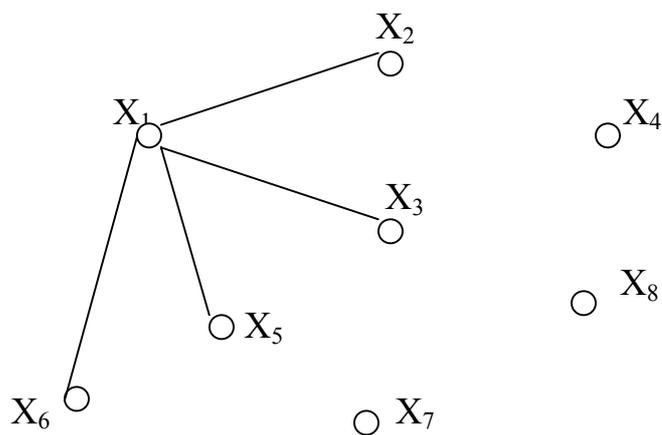


Рис. 8

*Пятая итерация.* Множество последователей вершины  $X_6$ :  $\Gamma(X_6) = \{X_1, X_5, X_7\}$ . Среди этих вершин только  $X_7$  имеет временную метку. Переопределяем её:  $L(X_7) = \min\{L^c(X_7); R_{67} + L^*(X_6)\} = \min(16, 12+8) = \min(16, 20) = 16$ . Метка не изменилась, поэтому в столбец пятой итерации табл. 12д заносим только имя вершины  $X_6$ .

Выбираем новую постоянную метку  $\min L(X_j) = \min\{17, 16, 29\} = 16$ .  $j=4, 7, 8$ .

Вершина  $X_7$  получает постоянную метку.  $L^*(X_7) = 16$ , а дерево ребро, соединяющее  $X_5$  и  $X_7$ . (см. рис.9).

Таблица 12д

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$	$X_2$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	17					
$X_5$	$\infty$	$6^*$						
$X_6$	$\infty$	$8^*$						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22		$16^*$			
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					

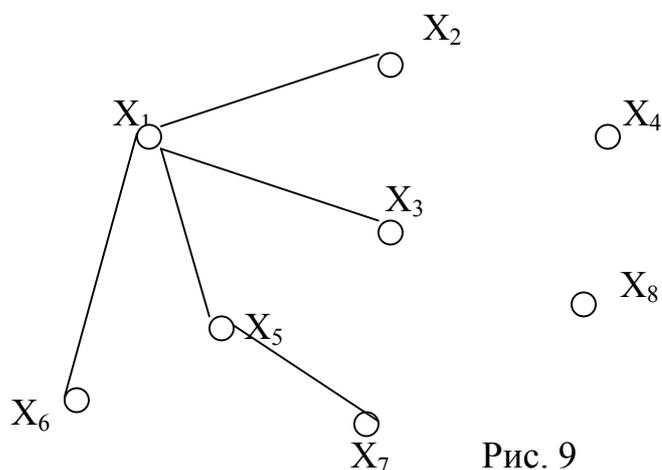


Рис. 9

*Шестая итерация.*  $\Gamma(X_7) = \{X_3, X_5, X_6, X_8\}$ . Находим новые метки вершины  $X_8$  (стальные уже имеют постоянные).

$$L(X_8) = \min \{L^c(X_8); R_{78} + L^*(X_7)\} = \min(29, 12+16) = \min(29, 28) = 28.$$

Заполняем столбец итерации 6 таблицы 12е. Выбираем постоянную метку.

$$\min L(X_j) = \min \{17, 28\} = 17. \text{ Следовательно, } L^*(X_4) = 17.$$

$$j=4,8.$$

Таблица 12е

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$	$X_2$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	$17^*$					
$X_5$	$\infty$	$6^*$						
$X_6$	$\infty$	$8^*$						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22		$16^*$			
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					

Эту метку вершина получила как последователь вершины  $X_3$  на второй итерации, поэтому следующее ребро соединяет вершины  $X_3$  и  $X_4$ . В результате получился подграф, изображенный на рис.10.

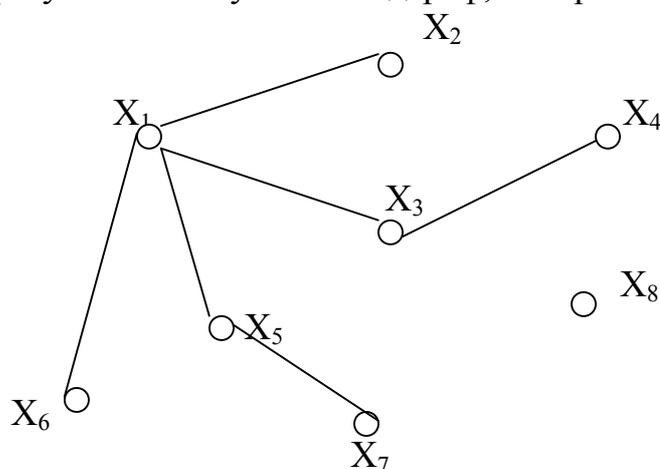


Рис.10

*Седьмая итерация.*  $\Gamma(X_4) = \{X_2, X_3, X_8\}$ . Находим новую метку вершины  $X_8$  (остальные вершины уже имеют постоянные метки).

$$L(X_8) = \min \{L^c(X_8); R_{48} + L^*(X_4)\} = \min(28, 10+17) = \min(28, 27) = 27.$$

Следовательно,  $L^*(X_8) = 27$ . Заносим результат в табл.12, которая и будет окончательной таблицей решения задачи.

Вычисления постоянных меток закончено. Последняя полученная метка позволяет построить последнее ребро подграфа, соединяющее вершины  $X_4$  и  $X_8$ , исходного графа, который, как это видно из рис.11, действительно остовное дерево кратчайших путей от вершины  $X_1$  до остальных. Для наглядности разумно на рис.11 указать веса  $R_{ij}$  (расстояния между смежными вершинами).

Убедимся, что найденные длины кратчайших путей действительно равны постоянным меткам соответствующих вершин:

- путь до  $X_2$  равен  $R_{12}=6$ , ( $L^*(X_2) = 6$ );
- путь до  $X_3$  равен  $R_{13}=4$ , ( $L^*(X_3) = 4$ );
- путь до  $X_4$  равен  $R_{13}+R_{34}=4+13=17$ , ( $L^*(X_4) = 6$ );
- путь до  $X_5$  равен  $R_{15}=6$ , ( $L^*(X_5) = 6$ );
- путь до  $X_6$  равен  $R_{16}=6$  ( $L^*(X_6) = 6$ );
- путь до  $X_7$  равен  $R_{15}+R_{57}=6+10=16$ , ( $L^*(X_7) = 16$ );
- путь до  $X_8 = R_{13}+ R_{34}+ R_{48}=4+13+10 = 27$ , ( $L^*(X_8) = 16$ ).

Таблица 12

Вершины	И т е р а ц и и							
	0	1	2	3	4	5	6	7
		$X_1$	$X_3$	$X_2$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_4$
$X_1$	$0^*$							
$X_2$	$\infty$	$6^*$						
$X_3$	$\infty$	$4^*$						
$X_4$	$\infty$	$\infty$	17	17	17	17	$17^*$	
$X_5$	$\infty$	$6^*$						
$X_6$	$\infty$	$8^*$						
$X_7$	$\infty$	$\infty$	22		16	$16^*$		
$X_8$	$\infty$	$\infty$	29					$28^*$

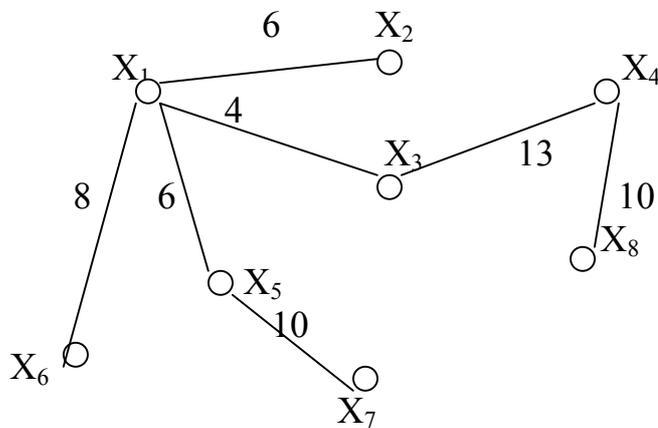


рис.11

*Замечание.* Естественно, при выполнении соответствующего задания нет необходимости заполнять таблицы 12а – 12е и рисовать рис.5 – 10. Достаточно последовательно заполнять табл.12 и одновременно рисовать рис. 11.

### 4.3. Элементы теории автоматов

Перед выполнением последней задачи следует обратиться к [1], стр. 247 - 281 и разобрать примеры 5 – 7.

**Пример 5.** Функционирование ДА задано следующими правилами:  $S_1 \rightarrow 11S_1$ ;  $S_1 \rightarrow 00S_2$ ;  $S_2 \rightarrow 00S_2$ ;  $S_2 \rightarrow 10S_3$ ;  $S_3 \rightarrow 10S_2$ ;  $S_3 \rightarrow 01S_1$ .

Автомат находится в начальном положении  $S_1$ ; на вход подана последовательность сигналов  $\{1\ 0\ 1\ 0\}$ . Найти последовательность сигналов на выходе.

В задании предлагается проанализировать работу дискретного автомата (ДА) без памяти или комбинационной схемы (КС), правила работы заданы соотношениями вида

$$S_k \rightarrow xy S_l, \quad (8)$$

Оно описывает переход ДА при воздействии входного сигнала  $x$  из состояния  $S_k$  в состояние  $S_l$ , причём вырабатывается выходной сигнал  $y$ .

Формула может читаться следующим образом: "При подаче сигнала  $x$  на автомат, находящийся в состоянии  $S_k$ , вырабатывается сигнал  $y$ , автомат переходит в состояние  $S_l$ ".

В рассматриваемом примере ДА может находиться в трех состояниях  $S_1, S_2, S_3$ ; сигналы на входе и выходе могут принимать два значения: 0 и 1. Следовательно, для определения работы автомата необходимо шесть соотношений вида (8).

Решение задачи удобно выполнять, имея граф, описывающий правила работы ДА, в котором вершины соответствуют состояниям автомата, а веса дуг - подаваемому и вырабатываемому сигналам.

Построим граф в соответствии с заданными правилами.

Первому соотношению будет соответствовать петля при вершине  $S_1$ , то есть дуга, начало которой совпадает с её концом, с весом (1,1), вторая дуга, идущая из вершины  $S_1$  в вершину  $S_2$ , с весом (0,0), соответствует второму правилу и определяет работу автомата при подаче на состояние  $S_1$  сигнала 0. Правилу  $S_2 \rightarrow 00S_2$  соответствует петля у вершины  $S_2$  с весом (0,0); правилу  $S_2 \rightarrow 10S_3$  - дуга, идущая из вершины  $S_2$  в вершину  $S_3$  с весом (1,0); правилу  $S_3 \rightarrow 10S_2$  - дуга, идущая из вершины  $S_3$  в вершину  $S_2$  с весом (1,0); правилу  $S_3 \rightarrow 01S_1$  - дуга, идущая из вершины  $S_3$  в вершину  $S_1$  с весом (0,1). Этот граф изображен на рис.12.

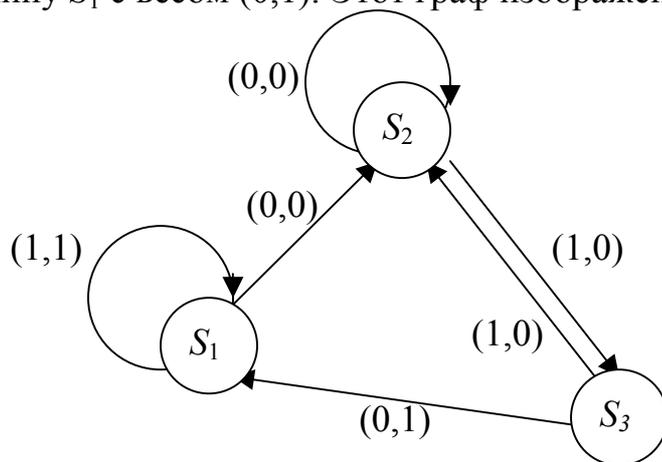


Рис.12

Первый сигнал "1" подается на автомат, находящийся в состоянии  $S_1$ , поэтому переход происходит по петле и вырабатывается первый выходной сигнал "1", причём автомат остается в состоянии  $S_1$ . Вторым сигналом "0"; происходит переход по дуге  $S_1 \rightarrow S_2$  в состояние  $S_2$  с выработкой

сигнала “0”. Следующий сигнал “1” переводит автомат в состояние  $S_3$ , и вырабатывается сигнал “0”. Наконец, из состояния  $S_3$  последний входной сигнал определяет переход в состояние  $S_1$  и появление сигнала “1”. Таким образом, при воздействии на данный ДА последовательности сигналов {1 0 0 1} получается выходная последовательность {1 0 0 1}.

**Пример 6.** Дискретный автомат, имеющий входной канал  $X$ , канал обратной связи  $Z$  и выходной канал  $Y$  реализует отображение  $XZ^+ \rightarrow ZY$ , которое задано в виде табл.13. Входная последовательность сигналов  $X=\{1,1,0,0,1,0,1\}$ , начальное значение  $Z^+=0$ . Найти выходную последовательность  $Y$ .

Таблица 13

$X$	$Z^+$	$Z$	$Y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Как видно из условия задачи, рассматривается дискретный автомат (ДА) с памятью, то есть последовательная схема (ПС). Выходной сигнал такого ДА зависит не только от входного сигнала, но и от выходных результатов в предыдущий момент времени. Эта операция реализуется с помощью блока памяти ПС (канала обратной связи). Принципиальная схема такого ДА приведена на рис. 13.

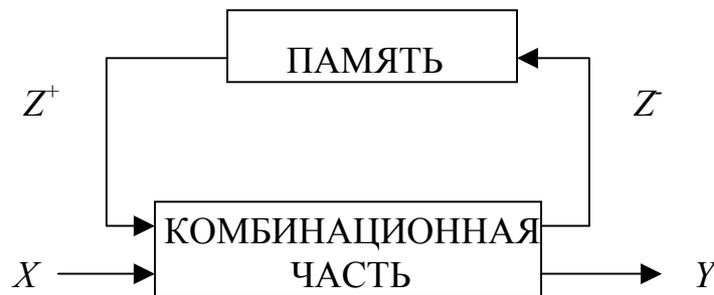


Рис.13

Пусть в некоторый момент  $t$  на входной канал ДА подан сигнал  $X$ , он поступает в комбинационную часть. Одновременно с ним туда поступает содержимое блока памяти – сигнал  $Z^+$ . Значение вектора  $Z^+$  в момент времени  $t$  равно значению  $Z$ . Связь между поступающими в комбинационную систему значениями сигналов и выходными значениями описывают соотношениями

$$XZ^+ \rightarrow ZY, \quad (9)$$

$$Z^+(t) = Z(t-\tau). \quad (10)$$

Величина  $Z^+$  в начальный момент времени считается известной, то есть принимается  $Z^+(t=0) = Z_0^+$ . Последовательность входных сигналов  $X$  и  $Z_0^+$  однозначно определяют последовательность выходных сигналов, если известно правило, которое обычно задается в виде таблицы, где

указаны все возможные комбинации значений подаваемого сигнала и содержимого памяти (см. столбцы первый и второй табл.13). В третьем столбце записано получающееся содержание памяти в момент подачи входного сигнала, а в последнем значении выходного сигнала в этот же момент.

Для решения поставленной задачи построим табл. 14: в первом столбце запишем время подачи очередного сигнала, во втором – соответствующие этому времени значения входных сигналов, в третьем столбце, в строке “0”, ставим значение  $Z_0^+=0$ .

После заполнения исходных данных приступаем к вычислению выходного сигнала. В момент  $\tau$   $XZ^+=10$ . По третьей строке табл. 13 находим значения  $Y=1, Z=0$ . Эти значения заносим в пятый и четвертый столбец первой строки. Переходим к вычислению выходного сигнала в момент  $\tau$ .  $Z^+(\tau) = Z(0) = 0$ , в комбинационный блок поступает 1,0; по табл.13 находим  $Z(\tau) = 0$  и  $Y(\tau) = 1$  (вторая строка табл.13). Далее значение  $Z(\tau) = 0$  переносим в клетку  $Z^+(2\tau)$  и рассматриваем результат введения сигналов 0,0. Из табл.13 определяем  $Z(2\tau) = 1$  и  $Y(2\tau) = 0$ . Далее

$$\begin{aligned} X(3\tau) = 0, Z^+(3\tau) = Z(2\tau) = 1, Z(3\tau) = 0 \text{ и } Y(3\tau) = 1; \\ X(4\tau) = 1, Z^+(4\tau) = Z(3\tau) = 0, Z(4\tau) = 0 \text{ и } Y(4\tau) = 1; \\ X(5\tau) = 0, Z^+(5\tau) = Z(4\tau) = 0, Z(5\tau) = 1 \text{ и } Y(5\tau) = 0; \\ X(6\tau) = 1, Z^+(6\tau) = Z(5\tau) = 1, Z(6\tau) = 1 \text{ и } Y(6\tau) = 1. \end{aligned}$$

Таблица 14

Время	X	Z <sup>+</sup>	Z	Y
0	1	0	0	1
$\tau$	1	0	0	1
$2\tau$	0	0	1	0
$3\tau$	0	1	0	1
$4\tau$	1	0	0	1
$5\tau$	0	0	1	0
$6\tau$	1	1	1	1

Полученные значения следует вносить в табл.14 по мере их вычисления. В результате получается выходной сигнал 1,1,0,1,1,0,1, к которому следует присоединить содержимое памяти, поскольку оно отлично от 0. Таким образом, последовательность входных сигналов 1100101 преобразуется данным ДА в последовательность 11011011. Этот факт обычно записывается в форме соотношения

$$1100101 \xrightarrow{Z_0^+=0} 11011011.$$

**Пример 7.** На входы автомата, преобразующего сигналы согласно табл.15, поданы две последовательности сигналов:  $X_1 = (1,0,0,0,1,1)$  и  $X_2 = (1,0,1,0,1,1)$ . Найти выходной сигнал. Выполнить проверку результата,

переведа исходные данные и результат в десятичную систему счисления. (Заметим, что предложенная таблица соответствует работе сумматора).

Таблица 15

$x_1$	$x_2$	$z_-$	$z_+$	$y$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

В табл.15 в первых двух столбцах записаны значения входных сигналов; в третьем - текущее содержание памяти; в пятом значение выходного сигнала; в четвертом значение, заносимое в память.

Данный ДА отличается от предыдущего тем, что на вход подается не один сигнал, а два. Таким образом, выходной сигнал – функция двух входных сигналов и содержимого блока памяти, то есть  $y(t) = f(x_1(t), x_2(t), z(t - \tau))$ .

Принципиальная схема сумматора приведена на рис.14.

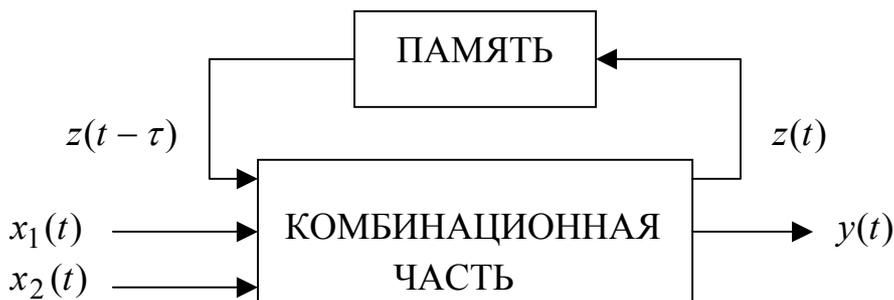


рис.14

Значения вырабатываемых сигналов  $y(t)$  и  $z(t)$  вычисляются по формулам

$$z(t) = x_1(t) \oplus x_2(t) \oplus z(t - \tau),$$

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \cup x_1(t) \cdot z(t - \tau) \cup x_2(t) \cdot z(t - \tau).$$

Напомним, что  $\oplus$  - знак логической операции “сложение по модулю два”, которая определяется табл.16.

Таблица 16

$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Перед началом решения задания следует иметь в виду, что обозначению “ $z_-$ ” в таблице задания соответствует в описании принципов работы сумматора “ $z(t - \tau)$ ”, а “ $z_+$ ” соответствует “ $z(t)$ ”.

Решение удобно представить в виде табл.17, в первом столбце которой укажем время поступления сигнала, а 2 – 6 столбцы будут соответствовать 1 – 5 столбцам табл.15.

Заполняем первый столбец таблицы значениями моментов времени, считая, что сигналы подаются на входы автомата с интервалом  $\tau$ ; второй и третий столбец заполняется последовательностями подаваемых сигналов. Поскольку к моменту подачи сигналов содержимое памяти по условиям задания равно нулю, в первую строку четвертого столбца заносим 0. Приступаем к вычислению первого выходного сигнала. Согласно первой строке табл.17 в комбинационную часть поступает последовательность сигналов 1,0,0, которой в табл.15 соответствует третья строка. Таким образом, выходной сигнал  $y(0)=0$ , а содержимое памяти становится  $z(0)=1$ . Для вычисления выходного сигнала в момент  $\tau$  необходимо определить значение  $z(t-\tau)$ . Оно равно содержимому памяти в предыдущий момент, то есть  $z(t-\tau)=z(0)=1$ . Занесем это значение в строку  $\tau$  в столбец  $z(t-\tau)$ . Подаваемая последовательность: 0,0,1, ей соответствует пятая строка табл.15. Таким образом,  $y(\tau)=1$ ,  $z(\tau)=0$ . Перенеся полученное значение  $z(\tau)=0$  в третью строку столбца  $z(t-\tau)$ , получаем последовательность 0, 1, 0, которой будет соответствовать  $y(2\tau)=1$ ,  $z(2\tau)=0$ . (Смотри вторую строку табл.15). Для момента  $3\tau$  последовательность, поступающая в комбинационную часть 0,0,0; в результате  $y(3\tau)=0$ ,  $z(3\tau)=0$  (первая строка табл.15). Последовательность в момент  $4\tau$ : 1,1,0: по четвертой строке табл.15 имеем  $y(4\tau)=1$ ,  $z(4\tau)=0$ . Наконец, в последний момент при последовательности сигналов 1,1,1 получаем  $y(5\tau)=1$ ,  $z(5\tau)=1$ .

Имея в виду, что содержимое памяти отлично от нуля, его следует присоединить к последовательности сигналов  $y(t)$  Итак, окончательно выходной сигнал  $Y=(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ .

Таблица 17

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$z(t-\tau)$	$z(t)$	$y(t)$
0	1	1	0	1	0
$\tau$	0	0	1	0	1
$2\tau$	0	1	0	0	1
$3\tau$	0	0	0	0	0
$4\tau$	1	1	0	1	0
$5\tau$	1	1	1	1	1

Проверим полученный результат, переведя заданные сигналы в десятичную систему счисления. Следует иметь в виду, что также, как и при вычислении без сумматора, операция сложения начинается с младших разрядов, то есть двоичное число подается на сумматор в обратном порядке. Следовательно, сигналу 100011 соответствует двоичное число 110001, сигналу 101011 соответствует двоичное число 110101, а полученному результату 0110011 - 1100110.

