Министерство образования Российской Федерации

Воронежский государственный университет

Булгакова И.Н., Федотенко Г.Ф.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Часть 1

Учебное пособие
для студентов по специальности
Прикладная математика и информатика (010200)
Прикладная информатика в юриспруденции (351400)
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (351500)

Воронеж
2004

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ ВГУ 16 декабря 2003 года, протокол № 3.

Булгакова И.Н., Федотенко Г.Ф. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения: Учеб. пособие. — Воронеж: Из-во ВГУ, 2004. — 62 с.

Рецензент: д. ф.-м. н., профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета ВГУ Сильченко Ю.Т.

Данная работа содержит краткое изложение курса лекций по дисциплине «Дискретная математика», читаемому на факультете ПММ. Пособие содержит примеры, демонстрирующие использование изложенной теории для решения конкретных задач. Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Для закрепления материала в конце параграфов приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть также использованы для проведения практических занятий.

Учебное пособие подготовлено на кафедре математических методов исследования операций факультета ПММ Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов 1 курса д/о и в/о, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика», а так же будет полезна всем, изучающим дискретную математику.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

1.1 Элементы теории множеств

Под множеством понимается совокупность некоторых объектов (элементов), объединенных некоторым признаком. Множества обычно обозначают большими буквами алфавита A, B, C, U, Z, W. Элементы, входящие в множество, обозначаются малыми буквами a, b, x, y, z, w. Запись $x \in C$ означает, что x является элементом множества C, а запись $x \notin C$ означает, что x не принадлежит множеству C. Два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Для описания множества пользуются двумя способами. Первый способ состоит в простом перечислении его элементов. Так, запись $A = \{0,1,5\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 0,1 и 5. Второй способ состоит в определении множества с помощью некоторого свойства Р, позволяющего определить, принадлежит ли данный элемент данному множеству или нет. В этом случае используется коллективизирующее обозначение

$$A = \{x : P(x)\},$$

которое читается следующим образом: множество A состоит из всех элементов x, для которых $P(x)$ истинно. Если свойство Р относится к элементам некоторого множества C, то будем писать также $A = \{x \in C : P(x)\}$. Например, множество $\{1,2,3,4,5\}$ можно задать следующим образом:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{x : x - \textit{целое число из интервала } [1,5]\}.$$

Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

Знаком $\subseteq$ обозначим отношение включения между множествами, т.е. $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A есть элемент множества B. Если $A \subseteq B$, то говорят, что множество A есть подмножество множества B.

Равенство двух множеств A и B означает выполнение двух включений: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть собственное подмножество B и пишут $A \subset B$.

Множество всех подмножеств множества A называется множеством-степенью и обозначается $R(A)$.

Заметим, что: а) $C \subseteq C$; б) если $C \subseteq U$, $U \subseteq Z$, то $C \subseteq Z$; в) если $C \subseteq U$, $U \subseteq C$, то $C = U$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Хотя $1 \in \{1\}$, $\{1\} \in \{\{1\}\}$, не верно, что $1 \in \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Пустое множество есть подмножество любого множества.

Число элементов в множестве C обозначается $|C|$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad или \quad x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами и множества A, и множества B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \ и \ x \in B\}.$$

Очевидно, что выполняются включения

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \quad и \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B .$$

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$ тех элементов из A, которые не принадлежат B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ и \ x \notin B\}.$$

Симметричной разностью множеств A и B называется множество

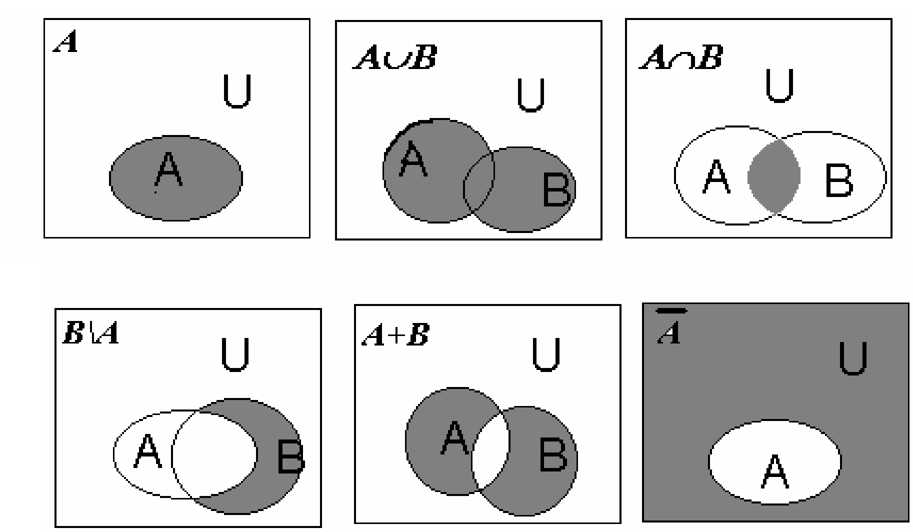
$$A + B = A \setminus B \cup B \setminus A .$$

Если все рассматриваемые в данный момент множества являются подмножествами некоторого множества $\boldsymbol{U}$, то множество $\boldsymbol{U}$ называют универсальным для данного рассмотрения.

Дополнением множества A называется множество

$$\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A .$$

Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсального множества используются диаграммы Эйлера-Венна.



Операции над множествами имеют следующие приоритеты в порядке убывания: операция взятия дополнения, операция пересечения, операция объединения.

Отметим следующие основные законы для операций над множествами:

$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
$A \cup (B \cup M) = (A \cup B) \cup M$ (ассоциативность объединения);
$A \cap (B \cap M) = (A \cap B) \cap M$ (ассоциативность пересечения);
$A \cup (B \cap M) = (A \cup B) \cap (A \cup M)$(1-й закон дистрибутивности);
$A \cap (B \cup M) = (A \cap B) \cup (A \cap M)$(2-й закон дистрибутивности);
$A \cup \varnothing = A$;
$A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$;
$A \cap \varnothing = \varnothing$;
$A \cap \boldsymbol{U} = A$;
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);
$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);
$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).

Рассмотрим методику решения задач по данной теме.

Пример 1. Равны ли следующие множества:
1) $\{2,4,5\}$ и $\{2,4,5,2\}$;
2) $\{1,2\}$ и $\{\{1,2\}\}$;
3) $\{1,2,3\}$ и $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
4) $\{\{1,2\},3\}$ и $\{\{1\},\{2,3\}\}$.

Решение. Для доказательства равенства произвольных множеств нужно проверить, что первое множество включено во второе, а второе, в свою очередь, включено в первое, т.е. любой элемент первого множества является элементом второго множества, а любой элемент второго множества является элементом первого множества.

Проверка дает положительный результат для множеств из пункта 1). Это можно наглядно показать на следующей схеме, где стрелочка, идущая от элемента, показывает, какой элемент в другом множестве ему соответствует.

Множества из пункта 2) неравны, так как, например, элемент 1из первого множества не имеет себе равного во втором множестве. Второе множество состоит из единственного элемента – множества $\{1,2\}$.

Множества, указанные в пункте 3), неравны, так как элементами первого множества являются числа $1,2,3$, а элементами второго множества являются множества, состоящие из одного элемента $\{1\},\{2\},\{3\}$.

Пункт 4) сделайте самостоятельно.

Пример 2. Следующие множества заданы перечислением своих элементов, задайте эти множества с помощью характерного для их элементов свойства.

1) $A=\{2,4,6,8,\ldots,32\}$;

2) $K=\left\{\begin{array}{l} Киев, Минск, Кишинев, Таллинн, Вильнюс, Рига, Москва, \\ Ереван, Тбилиси, Баку, Ташкент, Ашхабад, Душанбе, \\ Алма-Ата, Фрунзе \end{array}\right\}$

Решение. Множество A представляет собой множество четных натуральных чисел от 1 до 32, поэтому это множество можно записать в виде

$$A=\{x\in N\ :x=2n,\ n=1,\ldots,16\}.$$

Множество K представляет собой множество столиц республик бывшего СССР, т.е. это множество можно записать в виде

$$K=\{x:x-столица\ республики\quad СССР\}.$$

Пример 3. Приведите примеры таких множеств A,B,K, для которых

1) $A\in B,\quad B\in K,\quad A\notin K$;

2) $A\in B,\quad B\in K,\quad A\in K$;

3) $A\in B,\quad B\notin K,\quad A\subseteq K$;

4) $A\subseteq B,\quad B\in K,\quad A\notin K$.

Решение. В качестве примера множеств, удовлетворяющих условию из пункта 1, можно рассмотреть следующие множества

$$A=\{1,2\},\quad B=\{\{1,2\},1\},\quad K=\{3,\{\{1,2\},1\}\}\ .$$

Пункту 3) удовлетворяют множества

$$A=\{2,3\},\quad B=\{\{1\},\{2,3\}\},\quad K=\{2,3,4\}.$$

Пункты 2) и 4) рассмотрите самостоятельно.

Пример 4. Докажите следующие тождества:

1) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$;

2) $A\cup(B\setminus K)=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{K})$;

3) $(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup A)=A$;

4) $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$;

5) $A\cap(B+K)=(A\cap B)+(A\cap K)$.

Решение. Для доказательства равенства 1) докажем два включения:

$$A\setminus B\subseteq A\cap\overline{B}\,,$$

$$A\cap\overline{B}\subseteq A\setminus B\,.$$

Доказательство первого включения проведем по схеме

$$x\in A\setminus B \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow x\in A\cap\overline{B},$$

а доказательство второго включения по схеме

$$x\in A\cap\overline{B} \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \Rightarrow x\in A\setminus B .$$

Заметим, что в данном примере мы могли рассмотреть не две схемы, а одну, но вместо знака следствия использовать знак равносильности $\Leftrightarrow$.

Тождество 2 можно также доказать с помощью двух включений, но можно и не использовать данную схему, а опираться на уже доказанное тождество 1) и на основные законы 1-14. Мы приведем данный способ доказательства, причем вверху над равенствами будем писать либо 1) – это означает, что используется тождество 1), либо номер используемого основного закона. Итак,

$$A\cup(B\setminus K) \overset{1)}{=} A\cup\left(B\cap\overline{K}\right) \overset{5)}{=} (A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{K}\right).$$

Аналогично можно доказать равенства 3),4),5). Для равенства 4) приведем еще один способ доказательства – доказательство от противного. Предположим противное, что множество $B\cap(A/B)$ не пусто, т.е. существует хотя бы один элемент

$$x\in B\cap(A\setminus B)\Rightarrow \begin{cases} x\in B \\ x\in A\setminus B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in B \\ \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in B \\ x\in A \\ x\in \overline{B} \end{cases}.$$

Никакой элемент x не может одновременно принадлежать и самому множеству, и его дополнению, поэтому мы пришли к противоречию.

Пример 5. Пусть A, B, K - такие множества, что $B\subseteq A\subseteq K$. Найдите множество C, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} A\cap C = B \\ A\cup C = K \end{cases}.$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $B\subseteq C$, поэтому C можно представить в виде $C = B\cup C'$, где $C'\cap B=\varnothing$. Из равенств

$$A\cap C = B,\quad C = B\cup C',\quad C'\cap B=\varnothing$$

следует, что $A\cap C'=\varnothing$.

Итак, нам осталось найти множество C'. Заменим C во втором уравнении на $C = B\cup C'$. Получим $A\cup(B\cup C')=K$. По ассоциативному закону $(A\cup B)\cup C'=K$. Из включения $B\subseteq A$ следует, что $A\cup B = A$, поэтому получаем равносильное уравнение $A\cup C'=K$. Два факта $A\cap C'=\varnothing$ и $A\subseteq K$ позволяют заключить, что решением последнего уравнения является множество $C'=K\setminus A$. Окончательно

$$C = B\cup(K\setminus A).$$

Пример 6. Докажите, что условие $A \subseteq B$ равносильно каждому из следующих условий:

$$1)\ A \cap B = A; \quad 2)\ A \cup B = B.$$

Решение. Докажем, что $A \subseteq B$ равносильно условию 1).

Итак, пусть $A \subseteq B$, докажем равенство $A \cap B = A$. Равенство будем доказывать в два включения. Пусть

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A.$$

Обратно, пусть

$$x \in A \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in A, \quad x \in B \Rightarrow x \in A \cap B.$$

Теперь предположим, что выполнено условие 1), докажем, что $A \subseteq B$. Рассмотрим

$$x \in A \overset{A \cap B = A}{\Rightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Равносильность условия $A \subseteq B$ условию 1) мы доказали, равносильность условию 2) докажите самостоятельно.

Пример 7. Докажите для произвольных множеств A, B, K:

1) если $A \not\subset B$ и $A \cap K = \varnothing$, то $A \cup K \not\subset B \cup K$;

2) если $B \cap K = \varnothing$ и $A \cap K \neq \varnothing$, то $A \setminus B \neq \varnothing$.

Решение.

1) Нам нужно доказать, что существует хотя бы один элемент x' такой, что $x' \in A \cup K, x' \notin B \cup K$. Нам известно, что $A \not\subset B$, поэтому существует некоторый элемент $x^* \in A$ и $x^* \notin B$. В силу условия $A \cap K = \varnothing$, данный элемент $x^* \notin K$. Таким образом, $x^* \in A \cup K, x^* \notin B \cup K$.

2)Нам нужно доказать, что существует хотя бы один элемент в множестве $A \setminus B$. Известно, что $A \cap K \neq \varnothing$, поэтому существует элемент $x^* \in A, \quad x^* \in K$, причем, в силу условия $B \cap K = \varnothing$, данный элемент $x^* \notin B$. Итак, мы построили элемент $x^* \in A$ и $x^* \notin B$.

Пример 8. Докажите, что для произвольных множеств A, B справедливо равенство $R(A \cap B) = R(A) \cap R(B)$.

Решение. Доказательство проведем в виде двух включений, объединив их одной записью. Пусть

$$C \in R(A \cap B) \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A, \quad C \subseteq B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C \in R(A), \quad C \in R(B) \Leftrightarrow C \in R(A) \cap R(B).$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.Каждое из следующих множеств задайте в виде некоторого интервала числовой прямой:

1) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{1}\}$;

2) $\left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{y} + \mathbf{1}}{\boldsymbol{y}^2 + \mathbf{1}}\right\}$;

3) $\left\{ \boldsymbol{a}\ \text{Î}\ \boldsymbol{R} : \$\boldsymbol{x}\ \text{Î}\ \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{3x^2 + 2ax + a < 0} \right\}$.

2. Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное утверждение.

1) $\{1\} \qquad \{1,\{1,2\}\}$;
2) $\{1,2\} \qquad \{1,2,\{1\},\{2\}\}$;
3) $\{1,2\} \qquad \{1,2,\{1,2\}\}$;
4) $\varnothing \qquad \{1,2,\{1\},\{\varnothing\}\}$;
5) $\varnothing \qquad \{\varnothing\}$;
6) $\varnothing \qquad \{\{\varnothing\}\}$.

3.Перечислите элементы каждого из следующих множеств:

1) $\{x : x \subseteq \{1\}\}$;
2) $\{x : x \subseteq \{1,2,3\}\}$;
3) $\{x : x \subseteq \varnothing\}$.

4. Докажите следующие тождества:

1) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;
2) $A \cap B = A \cap (\overline{A} \cup B)$;
3) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A + B$;
4) $(A \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
5) $(A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus B) = (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$;
6) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
7) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
8) $(A + B) + K = A + (B + K)$;
9) $A + A = \varnothing$.

5. Считая L универсальным множеством для данного рассмотрения, найдите множество C, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $A \setminus C = A, \quad A \cup C = L$;
2) $A \cap C = \varnothing, \quad A \cup C = L$;
3) $A \setminus (A \setminus C) = \varnothing$;
4) $A \setminus C = \varnothing, \quad A \cup C = A$;
5) $A \setminus (A \setminus C) = \varnothing, \quad \overline{A} \cap \overline{C} = \varnothing$.

6. Найдите решение системы уравнений

$$\begin{cases} A \setminus C = B \\ C \setminus A = K \end{cases},$$

если известно, что $B \subseteq A, \quad A \cap K = \varnothing$.

7. Каждое из следующих утверждений либо докажите, либо покажите при помощи диаграмм Эйлера-Венна, что оно не всегда верно:

1) $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K)$;
2) $(A \setminus B) \cup B = A$;
3) $(A \cup B) \setminus B = A$;
4) $(A \cap B) \setminus A = \varnothing$;
5) $(A \setminus B) \cup K = (A \cup K) \setminus (B \cup K)$;
6) $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subseteq B$;
7) $B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow A = \varnothing$.

8. Верно ли, что:

1) $A \cup B = A \cup K \Rightarrow B = K$;
2) $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$;
3) $A \cup B = A \cup K$ и $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$.

9. Докажите:

15. $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K) \Leftrightarrow A \subseteq K$;
15. $A = B \Leftrightarrow A + B = \varnothing$;
15. $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$;
15. $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
15. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
15. $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
15. $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \varnothing$;
15. $A \cup B \subseteq K \Leftrightarrow A \subseteq K$ и $B \subseteq K$;
15. $A \subseteq B \cup K \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq K$;
15. $K \subseteq A \cap B \Leftrightarrow K \subseteq A$ и $K \subseteq B$;
15. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$;
15. $A \subseteq B \subseteq K \Leftrightarrow A \cup B = B \cap K$;
15. $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus K \subseteq B \setminus K$;
15. $B \subseteq A$ и $K = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup K$;
15. $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$.

10. Объединением семейства множеств $A_i \ (i \in I)$ называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists j \in I \quad x \in A_j\}.$$

Пересечением семейства множеств $A_i \ (i \in I)$ называется множество

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall j \in I \quad x \in A_j\}.$$

Найдите $\bigcup_{n \in N} [-n, n]$.

11. Пусть $C_a = \{x \in R : x > a\}$. Найдите $\bigcap_{a\in N} C_a$, $\bigcup_{a\in N} C_a$.

12. Приведите пример:
    1) последовательности непустых множеств C_1, $C_2, ..., C_n, ...$, такой, что $C_1 \supset C_2 \supset ...$ и $\bigcap_{n\in N} C_n = \varnothing$;
    2) последовательности множеств, отличных от универсального множества L, такой, что $C_1 \subset C_2 \subset ...$ и $\bigcup_{n\in N} C_n = L$;
    3) семейства множеств такого, что пересечение любого конечного числа множеств из этого семейства непусто, а пересечение всех множеств пусто.

1.2 Прямое произведение множеств. *Бинарные отношения*

Произведением (или декартовым произведением) $C_1 \times C_2$ двух непустых множеств C_1 и C_2 будем называть множество упорядоченных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$. Это понятие выросло из понятия декартовой системы координат. Данное понятие можно обобщить и на случай n множеств. Если $C_1, C_2, ..., C_n$ - n непустых множеств, то их произведение состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_k \in C_k, k = 1, ..., n$ элементов этих множеств. Если множества $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$, то их произведение $C_1, C_2, ..., C_n$ обозначается C^n. Так, символом R^n обозначается множество упорядоченных векторов n вещественных чисел.

Любое подмножество из произведения $C \times U$ называется бинарным отношением. Если $C = U$, то бинарное отношение называется бинарным отношением на множестве C. Бинарные отношения обозначаются буквами $f, r, f, ...$ Если пара (x, y) принадлежит бинарному отношению r, то пишут $(x, y) \in r$ или $x\ r\ y$.

Для задания бинарного отношения r используют те же методы, что и для произвольных множеств, кроме того, бинарное отношение, заданное на конечном множестве C, можно задать в виде графа, а бинарное отношение на множестве R можно задать в виде декартовой диаграммы. Под графом бинарного отношения мы понимаем схему, в которой элементы множества C изображаются точками на плоскости, элементы $x, y \in C$, такие, что пара $(x, y) \in r$ соединяются стрелкой, направленной от x к y, пары $(x,x)\in r$ изображаются петлей вокруг точки x. Под декартовой диаграммой понимают изображение пар $(x,y)\in r$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Областью определения бинарного отношения r называется множество

$$D_r = \{x\in C : \exists y \quad (x,y)\in r\}.$$

Областью значений бинарного отношения r называется множество

$$R_r = \{y\in U : \exists x \quad (x,y)\in r\}.$$

Бинарное отношение r на множестве C называется рефлексивным, если для любого $x\in C$ пара $(x,x)\in r$. Если C - конечное множество, то рефлексивность бинарного отношения r означает, что на графе данного бинарного отношения вокруг каждой точки x из C есть петля. Если $C = R$, то рефлексивность бинарного отношения r с точки зрения декартовой диаграммы означает, что в число изображенных точек войдут все точки прямой $y(x) = x$.

Бинарное отношение r на множестве C называется симметричным, если для любых $x,y\in C$ из принадлежности пары (x,y) отношению r следует принадлежность этому отношению также пары (y,x). Если C - конечное множество, то симметричность бинарного отношения r означает, что на графе данного бинарного отношения все присутствующие стрелки двусторонние. Если $C = R$, то симметричность бинарного отношения r с точки зрения декартовой диаграммы означает, что изображенное множество симметрично относительно прямой $y(x) = x$.

Бинарное отношение r на множестве C называется антисимметричным, если для любых $x,y\in C$ из принадлежности пар (x,y) и (y,x) отношению r следует $x = y$. Если C - конечное множество, то антисимметричность бинарного отношения r означает, что на графе данного бинарного отношения все присутствующие стрелки односторонние.

Бинарное отношение r на множестве C называется транзитивным, если для любых $x,y,z\in C$ из принадлежности пар (x,y) и (y,z) отношению r следует принадлежность этому отношению также пары (x,z).

Обратным отношением для r называется отношение

$$r^{-1} = \{(x,y) : (y,x)\in r\}.$$

Композицией отношений r_1 и r_2 называется отношение

$$r_2 \circ r_1 = \{(x,y) : \exists z \quad (x,z)\in r_1, (z,y)\in r_2\}.$$

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $\left(r^{-1}\right)^{-1} = r$;

2. $\left(r_2 \circ r_1\right)^{-1} = r_1^{-1} \circ r_2^{-1}$.

Пример 1. Перечислите элементы множеств $A \times B$, $B \times A$:

1) $A = \{1,2\}, \quad B = \{3,4,5\}$;

2) $A = \varnothing, \quad B = \{1,2,3,4\}$.

Решение. По определению

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Порядок построения данного множества будет следующий: вначале перечислим все пары, первый элемент которых равен первому элементу множества A, а второй элемент берется из множества B в том порядке, в котором они записаны в множестве B, затем аналогично берем второй элемент из A и составляем пары со всеми элементами из B и т.д.

Аналогичен и метод построения множества

$$B \times A = \{(b,a) : b \in B, a \in A\}.$$

1) $A \times B = \left\{\begin{matrix}(1,3),(1,4),(1,5), \\ (2,3),(2,4),(2,5)\end{matrix}\right\}, \quad B \times A = \left\{\begin{matrix}(3,1),(3,2), \\ (4,1),(4,2), \\ (5,1),(5,2)\end{matrix}\right\}.$

3) $A \times B = B \times A = \varnothing$, поскольку множество A пусто и мы не можем составить ни одной пары.

Пример 2. Пусть $A = \{3,4\}$. Перечислите элементы множеств A^4.

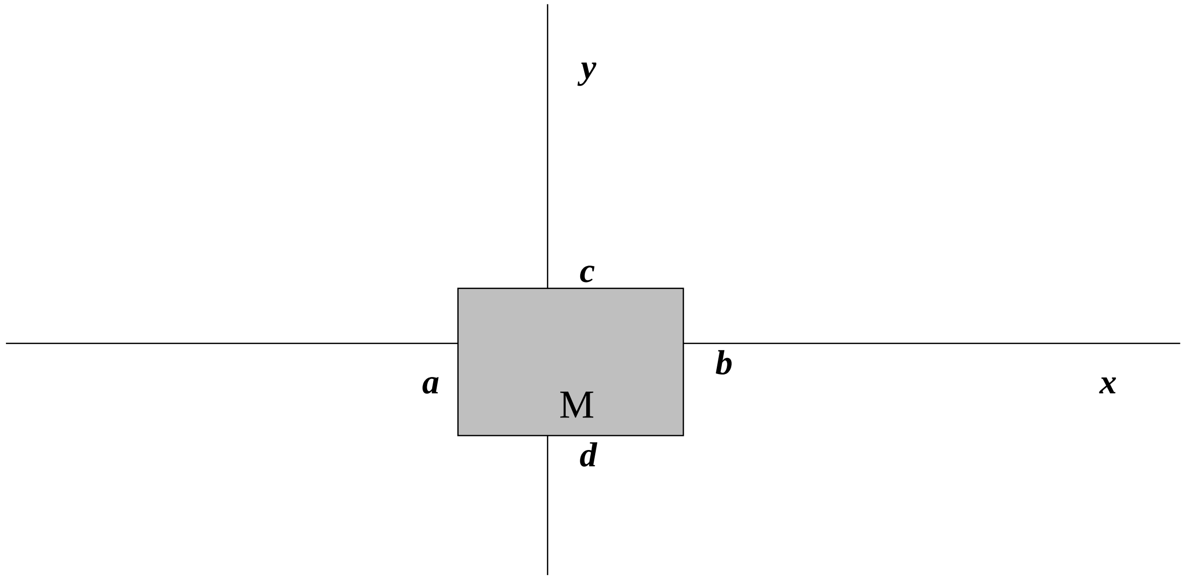
Решение. По определению

$$A^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 \in A, a_2 \in A, a_3 \in A, a_4 \in A\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}(3,3,3,3),(3,3,3,4),(3,3,4,3),(3,3,4,4), \\ (3,4,3,3),(3,4,3,4),(3,4,4,3),(3,4,4,4), \\ (4,3,3,3),(4,3,3,4),(4,3,4,3),(4,3,4,4), \\ (4,4,3,3),(4,4,3,4),(4,4,4,3),(4,4,4,4)\end{matrix}\right\}.$$

Пример 3. Пусть на плоскости задана декартова система координат. Изобразите на плоскости следующее множество: $M = [a,b] \times [c,d]$, uде $a,b,c,d \in R \quad a < b, \quad c < d$.

Решение. При построении прямого произведения $M = [a,b] \times [c,d]$ каждой точке x из отрезка $[a,b]$ ставятся пары (x,y), $y \in [c,d]$, поэтому в результате получим множество



Пример 4. Докажите следующее равенство:

$$(A \cap B) \times (K \cap M) = (A \times K) \cap (B \times M).$$

Решение. Равенство двух множеств мы докажем с помощью двух включений, объединив их одной записью. Заметим, что элементами множеств в данном случае являются упорядоченные пары точек. Итак, пусть

$(x, y) \in (A \cap B) \times (K \cap M) \Leftrightarrow x \in (A \cap B), y \in (K \cap M) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A, x \in B, y \in K, y \in M \Leftrightarrow x \in A, y \in K, x \in B, y \in M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times K, (x, y) \in B \times M \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times K) \cap (B \times M).$

Пример 5. Докажите, что для любых непустых множеств A, B, K из равенства $(A \times B) \cup (B \times A) = K \times K$ следует, что $A = B = K$.

Решение. Для доказательства данного утверждения установим два равенства $A = K$ и $B = K$.

Для произвольных $x \in A$ и $y \in B$

$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in K \times K \Rightarrow x \in K, y \in K \Rightarrow A \subseteq K, B \subseteq K.$

С другой стороны, для произвольного $x \in K$

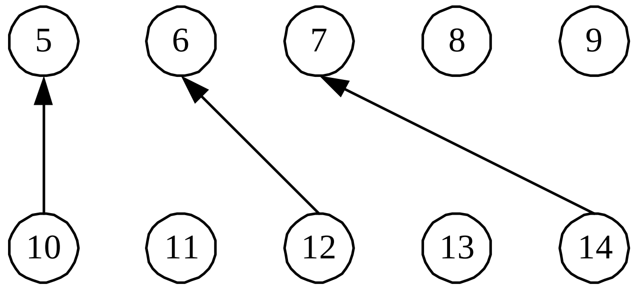
$(x, x) \in K \times K \Rightarrow (x, x) \in A \times B$ или $(x, x) \in B \times A \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ и $x \in B \Rightarrow K \subseteq A$ и $K \subseteq B$.

Таким образом, $A = B = K$.

Пример 6. На множестве $A = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ задано бинарное отношение $r = \{(x, y) : x \textit{ делится на } y\}$. Нарисуйте граф данного бинарного отношения.

Решение. Расположим на плоскости точки множества A. Точки $x, y \in A$, для которых пара $(x, y) \in r$, соединим стрелкой, направленной от x к y. Пары $(x, x) \in r$ изобразим петлей вокруг точки x. Результатом такого построения будет граф



Пример 7. Для следующего бинарного отношения, определенного на множестве R, найдите область определения, область значений и нарисуйте декартову диаграмму

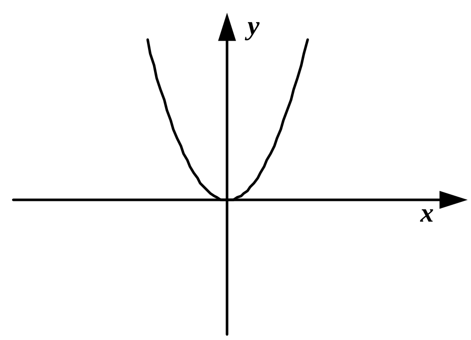
$$r = \{(x, y) : x^2 = y\}.$$

Решение. В соответствии с определением

$$D_r = \{x \in R : \exists y \quad (x, y) \in r\} = R.$$

$$R_r = \{y \in U : \exists x \quad (x, y) \in r\} = R_+ \cup 0 \ .$$

Декартова диаграмма для данного бинарного отношения имеет вид



Пример 8. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает.

1) $r = \{(1,2), (2,1), (1,1), (1,3), (3,2), (3,3)\}$ на множестве $C = \{1,2,3\}$;

2) $r = \{(x, y) : x - y \in Z\}$ на множестве $C = R$;

3) $r = \{(x, y) : 2x = 3y\}$ на множестве $C = Z$;

4) $r = \{(x, y) : x \subseteq y\}$ на множестве $C = R(Z)$.

Решение.

1) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для точки $2 \in C$ пара $(2,2) \notin r$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(1,3) \in r$, а пара $(3,1) \notin r$; не является антисимметричным, поскольку,

например, пары $(1,2)$ и $(2,1)$ принадлежат r, но $1 \neq 2$; не является транзитивным, поскольку, например $(3,2) \in r$, $(2,1) \in r$, а $(3,1) \notin r$.

2) Данное отношение является рефлексивным, поскольку для любой точки $x \in R$ разность $x - x = 0 \in Z$, т.е. $(x, x) \in R$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары (x, y) отношению r означает $x - y = k \in Z$, но тогда $y - x = -k \in Z$, т.е. пара $(y, x) \in r$; не является антисиммеричным, поскольку, например, пары $(1.2, 3.2) \in r$ и $(3.2, 1.2) \in r$, но $3.2 \neq 1.2$; является транзитивным, поскольку для любых $x, y, z \in R$ принадлежность пар (x, y) и (y, z) отношению r означает $x - y = k \in Z$ и $y - z = n \in Z$, но тогда $x - z = k + n \in Z$, т.е. $(x, z) \in r$.

3) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку из всех пар $(x, x), x \in Z$ только пара $(0,0) \in r$, ведь для всех остальных $x \in Z$ не выполнено равенство $2x = 3x$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(3,2) \in r$ ($2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$), а пара $(2,3) \notin r$ ($2 \cdot 2 \neq 3 \cdot 3$); является антисимметричным, поскольку для любых пар $(x, y) \in r, (y, x) \in r$ одновременно выполняются равенства $2x = 3y$ и $2y = 3x$, т.е. $9x = 4x$ и $4y = 9y$, но это может быть только в том случае, если $x = y = 0$; не является транзитивным, поскольку, например, пара $(9,6) \in r$ ($2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$), пара $(6,4) \in r$ ($2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$), но пара $(9,4) \notin r$ ($2 \cdot 9 \neq 3 \cdot 4$).

4) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для $\varnothing \in R(Z)$ пересечение $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, т.е. $(\varnothing, \varnothing) \notin r$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары (x, y) отношению r означает $x \cap y \neq \varnothing$, но тогда $y \cap x \neq \varnothing$, т.е. пара $(y, x) \in r$; не является транзитивным, поскольку, например, пара $(\{1,2\}, \{2,3\}) \in r$ ($\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \neq \varnothing$) и пара $(\{2,3\}, \{3,6,7\}) \in r$ ($\{2,3\} \cap \{3,6,7\} = \{3\} \neq \varnothing$), но пара $(\{1,2\}, \{3,6,7\}) \notin r$, так как $\{1,2\} \cap \{3,6,7\} = \varnothing$.

Пример 9. Пусть на множестве R заданы следующие бинарные отношения:

$$r_1 = \{(x, y) : x = y^2\}; \quad r_2 = \{(x, y) : x + y \leq 2\}; \quad r_3 = \{(x, y) : x + y \in Z\}$$

Найдите обратные к данным бинарным отношениям и всевозможные композиции этих бинарных отношений.

Решение. Вначале выпишем обратные отношения:

$r_1^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r_1\} = \{(x, y) : y = x^2\}$;

$r_2^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r_2\} = \{(x, y) : y + x \leq 2\} = r_2$;

$r_3^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r_3\} = \{(x, y) : y + x \in Z\} = r_3$.

В качестве примера рассмотрим некоторые композиции рассматриваемых бинарных отношений:

$r_1 \circ r_2 = \{(x, y) : \exists z \quad (x, z) \in r_2, (z, y) \in r_1\} =$

$= \{(x,y): \exists z \quad x+z \le 2,\, z = y^2\} = \{(x,y): x + y^2 \le 2\}$;

$r_2 \circ r_1 = \{(x,y): \exists z \quad (x,z) \in r_1, (z,y) \in r_2\} =$

$= \{(x,y): \exists z \quad x = z^2,\, z + y \le 2\} = \left\{(x,y): x \ge 0, \begin{bmatrix} \sqrt{x} + y \le 2 \\ -\sqrt{x} + y \le 2 \end{bmatrix}\right\} =$

$= \{(x,y): x \ge 0, -\sqrt{x} + y \le 2\}$;

$r_2 \circ r_3 = \{(x,y): \exists z \quad (x,z) \in r_3, (z,y) \in r_2\} =$

$= \{(x,y): \exists z \quad x + z \in Z,\, z + y \le 2\} =$

$= \{(x,y): \exists z \quad x + z = k \in Z,\, z + y \le 2\} = \{(x,y): \exists k \in Z \quad k - x + y \le 2\} = R \times R$

$r_3 \circ r_2 = \{(x,y): \exists z \quad (x,z) \in r_2, (z,y) \in r_3\} =$

$= \{(x,y): \exists z \quad x + z \le 2,\, z + y \in Z\} = R \times R$.

Остальные композиции постройте самостоятельно.

Пример 10. Пусть C - произвольное множество, обозначим символом I_C отношение на множестве C вида

$$I_C = \{(x,y): x = y\} = \{(x,x): x \in C\}.$$

Докажите, что для любого бинарного отношения r между элементами множеств A и B выполняются равенства:

$$I_B \circ r = r, \qquad r \circ I_A = r\,.$$

Решение. $I_B \circ r = \{(x,y) \in A \times B : \exists z \in B\ (x,z) \in r, (z,y) \in I_B\} =$

$= \{(x,y) \in A \times B : \exists z \in B\ (x,z) \in r, z = y\} = \{(x,y) \in A \times B : (x,y) \in r\} = r$;

$r \circ I_A = \{(x,y) \in A \times B : \exists z \in A\ (x,z) \in I_A, (z,y) \in r\} =$

$= \{(x,y) \in A \times B : \exists z \in A \quad x = z, (z,y) \in r\} = \{(x,y) \in A \times B : (x,y) \in r\} = r$.

Пример 11. Пусть j, f, c бинарные отношения, определенные на множестве C . Докажите следующие утверждения:

1) если j, f - симметричные (антисимметричные) отношения, то $(j \cap f)^{-1}$ - симметричное (антисимметричное) отношение;

2) $(j \setminus f) \circ c \supseteq (j \circ c) \setminus (f \circ c)$.

Решение. 1. Пусть j, f - симметричные отношения, докажем, что $(j \cap f)^{-1}$ - симметричное отношение. Пусть

$$(x,y) \in (j \cap f)^{-1} \Rightarrow (y,x) \in j \cap f \Rightarrow \begin{cases} (y,x) \in j \\ (y,x) \in f \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{\text{симметричность } j, f} \begin{cases} (x,y) \in j \\ (x,y) \in f \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in j \cap f \Rightarrow (y,x) \in (j \cap f)^{-1};$$

Пусть j, f - антисимметричные отношения, докажем, что $(j \cap f)^{-1}$ - антисимметричное отношение. Пусть

$$\begin{cases}(x,y)\in(j\cap f)^{-1}\\(y,x)\in(j\cap f)^{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y,x)\in j\cap f\\(x,y)\in j\cap f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y),(y,x)\in j\\(x,y),(y,x)\in f\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{\text{антисимметричность } j,f}\quad x=y.$$

1. Докажем требуемое включение. Пусть

$$(x,y)\in(j\circ c)\setminus(f\circ c)\Rightarrow(x,y)\in j\circ c,\quad (x,y)\notin f\circ c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\exists z\quad\begin{cases}(x,z)\in c\\(z,y)\in j\end{cases}\\ \forall z\quad\left[\begin{array}{l}(x,z)\notin c\\(z,y)\notin f\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\exists z\quad\begin{cases}(x,z)\in c\\(z,y)\in j\\(z,y)\notin f\end{cases}\Rightarrow\exists z\quad\begin{cases}(x,z)\in c\\(z,y)\in j\setminus f\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x,y)\in(j\setminus f)\circ c$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $C=\{*,\times\}$. Перечислите все элементы множеств C^3, C^4.
2. Найдите геометрическую интерпретацию множества $A\times B$, где A - множество точек отрезка $[0,1]$, а B - множество точек квадрата с вершинами в точках $(\mathbf{0},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{1},\mathbf{1})$.
3. Доказать, что $(A\times B)\cup(K\times M)\subseteq(A\cup K)\times(B\cup M)$. При каких A,B,K,M включение можно заменить равенством.
4. Доказать, что для произвольных множеств A,B,K:
   1) $(A\cup B)\times K=(A\times K)\cup(B\times K)$;
   2) $(A\setminus B)\times K=(A\times K)\setminus(B\times K)$;
   3) $A\times(B\setminus K)=(A\times B)\setminus(A\times K)$.
5. Пусть $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$ и $(A\times B)\cup(B\times A)=K\times M$. Доказать, что в этом случае $A=B=K=M$.
6. Перечислите все элементы бинарного отношения r и нарисуйте его граф:
   1) $r=\{(x,y): x<y\}$ на множестве $C=\{1,2,3,4,5\}$;
   2) $r=\{(x,y): y=x+1\}$ на множестве $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

7. Для каждого из следующих бинарных отношений, определенных на множестве R, найдите область определения, область значений и нарисуйте декартову диаграмму:
   1) $r=\{(x,y): x\le y\}$;
   2) $r=\{(x,y): x=y\}$;
   3) $r=\{(x,y): x^2+4y^2\le 1\}$;
   4) $r=\{(x,y): x^2=y^2\}$;

5) $r = \{(x, y) : y = \log_2 x\}$;
6) $r = \{(x, y) : y = \sin x\}$.

8. Даны бинарные отношения r между элементами множеств A и B, найдите область определения и область значений для данных бинарных отношений:
   1) $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{\{1\},\{1,2\},\{2,5\},\{3\}\}, \quad r = \{(x, y) \in A \times B : x \in y\}$;
   2) $A = Z \times Z, B = Q, \quad r = \left\{((a,b),c) \in A \times B : c = \dfrac{a}{b}\right\}$;
   3) $A = Z, B = Q, \quad r = \{(x, y) \in A \times B : x \cdot y = 1\}$;
   4) $A = Z, B = Q, \quad r = \{(x, y) \in A \times B : b = 2^a\}$.

9. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает:
   1) $r = \{(x, y) \in R \times R : x^2 = y^2\}$,
   2) $r = \{(x, y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\}$,
   3) $r = \{(x, y) \in R \times R : x \cdot y > 1\}$;
   4) $r = \{(x, y) \in R \times R : y = |x|\}$,
   5) $r = \{(x, y) \in R \times R : x + x^2 = y + y^2\}$,
   6) $r = \{(x, y) \in Z \times Z : x \le y + 1\}$;
   7) $r = \{(x, y) \in Z \times Z : 3 \textit{ делится на } x + y\}$;
   8) $r = \{(x, y) \in R(Z) \times R(Z) : x \subseteq y\}$;
   9) $r = \{(x, y) \in R(Z) \times R(Z) : x \cap y = \varnothing\}$.

Пусть
   1) $r_1 = \{(x, y) \in R \times R : x = y^2\}; \qquad r_2 = \{(x, y) \in R \times R : x + y \le 5\}$;
   2) $r_3 = \{(x, y) \in R \times R : x^3 = y\}; \qquad r_4 = \{(x, y) \in R \times R : y = \sin x\}$.

Найдите всевозможные композиции $r_i \circ r_k \quad i, k = 1,2,3,4$.

Покажите, что равенство $j \circ f = f \circ j$ верно не для любых бинарных отношений.

Докажите, что для любого бинарного отношения r выполняются условия: $D_{r^{-1}} = R_r$ и $R_{r^{-1}} = D_r$.

Пусть j, f, c - бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Докажите следующие утверждения:
   1) $(j \setminus f)^{-1} = j^{-1} \setminus f^{-1}$;
   2) $(j \cap f) \circ c \subseteq (j \circ c) \cap (f \circ c)$;
   3) $(j \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ j^{-1}$;

4) $(j \cup f)^{-1} = j^{-1} \cup f^{-1}$;
5) $(j \cup f) \circ c = (j \circ c) \cup (f \circ c)$.

15. Приведите примеры бинарных отношений:
    1) рефлексивных и транзитивных, но не антисимметричных;
    2) транзитивных и симметричных, но не рефлексивных;
    3) рефлексивных и симметричных, но не транзитивных;
    4) рефлексивных и транзитивных, но не симметричных.

16. Докажите, что если r - транзитивное и симметричное бинарное отношение на множестве A, область определения которого совпадает с A, то r рефлексивно.

1.3 Специальные бинарные отношения

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение r на множестве C называется отношением эквивалентности на множестве C. Для отношения эквивалентности вместо записи $(x, y) \in r$ часто используют запись $x \approx y$ (читается : x эквивалентен y)

Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества C, состоящее из тех элементов $y \in C$, для которых $(x, y) \in r$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]$:

$$[x] = \{y \in C : (x, y) \in r\}.$$

Разбиением множества C называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств C таких, что каждый элемент множества C принадлежит одному и только одному из этих подмножеств. Всякое разбиение множества C определяет на C отношение эквивалентности r: $(x, y) \in r$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения. С другой стороны, всякое отношение эквивалентности r определяет разбиение множества C на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества C по отношению эквивалентности r называется фактор-множеством множества C по отношению r и обозначается C / r.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка на множестве C и вместо записи $(x, y) \in r$ для данного отношения часто используют запись $x \leq y$. Отношение частичного порядка на множестве C, для которого любые два

элемента сравнимы, т.е. для любых $x, y \in C$ выполнено либо $x \le y$, либо $y \le x$, называется отношением линейного порядка. Множество C с заданным на нем частичным (линейным) порядком называется частично (линейно) упорядоченным.
Пусть C - непустое конечное множество, на котором задано отношение частичного порядка. Запишем $x < y$, если $x \le y$ и $x \ne y$. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x < y$ и не существует такого элемента u, что $x < u < y$. Для $x < y$ можно записать $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Частично упорядоченные множества можно изображать с помощью так называемых диаграмм Хассе. На диаграмме Хассе элементы частично упорядоченного множества изображаются точками на плоскости, и если элемент y покрывает элемент x, то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y.

Пример 1. Доказать, что бинарное отношение на множестве целых чисел

$$r = \{(x, y) \in Z \times Z : x = y\}$$

является отношением эквивалентности, и построить соответствующее ему фактор-множество Z / r.

Решение. Проверку рефлексивности, симметричности и транзитивности данного бинарного отношения выполните самостоятельно. Построим классы эквивалентности для данного отношения эквивалентности. Класс эквивалентности, порожденный любым элементом $x \in Z$, имеет вид

$$[x] = \{y \in Z : x \approx y\} = \{y \in Z : x = y\} = \{x\}.$$

Таким образом, для данного отношения эквивалентности класс эквивалентности, порожденный элементом $x \in Z$, состоит только из этого элемента x и фактор-множество Z / r имеет вид

$$Z / r = \{\{x\} : x \in Z\}.$$

Пример 2. Пусть m - некоторое натуральное число. Проверить, является ли отношением эквивалентности следующее бинарное отношение на множестве целых чисел:

$$r = \{(x, y) \in Z \times Z : x - y \quad \textit{делится} \quad \textit{на} \quad m\}.$$

Построить фактор-множество Z / r.

Решение. Проверим три основных свойства для отношения эквивалентности.

1. Рефлексивность.

Для произвольного $x \in Z$ разность $x - x = 0 = 0 \cdot m \Rightarrow (x, x) \in r$.

2. Симметричность.

Пусть

$(x, y) \in r \Rightarrow \exists k \in Z \quad x - y = k \cdot m \Rightarrow \exists k \in Z \quad y - x = -k \cdot m \Rightarrow (y, x) \in r.$

3. Транзитивность.
Пусть
$$(x,y)\in r,(y,z)\in r \Rightarrow \exists k,n\in Z \quad x-y=k\cdot m, y-z=n\cdot m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists k,n\in Z \quad x-z=(k+n)\cdot m \Rightarrow \exists r=(k+m)\in Z\ x-z=r\cdot m \Rightarrow (x,z)\in r$$

Итак, исследуемое бинарное отношение является отношением эквивалентности. Построение классов эквивалентности начнем с класса эквивалентности, порожденного $0\in Z$
$$[0]=\{y\in Z : 0\approx y\}=\{y\in Z : 0-y \text{ } \textit{делится на } m\}=$$
$$=\{y\in Z : \exists k\in Z\ \ 0-y=k\cdot m\}=\{y\in Z : \exists k\in Z\ \ y=-k\cdot m\}=$$
$$=\{0,m,-m,2m,-2m,3m,-3m,...,km,-km,...\}.$$
Если $m=1$, то данный класс эквивалентности $[0]=Z$, других классов эквивалентности просто не существует, и $Z/r=\{[0]\}$. Если $m>1$, то существуют элементы, не попавшие в построенный класс, например, элемент 1. Построим класс эквивалентности, порожденный 1
$$[1]=\{y\in Z : 1\approx y\}=\{y\in Z : 1-y \text{ } \textit{делится на } m\}=$$
$$=\{y\in Z : \exists k\in Z\ 1-y=k\cdot m\}=\{y\in Z : \exists k\in Z\ \ y=1-k\cdot m\}=$$
$$=\{1,1-m,1+m,1-2m,1+2m,1-3m,1+3m,...,1-km,1+km,...\}.$$
При $m=2$ построенные два класса эквивалентности при объединении дают все множество Z и поэтому построение классов эквивалентности закончено, в противном случае существует элемент, например 3, не попавший ни в один из этих классов эквивалентности, и нужно перейти к построению класса эквивалентности, порожденного 2. Продолжая данный процесс, при любом m мы построим классы эквивалентности
$$[0],[1],...,[m-1],$$
которые не пересекаются и при объединении дают все множество Z . Таким образом,
$$Z/r=\{\{n,n-m,n+m,...,n-km,n+km,...\}: n=1,2,...,m-1\}.$$

Пример 3. На плоскости R выбрана некоторая декартова прямоугольная система координат. На R заданы три отношения эквивалентности:
$$r_1=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in R\times R : a_1=b_1, a_2-b_2\in Z\};$$
$$r_2=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in R\times R : a_1-b_1\in Z, a_2-b_2\in Z\};$$
$$r_3=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in R\times R : a_1-b_1+a_2-b_2\in Z\}.$$
Найдите фактор-множества для данных отношений эквивалентности.

Решение. Построим фактор-множество для отношения r_1. Класс эквивалентности, порожденный произвольным элементом $(a_1,a_2)\in R$, имеет вид
$$[(a_1,a_2)]=\{(x,y)\in R : ((a_1,a_2),(x,y))\in r_1\}=\{(x,y)\in R : x=a_1, a_2-y\in Z\}=$$
$$=\{(x,y)\in R : \exists k\in Z\quad x=a_1, a_2-y=k\}=$$
$$=\{(x,y)\in R : \exists k\in Z\ \ x=a_1,\ y=a_2-k\}=$$

$=\{(a_1, a_2 - k) \in R : k \in Z\}$.

Таким образом, в класс эквивалентности, порожденный элементом $(a_1, a_2) \in R \quad a_1 \in R, \quad 0 \le a_2 < 1$, попадают вместе с элементом $(a_1, a_2) \in R$ элементы, у которых первая координата равна a_1, а вторая координата отличается от a_2 на целое число. Классы эквивалентности, порожденные элементами с $a_1 \in R, \quad 0 \le a_2 < 1$, не пересекаются и в объединении дают все множество R. Следовательно, фактор-множество R / r_1 можно записать в виде

$$R / r_1 = \{\{(a, b + k) : k \in Z\} : a \in R, \quad b \in [0,1)\}.$$

Фактор-множество для отношений r_2, r_3 постройте самостоятельно.

Пример 4. Придумайте минимальное (по числу элементов) отношение эквивалентности r на множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ так, чтобы $(1,2) \in r$ и $(2,3) \in r$.

Решение. Отношение эквивалентности рефлексивно, поэтому данному отношению обязательно должны принадлежать пары $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$. Отношение эквивалентности симметрично, поэтому наряду с парами $(1,2)$, $(2,3)$ данному отношению обязаны принадлежать пары $(2,1)$, $(3,2)$. В силу транзитивности отношения r ему обязана принадлежать вместе с парами $(3,2)$, $(2,1)$ пара $(3,1)$ (и, следовательно, $(1,3)$). Таким образом, минимальное отношение эквивалентности, которое мы можем построить, имеет вид

$$r = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(1,3)\}.$$

Пример 5. Докажите, что $\mathrm{M} = \{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4,6,7\}\}$ - разбиение множества $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и перечислите все элементы отношения эквивалентности r, соответствующего разбиению M.

Решение. M является разбиением множества A, поскольку множества, являющиеся элементами множества M, не пересекаются и при объединении дают все множество A. Отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению, строится по правилу $(x, y) \in r$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения, т.е.

$$r = \left\{\begin{matrix}(1,1),(2,2),(5,5),(2,5),(5,2),(4,4),(6,6),(7,7),(4,6),(6,4), \\ (4,7),(7,4),(6,7),(7,6),(3,3)\end{matrix}\right\}.$$

Пример 6. Покажите, что объединение двух отношений эквивалентности может не являться отношением эквивалентности.

Решение. На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения эквивалентности

$r_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2)(2,1)\}$;

$r_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,2)(2,3)\}$.

Объединение данных отношений эквивалентности

$r_1 \cup r_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2)(2,1),(3,2),(2,3)\}$

не является отношением эквивалентности, так как для него не выполнено свойство транзитивности ($(3,2) \in r_1 \cup r_2$, $(2,1) \in r_1 \cup r_2$, а $(3,1) \notin r_1 \cup r_2$).

Пример 7. Докажите, что отношение $r = \{(x,y) \in R \times R : x \le y\}$ является отношением порядка на множестве R, является ли это отношение отношением линейного порядка.

Решение. Для доказательства проверим три свойства данного отношения: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.

1. Рефлексивность.

$\forall x \in R\ x = x \Rightarrow (x,x) \in r$.

2. Антисимметричность.

Пусть $(x,y) \in r$ и $(y,x) \in r \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow x = y$.

3. Транзитивность.

Пусть $(x,y) \in r$ и $(y,z) \in r \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le z \end{cases} \Rightarrow x \le z \Rightarrow (x,z) \in r$.

Данное отношение является отношением линейного порядка, так как для любых $x, y \in R$ выполнено либо $x \le y$, либо $y \le x$.

Пример 8. *Покажите, что композиция двух отношений частичного порядка может не являться отношением частичного порядка.*

Решение. На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения частичного порядка

$r_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,3),(1,3)\}$;

$r_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,2),(1,2)\}$.

Однако композиция

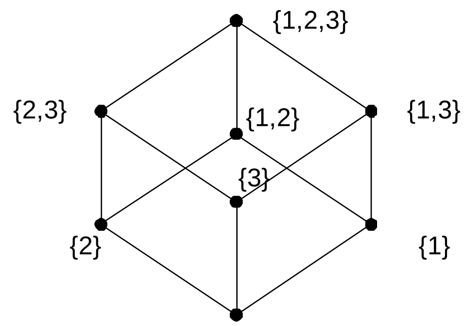
$r_2 \circ r_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,2),(2,3),(1,5),(5,2),(1,2)\}$

не является отношением частичного порядка, так как для него нарушено свойство транзитивности ($(5,2) \in r_2 \circ r_1$, $(2,3) \in r_2 \circ r_1$, $(5,3) \notin r_2 \circ r_1$).

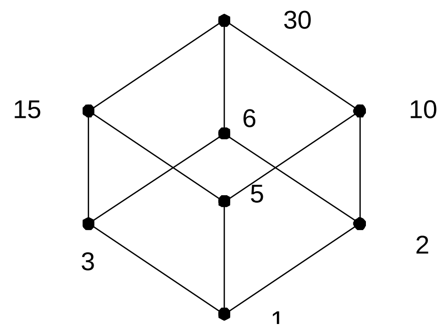
Пример 9. Для следующих двух отношений частичного порядка построить диаграммы Хассе.

1. $A = \{1,2,3\}$, $r_1 = \{(x,y) \in R(A) \times R(A) : x \subseteq y\}$.
2. $A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $r_2 = \{(x,y) \in A \times A : y \text{ } \textit{делится на } x\}$.

Решение.



1.



2.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что каждое из следующих отношений является отношением эквивалентности, и найдите классы эквивалентности:

1) $r = \{(x,y) \in R(A) \times R(A) : |x| = |y|\},\ A = \{1,2,3\}$;

2) $r = \{((a,b),(c,d)) \in N^2 \times N^2 : a + d = b + c\}$;

3) $r = \{(x,y) \in R \times R : x^2 = y^2\}$;

4) $r = \{(x,y) \in R(A) \times R(A) : x + y - \textit{конечное множество}\},\ \forall A$;

2. На множестве N задано бинарное отношение по следующему правилу: $(x,y) \in r$ тогда и только тогда, когда последняя цифра в десятичной записи числа x совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа y. Докажите, что данное отношение является отношением эквивалентности. Сколько элементов в фактор-множестве N / r ?

3. На R задано бинарное отношение $r = \{(x,y) \in R \times R : x^2 + x = y^2 + y\}$. Докажите, что r - отношение эквивалентности. Сколько элементов может содержать класс эквивалентности? Существует ли класс эквивалентности, состоящий из одного элемента?

4. Покажите, что пересечение отношений эквивалентности, определенных на некотором множестве A, является отношением эквивалентности.

5. Докажите, что если r - отношение эквивалентности, то r^{-1} - также отношение эквивалентности.

6. Какие из следующих подмножеств множества $R(R)$ образуют разбиение R? Для каждого разбиения задайте соответствующее отношение эквивалентности:

1) $\{\{x \in R : x > 0\}, \{x \in R : x < 0\}\}$;

2) $\{\{x \in R : x > 0\}, \{x \in R : x < 0\}, \{0\}\}$;

3) $\{(n, n+1) : n \in Z\}$;

4) $\{[n, n+1] : n \in Z\}$;

5) $\{(n, n+1] : n \in Z\}$.

7. Пусть $M_1 = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $M_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ - два разбиения множества K. Докажите, что множество всех непустых подмножеств вида $A_i \cap B_j$ также является разбиением множества K. Какое отношение эквивалентности соответствует этому разбиению, если разбиению M_1 соответствует отношение r_1, а разбиению M_2 - отношение r_2?

8. Докажите, что отношение $r = \{(x, y) \in N \times N : y \textit{ делится на } x\}$ является отношением порядка. Является ли это отношение отношением линейного порядка? Является ли аналогичное отношение отношением порядка, если его рассматривать на множестве Z ?

9. Докажите, что отношение $r = \{(x, y) \in N \times N : x \textit{ делится на } y \textit{ или } x < y\}$ является отношением линейного порядка.

10. На множестве всевозможных разбиений данного множества рассмотрим отношение: $(M_1, M_2) \in r$, если для любого $A \in M_1$ существует множество $B \in M_2$ такое, что $A \subseteq B$. Докажите, что рассматриваемое отношение является отношением порядка. Является ли оно линейным порядком?

11. Перечислите всевозможные линейные порядки на множестве $\{1,2\}$, на множестве $\{1,2,3\}$. Выскажите предположение о числе линейных порядков на множестве из n элементов.

12. Пусть r_1 - отношение порядка на множестве A, r_2 - отношение порядка на множестве B. Докажите, что отношение

$$j = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (A \times B) \times (A \times B) : (a_1, b_1) \in r_1, (a_2, b_2) \in r_2\}$$

есть отношение порядка.

13. Для следующего отношения порядка постройте диаграмму Хассе:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $r = \{(x, y) \in A \times A : x \le y\}$.

2. КОМБИНАТОРИКА

2.1 Основные правила комбинаторики

Правило суммы:

Правило суммы для двух объектов: *Пусть объект **a** можно выбрать m способами, объект **b** – n способами, и существует k общих способов выбора объектов **a** и **b** , тогда один из объектов “**a** или **b**” можно выбрать $m + n - k$ способами.*

Пример 1. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать кость, на которой есть "2" или "5".

Решение. Выбрать кость, содержащую "2", можно 7-ю способами, содержащую "5" - тоже 7-ю способами, но среди этих способов есть один общий - это выбор кости "2 : 5". В соответствии с правилом суммы общее число способов выбора нужной кости можно осуществить 7+7-1 = 13 способами.

Правило суммы можно сформулировать для произвольного числа объектов. Для этого достаточно использовать формулу для мощности объединения конечного числа множеств. В случае трёх объектов формула имеет вид:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Правило суммы для 3-х объектов:

*Если объект **a** можно выбрать n_1 способами, объект **b** – n_2 способами, объект **c** – n_3 способами, и известны n_{12} общих способа выбора одного из объектов **a** и **b** , n_{13} общих способа выбора одного из объектов **a** и **c**, n_{23} общих способа выбора одного из объектов **b** и **c**, а также известно n_{123} общих способа выбора одного их объектов **a**, **b** и **c** , то число всех способов выбора одного из объектов “**a** или **b** или **c**” вычисляется по формуле:*

$$n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123} \qquad (1)$$

Пример 2. В ходе экзаменационной сессии 12 студентов получили оценки "отлично”, 12 - "хорошо", 13 - "удовлетворительно”, 5 - "хорошо" и "отлично", 7 - "хорошо" и "удовлетворительно", 8 - "удовлетворительно" и "отлично". У трех студентов все виды оценок. Сколько студентов в группе, если известно, что все они сдали сессию? Сколько отличников в группе? Сколько в группе "чистых" троечников?

Решение. В условиях задачи $n_1 = 12$, $n_2 = 12$, $n_3 = 13$, $n_{12} = 5$, $n_{23} = 7$, $n_{13} = 8$, $n_{123} = 3$. По формуле (1) находим общее число студентов в группе: 12+13+12-5-7- 8+3 = 20 ; число отличников в группе равно: $n_1 - (n_{12} + n_{13}) + n_{123} = 12 - (5+8) + 3 = 2$; число “чистых” троечников равно $n_3 - (n_{13} + n_{23}) + n_{123} = 13 - (8 + 7) + 3 = 1$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеется 10 билетов денежно-вещевой лотереи и 15 билетов художественной лотереи. Сколькими способами можно выбрать один лотерейный билет?

Ответ: 25.

2. Сколькими способами можно подарить сувенир из имеющихся 6 авторучек, 7 репродукций картин и 3 альбомов?

Ответ: 16.

3. В городе работают 4 музея, 3 театра и 10 кинотеатров. Сколько вариантов для организации культпохода в воскресенье?

Ответ: 17.

4. Сколько существует вариантов поездки к морю, если туда можно добраться тремя авиарейсами, пятью автодорогами или по железной дороге?

Ответ: 9.

5. Сколькими способами можно купить один пирожок, если в продаже 7 пирожков с мясом, 10 пирожков с повидлом и 12 пирожков с капустой?

Ответ: 29.

6. В отделе НИИ работают несколько сотрудников, знающих хотя бы один иностранный язык. Из них 6 человек знают английский, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 - английский и немецкий, 3 - французский и немецкий, 2 - французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?

Ответ: 11, 1, 4.

7. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: “В классе учатся 45 человек, в том числе 25 мальчиков; 30 учеников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, которые учатся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом ". Докажите, что в этих сведениях есть ошибка.

Ответ: По формуле (1) в классе 47 человек, а по сведениям старосты — 45.

Примечание. *Задачи 6 , 7 решить также с помощью кругов Эйлера.*

8. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Ответ: 74.

Указание. *Количество натуральных чисел, делящихся на* m *и не превосходящих* a*, равно целой части* $[\, a/m \,]$ *числа* $\frac{a}{m}$.

9. Сколько чисел среди первых 1000 натуральных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4, ни на 5?

Ответ: 400**.**

10. В корзине лежат 8 различных яблок и 7 различных груш. Сколькими способами можно взять плод из корзины?

Ответ: 15**.**

Правило произведения:

Правило произведения для двух объектов: *Пусть объект* ***a*** *можно выбрать n способами, и после каждого такого выбора объект* ***b*** *можно выбрать m способами. Тогда выбор пары “****a и b****“ в указанном порядке можно осуществить* $n \times m$ *способами.*

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из букв слова "студент"?

Решение. Гласную букву можно выбрать 2-мя способами, согласную можно выбрать 5-ю способами. По правилу произведения выбор " гласной и согласной " можно осуществлять $2 \times 5 = 10$ способами.

Пример 4. Сколько существует двузначных четных чисел в десятичной системе счисления?

Решение. Выбираются две цифры из множества {0,1,2,...,8,9}. Первая цифра может быть любой, кроме нуля. Поэтому ее можно выбрать 9-ю способами. Вторая цифра может быть любой из множества {2,4,6,8,0}, ее можно выбрать 5-ю способами. Следовательно, четных двузначных чисел по правилу произведения будет $n \times m = 45$, где $n = 9$, $m = 5$.

Правило произведения является следствием ***теоремы о мощности прямого произведения конечного числа конечных множеств.*** В случае произвольного числа объектов оно формулируется следующим образом: *Если объект* $\boldsymbol{a_1}$ *можно выбрать* n_1 *способами, объект* $\boldsymbol{a_2}$ *-* n_2 *способами,..., объект* $\boldsymbol{a_k}$ *-* n_k *способами, то общее число полученных таким образом упорядоченных наборов* $(\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_k})$ *можно выбрать* $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ *способами.*

Если требуется выполнить одно за другим одновременно k действий, на одно из которых наложено ограничение, то подсчет числа возможных комбинаций удобнее начинать с выполнения именно этого действия.

Пример 5. В микроавтобусе 10 мест, одно из которых - место водителя. Сколькими способами могут сесть в автобус 10 человек, если место водителя могут занять только трое из них.

Решение. Начнем с места водителя. Имеется $n_1 = 3$ способа занять его место. Следующее место может занять любой из девяти оставшихся человек, т.е. $n_2 = 9$ и т. д. По правилу произведения получаем всего возможностей

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_{10} = 3\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3\times9!.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

11. Сколько существует двузначных чисел в 10-ной системе счисления, в которых нет одинаковых цифр?

Ответ: 81.

12. Сколько существует нечётных трехзначных чисел?

Ответ: 450.

13. На ферме есть 20 овец и 24 козы. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

Ответ: 480, 437.

14. Сколькими способами можно выбрать по одному экземпляру каждого учебника, если имеется 3 экземпляра учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 10 экземпляров учебника информатики?

Ответ: 210.

15. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом?
16. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Ответ: 20.

17. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова "здание"? Из слова "кабинет"?

Ответ: 9.

18. В корзине лежат 12 яблок и 10 груш. Сын выбирает из нее яблоко или грушу, после чего дочь берет и яблоко, и грушу. В каком случае дочь имеет большую свободу выбора: если сын взял яблоко или если он взял грушу?

Ответ: Если сын выбрал яблоко.

19. Сколькими способами можно совершить круговой рейс из А в В и обратно, если на обратном пути выбирать новую дорогу и известно, что А

и В соединены семью дорогами?

Ответ: 42.

20. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300?

Ответ: 26820600.

2.2. Упорядоченные и неупорядоченные выборки

Понятие выборки

Известно, что k-выборка из некоторого множества представляет собой комбинацию из *к* элементов этого множества. Выборки, в которых все элементы различны, называют ***выборками без повторений***, в отличие от ***выборок с повторениями***, в которые могут входить одинаковые элементы.

Выборка называется ***упорядоченной,*** если существенным является не только состав элементов в ней, но и порядок их расположения. Две упорядоченные k-выборки считаются различными, если они отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения. Например, упорядоченные выборки (1,2) и (2,1) считаются различными, хотя и составлены из одних и тех же элементов.

Выборка называется ***неупорядоченной,*** если порядок следования элементов в ней не существенен. Так, {1,2} и {2,1} считаются одной и той же неупорядоченной выборкой.

Фигурные и круглые скобки подчеркивают отличие неупорядоченной выборки от упорядоченной.

Пример 6. **С**оставьте всевозможные 2-выборки из элементов множества M={a,Ь,c}.

Решение. (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b) - это упорядоченные 2-выборки без повторений. Их, очевидно, всего 6.

(a,a); (a,b); (a,c); (b,b); (b,a); (b,c); (c,c); (c,a); (c,b) – упорядоченные 2-выборки с повторениями. Их всего 9.

{a,b}, {a,c}, {b,c} - неупорядоченные выборки без повторений. Легко видеть, что их всего 3.

[a,b]; [a,a]; [a,c]; [b,b]; [b,c]; [c,c] – неупорядоченные выборки с повторениями. Их всего 6.

В следующих параграфах будут даны формулы для подсчета количества k-выборок из n элементов.

задачи и Упражнения

1. Из ящика с 70 разными шарами вынимается 5 шаров? Какого типа 5-выборка? Ответ обосновать.

   Ответ: Неупорядоченная без повторения.

2. Какого типа 7-выборка при совершении покупки семи пирожных; если в магазине имеется четыре их сорта?

   Ответ: Неупорядоченная с повторениями.

3. На шахматной доске расставлены: а) 8 одинаковых фигур; б) 8 различных фигур. К какому типу относятся 8-выборки в случаях а) и б)?

   Ответ: а) Неупорядоченная с повторениями.
   б) Упорядоченная без повторений.

4. Какого типа 4-выборки, если выбираются из 10 претендентов:

   а) четыре кандидата на конференцию?

   б) президент, вице-президент, казначей и ученый секретарь научного общества?

   Ответ: а) Неупорядоченная без повторений.
   б) Упорядоченная с повторениями.

5. Переставляются буквы слов: а) ”март”, б) “мама”. Сколько получится различных перестановок? Перечислите их. К какому типу выборки можно отнести эти комбинации букв?

   Ответ: Упорядоченные.

6. Из множества цифр {0,1,2,...,9} составляются различные наборы чисел по пять цифр в каждом. Какого типа выборки представляют собой пятизначные числа?
7. Составляются слова длины 4 из 32 букв русского алфавита так, что две соседние буквы этих слов различны. Какого характера эти выборки? Найти число таких наборов слов.
8. Сколько можно составить слов длины k из 32 букв русского алфавита? Рассмотреть случай k = 2, 3, 4.

   Ответ: Упорядоченные с повторениями.
   1024 при k=2; 32768 при k=34;

32^4 при k=4.

9. Из множества A = {a, b, c, d} составить:

а) упорядоченные 2-выборки без повторений;

б) неупорядоченные 2-выборки без повторений.

Сколько их всего может быть?

Ответ: а) 12; б) 6.

При решении комбинаторных задач, в которых требуется определить количество некоторых выборок (комбинаций) из данного множества элементов, основным моментом является правильное определение типа (характера) выборок — упорядоченные это выборки или нет, с повторениями или без повторений.

Комбинациям, которые встречаются в этих задачах, присвоены особые названия — размещения, сочетания и перестановки.

Размещения без повторений и с повторениями

Размещениями без повторений из *n* элементов по *k* называются упорядоченные k-выборки из *n* элементов без повторений. Их число обозначается A_n^k и вычисляется по формуле :

$$A_n^k = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},\ k \le n. \qquad (2)$$

Обычно размещения без повторений из n элементов по n называются ***перестановками*** из n элементов. Их число обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n! \qquad (3)$$

Пример 7. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов?

Решение. Нужно найти число 3-выборок из 5 элементов без повторений (все цвета различны); порядок, в котором располагаются выбранные цвета, существенен. Следовательно, нужно найти число упорядоченных выборок, т.е. число размещений из 5 по 3 без повторений. По формуле (2) имеем

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5\times4\times3 = 60 \text{ (способов)}.$$

Заметим, что эту задачу можно решить иначе. Для выбора цвета первой полосы имеется 5 вариантов. После произведенного выбора цвет для второй полосы можно выбрать 4-мя способами из 4-х оставшихся. Далее выбираем цвет для третьей полосы флага из имеющихся 3-х цветов. Это можно сделать 3-мя способами. По правилу произведения всего имеем

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (способов)}$$

.

Пример 8. Та же задача из примера 7, но среди полос одна обязательно должна быть красной.

Решение. Красную полосу можно расположить 3-мя способами, т.к. флаг трехполосный. После выбора красной полосы, остался материал 4-х цветов, из которых нужно выбрать два цвета. Этот выбор можно осуществить

$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$ (способами) , так как 2-выборки упорядоченные без повторений. По правилу произведения окончательно имеем $3 \times A_4^2 = 36$ (способов).

Пример 9. Сколькими способами можно поставить в ряд 5 человек для фотоснимка?

Решение. Ряд из пяти человек можно рассматривать как упорядоченную выборку из 5-ти элементов по 5. По формуле (3) имеем $P_5 = A_5^5 = 5! = 120$ (способов).

Размещениями с повторениями из *n* элементов по *к* называются упорядоченные k-выборки из *n* элементов с повторениями. Их число обозначается $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A_n^k} = n^k, \ \forall n, k \in N \qquad (4)$$

Пример 10. В одной из первых поколений ЭВМ "Стрела" ОЗУ имело 2048 ячеек, каждая ячейка состояла из 43 разрядов. Какое максимальное количество различных чисел в двоичной системе счисление можно было поместить в ОЗУ?

Решение. В любой ячейке информация (число) представлялась в виде двоичного, т. е. состоящего из 0 и 1, упорядоченного набора длины 43. Всего мест для 0 и 1 равно k = 2048×43=88064. Таким образом, имеем упорядоченные k-выборки из n = 2 с повторениями. Их число находим по формуле (4) : $\overline{A_2^k} = 2^k$, где k = 88064.

10. В забеге участвуют 5 человек. Сколькими способами могут распределиться 2 первых места?

Ответ: 31.

11. Сколькими способами могут 7 человек встать в очередь за билетами в театральной кассе?

Ответ: 7!.

12. Сколькими различными способами 2 друга могут одновременно посетить кого-либо из своих общих трёх знакомых?

Ответ: 9.

13. Сколько существует различных наборов длины 10 из нулей и единиц?

Ответ: 1024.

14. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова наибольшая численность этого государства?

Ответ: 2^{32}.

15. Абитуриенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день можно сдавать только один экзамен?

Ответ: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

16. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто не получил оценки "неудовлетворительно"?

Ответ: 81.

17. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из пяти языков на любой другой из этих пяти языков? На сколько больше словарей надо издать, если число различных языков равно 10?

Ответ: 20; 70.

18. Сколько существует различных пятизначных чётных чисел, которые начинаются цифрой "2" и оканчиваются цифрой "4", если используются цифры 1,2,3,4,5?

Ответ: P_3=3!.

19. Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

Ответ: 125.

20. В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 разные чаш-

ки, 5 разных блюдец и 6 разных чайных ложек. Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый студент получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Ответ: 172800.

Сочетания без повторений и с повторениями

Сочетаниями без повторений из n элементов по $к$ называются неупорядоченные k-выборки из n элементов без повторений. Их число обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \le n \tag{5}$$

Сочетания из n по k без повторений образуют k-элементарные подмножества исходного множества мощности n. Числа C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами.***

Пример 11. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

Решение. Очевидно, что нужно подсчитать число 3-выборок из 5 элементов, причем по условию задачи понятно, что среди выбранных элементов не должно быть одинаковых и что порядок расположения выбранных красок не существенен. Значит, нужно найти число неупорядоченных выборок, т.е. число сочетаний без повторений из 5 по 3. По формуле (5) имеем:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 5 \times \frac{4}{2!} = 10.$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по $к$ называются неупорядоченные k-выборки из n элементов с повторениями. Их число обозначается H_n^k и вычисляется по формуле

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},\ \forall n, k \in N \tag{6}$$

Пример 12. В киоске имеются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить: а) 5 открыток? б) 5 разных открыток? в) 15 открыток с повторениями?

Решение. В случаях а) и в) нас интересуют неупорядоченные выборки из 10 элементов с повторениями длины 5 и 15 соответственно. Их число определяется по формуле (6):

а) $H_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \dfrac{14!}{5!\,(14-5)!} = \dfrac{14\times13\times12\times11\times10}{5!}$ =2002 (способа);

в) $H_{10}^{15} = C_{10+15-1}^{15} = C_{24}^{15} = \dfrac{24!}{15!\,(24-15)!} = \dfrac{24!}{15!9!}$ (способов);

В случае б) нужно подсчитать число неупорядоченных 5-выборок из 10 элементов без повторений (все открытки разные). Их число определяется по формуле (*5*) : $C_{10}^{5} = \dfrac{10!}{5!5!}$ = 252 (способа).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

21. Из 20 студентов надо назначить 5 дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 15504.

22. Сколькими способами можно составить бригаду из четырёх плотников, если имеются предложения от 10 человек?

Ответ: 210.

23. Сколькими способами пять девушек и трое юношей могут разбиться на две команды по четыре человека в команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

Ответ: $3\times C_{5}^{3}$.

24. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в комнаты, каждая из которых рассчитана на трёх человек?

Ответ: 81.

25. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Ответ: $\dfrac{11!}{8!\,3!}$.

26. Сколько различных подмножеств из трех элементов имеет множество А={1, 2, 3, 4, 5}; В={*, «,0, 1}?

Ответ: 10; 4.

27. Сколькими способами из трех спортивных обществ, насчитывающих соответственно 40, 40 и 60 человек, можно выбрать команды по 5 человек для участия в соревнованиях?

Ответ: $C_{40}^{5}\times C_{40}^{5}\times C_{60}^{5}$.

28. Из группы в 20 человек каждую ночь выделяется наряд из трех человек. Сколько существует вариантов составления наряда?

Ответ: 1040.

29. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 371.

30. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

Ответ: $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$.

31. Найти натуральное число n, удовлетворяющее уравнению

$$C_n^5 = 2C_{n-1}^5.$$

Ответ: $n = 10$.

32. Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (k=1…n);

б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;

в) $C_n^k \times C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \times C_n^m$;

г) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

д) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

е) $\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1}$.

Перестановки. Подсчет числа беспорядков

Перестановки с повторениями. Рассмотрим задачу: Имеются предметы κ различных видов. Сколько различных комбинаций (перестановок) можно сделать из n_1 предметов 1-ого вида, n_2 предметов 2-ого вида,..., n_k предметов k-ого вида? Число предметов в каждой перестановке $n=n_1+n_2+...+n_k$. Такие комбинации называются ***перестановками с повторениями.*** Их число обозначается $P(n_1,n_2,...,n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P(n_1,n_2,...,n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \qquad (7)$$

Пример 13. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных, 4 белых и 3 красных фишки?

Решение. Эта задача на перестановки с повторениями. Имеем фишки 3-х различных видов: чёрных n_1=5, белых n_2=4 и красных n_3=3. Всего фишек n=12. Следовательно, по формуле (7) имеем P(5,4,3)= $\frac{12!}{5!4!3!}$ = 27720 (способов).

Замечание 1. Для решения данной задачи можно было применить рассуждения, подобные выводу формулы для числа сочетаний: Занумеруем чёрные фишки числами 1,2,3,4,5; белые - числами 6,7,8, 9; красные - числами 10,11,12. Имеем всего 12 предметов, которые можно расположить в ряд 12! способами. Но все расположения фишек не меняются при всех перестановках фишек с номерами 1-5 (все они одного вида), с номерами 6-9 и с номерами 10-12. Поэтому число различных расположений равно $\frac{12!}{5!4!3!}$.

Замечание 2. Если $n_1 = \kappa$, $n_2 = n - \kappa$, то имеем

$$P(k,n-k)= C_n^k .$$

Циклические перестановки. Рассмотрим **задачу**: Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение. Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! способов перестановок в ряду. Но так как они кружатся, то их положение относительно окружающих предметов несущественно, а важно только их взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении (циклическом сдвиге), нужно считать одинаковыми. Так как из каждой перестановки циклическим сдвигом можно получить ещё 6 новых, то количество интересующих нас перестановок (7!) : 7=6!.

Эту задачу можно обобщить так. Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми перестановки, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок (n-1)!.

Подсчёт числа беспорядков. Это так называемая задача “о числе беспорядков”. Число $\overline{N}$ перестановок из цифр {1, 2, …,n} таких, что никакая цифра не остаётся на своём месте, можно найти по следующей формуле:

$$\overline{N} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \qquad (8)$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

33. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Ответ: 5040.

34. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причём первый и третий должны написать по 5 глав, второй — 4 главы, а четвёртый — 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

Ответ: $\dfrac{17!}{5!\,5!\,4!\,3!}$.

35. Сколько существует перестановок элементов 1, 2,...,n , в которых элемент 1 находится не на своём месте?

Ответ: $(n-1)(n-1)!$.

36. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров?

Ответ: 300.

37. Сколько различных браслетов можно сделать из четырёх одинаковых рубинов, пяти одинаковых сапфиров и шести одинаковых изумрудов, если в браслете должны быть все 15 камней? Сколькими способами можно из этих камней выбрать три камня для кольца?

Ответ: $\dfrac{P(4,5,6)}{30}$; $3+2C_3^1+1=10$.

38. Сколькими способами можно разбить $(n+m+p)$ предметов на три группы так, чтобы в одной было n, в другой m, а в третьей p предметов?

Ответ: $\dfrac{(n+m+p)!}{n!\,m!\,p!}$.

39. Сколькими способами можно переставить буквы в слове

а) "космос"? б) "тартар"?

Ответ: а) 180; б) 90.

40. Сколькими способами можно переставить цифры числа

а) 12341234? б) 12345234?

Ответ: а) $21\times 5!$; б) P(1,2,2,2,1).

41. Сколько существует вариантов того, что три человека, сдавшие свои шляпы в гардероб, не получат в точности свою шляпу?

Ответ: $\overline{N}=2$.

42. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. Предполагая, что шляпы возвращаются наугад, найти число случаев и вероятность того, что в

точности k человек получат свои шляпы. Рассмотреть все значения k (k = 0, 1, 2, 3, 4).

Ответ: Имеем 9, 8, 6, 0, 1 случаев с вероятностями $\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{24}$ соответственно..

Замечание. Вероятность равна числу $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число комбинаций, m - число "благоприятных" комбинаций.

2.3 Формула включений и исключений

Пусть имеется N предметов и n свойств $a_1, a_2, \dots, a_n$. Каждый из рассматриваемых предметов может обладать одним или несколькими из этих n свойств. Обозначим через $N(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is})$ число предметов, обладающих свойствами $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}$ (и, быть может, некоторыми другими), а через $N(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ - число предметов, не обладающих свойствами $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}$.

Например, $N(a_1, a_3, \bar{a}_4)$ – число предметов, обладающих свойствами a_1, a_3, но не обладающих свойством a_4.

Справедлива формула

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = N - N(a_1) - N(a_2) - \dots - N(a_n) + N(a_1, a_2) + \\ + N(a_1, a_3) + \dots + N(a_1, a_n) + \dots + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - \dots - \\ - N(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \dots + (-1)^n N(a_1, a_2, \dots, a_n). \qquad (9)$$

Формула (9) называется ***формулой включений и исключений.*** Здесь слагаемые включают все комбинации свойств $a_1, a_2, \dots, a_n$ без учёта их порядка; знак “+” ставится, если число учитываемых свойств чётно, и знак “ - “ , если это число нечётно.

Пример 14. В результате опроса 70 студентов выяснилось, что 45 из них занимаются спортом, 29 — музыкой, 9 — и спортом и музыкой. Сколько студентов из числа опрошенных не занимаются ни спортом, ни музыкой.

Решение. Чтобы применить формулу (9), обозначим через $a_1(a_2)$- свойство студента, состоящее в том, что он занимается спортом (музыкой). Тогда имеем $N=70$, $N(a_1)=45$, $N(a_2)=29$, $N(a_1,a_2)=9$. Нужно найти число $N(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$. По формуле (9) получаем

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1, a_2) = 70 - 45 - 29 + 9 = 5.$$

Предположим теперь, что число $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ зависит не от самых этих свойств, а лишь от их числа.

Введём следующие обозначения : $N^{(0)} = N$, $N^{(1)} = N(a_1) = \dots = N(a_n)$,

$N^{(2)} = N(a_1, a_2) = \ldots = N(a_{n-1}, a_n), \ \ldots, \ N^{(k)} = N(a_1, \ldots, a_k) = \ldots = N(a_{n-k+1}, \ldots, a_n)$,

$N^{(n)} = N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\overline{N} = N(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$.

Тогда формула (9) примет вид:

$$\overline{N} = N^{(0)} - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \ldots + (-1)^n C_n^n N^{(n)},$$

или

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k N^{(k)} \qquad (10)$$

Очевидно, формула (10) есть частный случай формулы (9).

Пример 15. Пусть имеется *n* карточек, пронумерованных от 1 до *n*. Сколькими способами можно расположить их в ряду так, чтобы ни для какого i ($1 \le i \le n$) карточка с номером i не занимала бы i-ого места?

Решение. Число всевозможных расположений (перестановок) n карточек в ряд равно $P_n = n! = N^{(0)}$. Обозначим через a_i свойство: “i-ая карточка занимает место с номером i (i = 1, 2, … , n)”. Тогда $N(a_i) = N^{(1)} = P_{n-1} = (n-1)!$ – число перестановок всех карточек в ряду, кроме i-ой ,которая остаётся на i-ом месте; $N(a_i, a_j) = N^{(2)} = P_{n-2} = (n-2)!$ – число перестановок всех карточек в ряду, кроме двух карточек с номерами i и j, остающихся на месте, т. е. на i-ом и j-ом местах, и т. д. $N(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}) = N^{(k)} = P_{n-k} = (n-k)!$ – число расположений, при которых карточка с номером i_s занимает “своё” место i_s ($s = \overline{1,k}$). По формуле (10) получаем, что искомое число $\overline{N}$ равно

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Заметим, что полученное число способов располагаться любой i-ой карточки не на i-ом месте согласуется с формулой "числа беспорядков" (см. (8) на стр. 41).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читает журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журналы А и В, 20% - журналы В и С, 40% - журналы А и С, 10% - журналы А, В и С. Какой процент студентов: а) не читает ни одного из этих журналов? б) читает в точности два журнала? в) читает только один журнал В? Задачу решить двумя способами (с помощью формулы (9) и кругов Эйлера).

Ответ: а) 20%; б) 60%.

2. При опросе 13 человек, каждый из которых знает по крайней мере один иностранный язык, выяснилось, что 10 человек знают английский язык, 7 -немецкий, 6 - испанский, 5 - английский и немецкий, 4 - английский и испанский, 3 - немецкий и испанский. Сколько человек знают: а) все три языка? б) ровно два языка? в) только английский язык?

   Ответ: 2, 6, 3.

3. На экскурсию поехало 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром - 38 человек, с ветчиной - 42 человека; и с сыром и с колбасой - 28 человек, и с колбасой и с ветчиной – 31 человек, и с сыром и с ветчиной - 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек. Несколько человек вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

   Ответ: 25 человек.

4. Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7?

   Ответ: 457.

5. Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 15и10?

   Ответ: 734.

6. Показать, что если $n=30m$, то количество натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15, равно $22m$.
7. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших миллиона, состоит только из цифр 1, 2, 3, 4?

2.4 Задачи с ограничениями

Рассмотрим в данном параграфе комбинаторные задачи сначала с ***ограничениями на порядок элементов***, когда на порядок элементов накладываются некоторые дополнительные условия. В таких задачах удобно применять метод – ***объединение нескольких одинаковых элементов в блоки***.

Далее рассмотрим задачи ***на разбиения***, где требуется разделить элементы на две или более групп в соответствии с некоторыми условиями, и требуется найти число всевозможных различных способов раздела. При этом необходимо учитывать, существенен ли порядок элементов в группах, различаем ли мы элементы, входящие в группы, и сами группы и т. д. При решении этих задач обычно элементы располагают в ряд и применяют так называемый ***метод введения перегородок.***

Пример 16. Имеются предметы k сортов : n_1 предметов одного сорта, n_2 предметов другого сорта, … , n_k предметов k-ого сорта, где все предметы одного сорта всё же различны друг от друга. Найти число перестановок этих предметов, в которых все предметы одного и того же сорта стоят рядом.

Решение. Из данных k сортов (блоков) можно сделать $P_k=k!$ перестановок. Но ещё можно переставлять предметы внутри блоков $n_1!$, $n_2!$, … , $n_k!$ способами. Далее по правилу произведения имеем $n_1!n_2!\ldots n_k!k!$ перестановок.

Пример 17. Сколькими способами можно переставить буквы слова “перемет” так, чтобы три буквы “е” не шли подряд?

Решение. Объединим все буквы “е” в блок “еее”. Число перестановок, в которых все три буквы “е” идут подряд, равно числу перестановок из 5-ти объектов : “еее”, “п”, “м”, “р”, “т”, т. е. $P_5=5!$ Всего же перестановок с повторениями из букв данного слова можно составить $P(3,1,1,1,1)=840$. Значит, искомое число перестановок, где три буквы “е” не идут рядом равно N = 840 -- 120 = 720 (способов).

Пример 18. Сколькими способами можно расставить m нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

Решение. Выпишем сначала m нулей. Для единиц получается (m+1) место (одно впереди, (m-1) в промежутках между нулями и одно сзади). На любые из этих (m+1) мест можно поставить одну из k единиц. Это можно осуществить C_{m+1}^{k} способами, причём $k \le m+1$.

Пример 19. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Решение. Зашифруем каждый выбор книг последовательностью из нулей и единиц следующим образом : каждой оставленной книге сопоставим 0, а каждой взятой – 1. В результате получим последовательность из 5 единиц и 7 нулей, причём в последовательности не будет двух подряд идущих единиц (так как нельзя по условию брать две рядом стоящие книги). Имеем неупорядоченную 5-выборку из 8 (см. пример 18). Следовательно, всего будет C_8^5 = 56 (способов).

Пример 20. Найти число способов разбиения n одинаковых предметов по m урнам.

Решение. Перенумеруем урны, расположив их в ряд. Между ними будет (m-1) промежуток. Поставим в соответствие каждому разбиению предметов по урнам последовательность из нулей и единиц следующим образом: сначала последовательность имеет группу из нулей, число которых равно числу предметов в первой урне, затем ставим 1 (перегородку); далее – столько нулей, сколько предметов во второй урне и опять ставим 1; затем столько нулей, сколько в третьей урне и т. д. Заканчивается последовательность группой нулей; их столько, сколько предметов в последней урне. Следовательно, в последовательности будет n нулей и (m-1) единиц, всего (n+m-1) цифр. Тогда всего способов разбиения будет равно C_{n+m-1}^{m-1}. Заметим, что $C_{n+m-1}^{m-1} = H_m^n$ (уметь доказать).

Пример 21. Комиссия состоит из 9 человек. Документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их распределить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся вместе не менее 6 человек комиссии?

Решение. Какие бы 5 членов комиссии не собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется у каждого из 4 остальных членов комиссии (появление кого-нибудь из которых даёт возможность открыть сейф). Следовательно, число замков равно C_9^5 =126; число ключей равно $C_9^5 \times 4$=504.

Замечание. В общем случае число замков равно C_n^{m-1}; число ключей к этим замкам равно (n-m+1) C_n^{m-1}, где n – число членов комиссии, m – наименьшее число членов, при которых возможен доступ к сейфу, при условии m ≤ n + 1.

Пример 22. Сколькими способами можно расставить в шеренгу 5 львов и 4 тигра так, чтобы никакие два тигра не шли друг за другом?

Решение. Расставим сначала всех львов, оставив между каждыми двумя львами промежуток. Это можно сделать P_5 способами. Теперь для расстановки тигров имеется 6 мест (либо одно впереди всех львов, либо одно после них, либо между ними – четыре). Так как порядок тигров существенен (все тигры разные), то число способов их расстановки равно A_6^4. Общее число способов расстановки хищников получим по правилу произведения $P_5 \times A_6^4 = 43200$.

Замечание. Если бы в задаче было n львов и m тигров, то общее число способов было равно $P_n \times A_{n+1}^m$ при условии, что $m \le n+1$ – иначе два тигра обязательно окажутся рядом.

2.5 Разные задачи

1. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и чёрный? А если нет ограничения на цвет квадратов?

   Ответ: 1042; 4032.

2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

   Ответ: 32×24.

3. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? А если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой “1”?

   Ответ: 480.

4. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 карты) по одной карте каждой масти?

   Ответ: 13^4.

5. В магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева “Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? Та же задача, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят романы “Рудин” и “Отцы и дети”.

   Ответ: 134; 143.

6. Возможно ли равенство $P_n = 36\, A_{n-1}^2$ и если да, то при каких n?

Ответ: Да, при $n = 6$.

7. Сколькими способами могут 4 человека разместиться в четырёхместном купе железнодорожного вагона?

Ответ: 24.

8. Найти число простых чисел, не превосходящих 250.

Ответ: 53.

9. У одного человека есть 7 книг, у другого 9.Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого, если все книги различны? Та же задача, но меняются две книги одного на две книги другого.

Ответ: 63; 756.

10. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 27 букв русского алфавита.

Ответ: 33820×10^4.

11. Сколькими способами можно составить список из 7 студентов?

Ответ: 5040.

12. Из спортклуба, насчитывающего 30 человек, надо выбрать команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А если нужно выбрать команду из четырех человек для участия в эстафете 100+200+400+800?

Ответ: 27405; 657720.

13. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из семи цифр 0, 1, 2,... , 6 , если каждая из них может повторяться несколько раз?

Ответ: 2058.

14. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,6,7,8, если никакую цифру не использовать более одного раза?

Ответ: 6!.

15. На танцевальном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танцев?

Ответ: 17417400.

16. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторение цифр в числах запрещено?

Ответ: $P_5 + A_5^4 + A_5^3 = 300$.

17. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где продаются 11 разных сортов пирожных?

Ответ: H_{11}^{4}.

18. Сколько всего костей домино, если используется для их образования 7 цифр 0,1,2,3,4,5,6. Ответ обосновать.

Ответ: 28, так как кости домино можно рассматривать как неупорядоченные 2-выборки из 7-и цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 с повторениями;

19. В группе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок,11 - физический;10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учащихся посещают оба кружка? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Ответ: 6; 14.

20. Изучаются 10 учебных предметов. В понедельник надо поставить 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Ответ: 151200.

21. Сколькими способами читатель может выбрать 3 разные книги из пяти?

Ответ: 10.

22. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "тик-так" чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом? То же самое для слова "тартар".

Ответ: 84; 30.

23. Сколько целых чисел от 0 до 999,которые не делятся ни на 2,ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Ответ: 228.

24. Сколькими способами можно переставить числа 12341234 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

Ответ: 864.

25. Сколькими способами можно переставить числа 12345254 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом.

Ответ: 2230.

26. Сколько разных слов можно составить, переставляя буквы в слове "мама"? Напишите эти слова.

Ответ: 6.

27. В комнате n лампочек. Сколько всего разных способов освещения комнаты, при которых горит ровно k лампочек? Сколько всего может быть различных способов освещения данной комнаты?

28. Сколькими способами можно разместить на полке 4 разные книги?

Ответ: 24.

29. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

Ответ: $(n-2)(n-1)!$

Решение: Данные два элемента, например «a» и «b», будем считать за один элемент «ab». Тогда имеем $(n-1)$ элементов, которые можно переставить $(n-1)!$ способами. Если же имеем элемент «ba», то имеем так же $(n-1)!$ способов перестановки $(n-1)$ элементов. Следовательно, число перестановок, в которых «a» и «b» стоят рядом, равно $2(n-1)!$. Всего $n!$ перестановок. Тогда искомое число перестановок равно $n!-2(n-1)!$.

30. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

Ответ: 303600.

31. Студенту надо сдать 4 зачёта за 8 дней. Сколькими способами можно это сделать? А если последний зачёт обязательно сдавать на восьмой день?

Ответ: 1680; 840.

32. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглый стол?

33. На собрании должны выступать 4 человека А,В,С,Д. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если В не может выступать до того момента, пока не выступит А?

Ответ: $3\times 3!$.

34. Определить число всех плохих дней, если 12 дней шел дождь, 8 дней дул ветер, 4 дня было холодно, причем 5 дней были и дождливы и ветрены , 3 дня дождливы и холодны , 2 дня ветреных и холодных, 1 день дождливый, ветреный и холодный, а хороших дней не было за данный период.

Ответ: 15.

35. Сколько натуральных чисел в n-ой системе счисления можно записать k знаками?

Ответ: $(n-1)\times n^{k-1}$, так как имеем упорядоченные k-выборки с повторениями из n элементов множества $A=\{0,1,2,\dots,n-1\}$.

36. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного кода, составленного из 5 цифр и подбирающего его наудачу?

Ответ: $\overline{A}_{10}^{5}-1$, так как имеем упорядоченную 5-выборку с повторениями из 10-ти элементов, из них одна 5-выборка удачная, ограничений нет.

37. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

Ответ: 1800.

38. Сколько пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

Ответ: 5^5.

39. Сколькими способами можно сфотографировать 4 танкистов, 4 летчиков и 2 артиллеристов, поставив их в один ряд так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом?

Ответ: 6912.

40. Сколько различных слов получится в результате перестановки букв в слове а) "математика" , б) "комбинаторика"?

Ответ: $P(2,3,2,1,1,1)=151200$.

41. Сколько слов можно составить из 12 букв : четырех букв "а" , четырех букв "б", двух букв "в" и двух букв "г"?

Ответ: $P(4,4,2,2)=207900$.

42. Сколькими способами можно распределить n предметов среди k лиц?

Ответ: n^k

Решение: Перенумеруем все k предметов. Имеем упорядоченную k-выборку из множества $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, так как всего n лиц, среди которых распределяются предметы.

43. Из цифр 1,2,3,4 составить неупорядоченные 2-выборки с повторениями. Сколько всего их? Перечислите.

Ответ: 10.

44. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры ,и гуси, и утки?

Ответ: 315.

45. Сколькими способами можно сервировать стол на четверых человек, если имеется 6 разных тарелок,8 разных вилок и 7 разных ножей?

46. Сколько существует всего двузначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,...,9?

Ответ: 90.

47. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших миллиона, состоит только из цифр 1,2,3,4?

Ответ: $C_n^m - C_{n-2}^{m-2}$.

48. Сколько существует сочетаний из элементов 1,2,...,n по m (2<m<n), которые не содержат вместе элементы 1 и 2?

49. Определить количество способов разбить n различных предметов на k различных групп, при котором допускаются пустые группы.

Ответ: k^n.

50. Определить количество способов разбиения n различных предметов на k различных групп (при этом существенен порядок элементов в группе).

Ответ: A_{n+k-1}^{k-1}.

51. Определить количество способов распределения n предметов на k групп: чтобы в 1-ой группе содержалось n_1 предметов, во второй группе - n_2 предметов, … , в k-ой группе - n_k предметов; порядок групп существенен, а порядок элементов внутри группы не играет роли.

Ответ: $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

52. Та же задача, но порядок порядок групп не играет роли.

Ответ: $\frac{n!}{k!\,n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

53. Распределить n предметов на k групп, причём все группы не пустые.

Ответ: C_{n-1}^{k-1}.

54. Определить количество способов разбиения n одинаковых предметов на k групп, при которых допускаются пустые группы.

Ответ: C_{n+k-1}^{k-1}.

55. Та же задача, но каждая группа содержит не менее r предметов.

Ответ: C_{n-rk+k}^{k-1}.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении многих комбинаторных задач часто пользуются методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. ***Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений.*** Пользуясь рекуррентными соотношениями, можно свести задачу об n предметах к задаче об $n-1$ предметах, потом к задаче об $n-2$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить.

В книге "Liber Abaci" итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привел следующую: пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будет $F(n)$ и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, то есть еще $F(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Так как по условию $F(0)=1$ и $F(1)=2$, то последовательно находим

$$F(2)=3, \quad F(3)=5, \quad F(4)=8 \text{ и т.д.}$$

Числа $F(n)$ ***называются числами Фибоначчи***.

3.1 Решение рекуррентных соотношений

Будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Например,

$$f(n+2) = f(n)f(n+1) - 3f^2(n+1) + 1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n+3) = 6f(n)f(n+2) + f(n+1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k-го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первые k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно — между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно — элемент $f(k+1)$ выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1),\ldots,f(k)$, элемент $f(k+2)$ — через $f(2),\ldots,f(k+1)$ и т.д.

Будем говорить, что некоторая последовательность является ***решением*** данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется. Например, последовательность

$$2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$$

является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n)=2^n$. Значит, $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$. Но при любом n имеет место тождество $2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n$. Поэтому 2^n является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения k-го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1,\ldots,C_k$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \tag{1}$$

общим решением будет

$$f(n)=C_1 2^n+C_2 3^n. \tag{2}$$

В самом деле, легко проверить, что последовательность обращает соотношение в тождество. Поэтому нам надо только показать, что любое решение нашего соотношения можно представить в виде (2). Но любое решение соотношения (1) однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Пусть $f(1)=a,\quad f(2)=b$. Поэтому нам надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения C_1 и C_2, что

$$2C_1+3C_2=a$$

и

$$2^2C_1+3^2C_2=b.$$

Но легко видеть, что при любых значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases}2C_1+3C_2=a,\\4C_1+9C_2=b\end{cases}$$

имеет решение. Поэтому (2) действительно является общим решение соотношения (1).

3.2 Линейные рекуррентные соотношения

с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил не существует. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемых единообразным методом. Это – рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - некоторые числа. Такие соотношения называются ***линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.***

Рассмотрим, как решаются такие соотношения при $k=2$, то есть изучим соотношения вида

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \qquad (3)$$

Решение этих соотношений основано на следующих двух утверждениях:

1) Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (3), то при любых A и B последовательность $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ также является решением этого соотношения. В самом деле, по условию имеем

$$f_1(n+2) = a_1 f_1(n+1) + a_2 f_1(n)$$

и

$$f_2(n+2) = a_1 f_2(n+1) + a_2 f_2(n) \;.$$

Умножим эти равенства на A и B соответственно и сложим полученные тождества. Мы получим, что

$$\begin{aligned} Af_1(n+2) + Bf_2(n+2) &= a_1 [Af_1(n+1) + Bf_2(n+1)] + \\ &+ a_2 [Af_1(n) + Bf(n)] \end{aligned}.$$

Это означает, что $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ является решением нашего соотношения.

2) Если число r_1 является корнем квадратного уравнения

$$r^2 = a_1 r + a_2,$$

то последовательность

$$1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^{n-1}, \ldots$$

является решением рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

Наряду с последовательностью $\{r_1^{n-1}\}$ любая последовательность вида

$$f(n) = r_1^{n+m}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

также является решением исследуемого соотношения.

Из утверждений 1) и 2) вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Пусть дано рекуррентное соотношение

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

Составим квадратное уравнение

$$r^2 = a_1 r + a_2, \qquad (4)$$

которое называется характеристическим для данного соотношения. Если это уравнение имеет два различных корня r_1 и r_2, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-2}.$$

Действительно, по утверждению 2) $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = r_2^{n-1}$ являются решениями нашего соотношения. По утверждению 1) и $f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-2}$ является его решением. Надо показать, что любое решение соотношения можно записать в этом виде. Но любое решение линейного рекуррентного соотношения второго порядка определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = b \end{cases}$$

имеет решение при любых a и b. Этими решениями являются

$$C_1 = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2}.$$

Случай, когда оба корня уравнения $r^2 = a_1 r + a_2$ совпадают друг с другом, мы разберем несколько позже. Рассмотрим пример.

При изучении чисел Фибоначчи мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 = r + 1.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.3 Случай равных корней характеристического уравнения

Остановимся теперь на случае, когда оба корня характеристического уравнения совпадают: $r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ уже не будет общим решением. Ведь из-за того, что $r_1 = r_2$, это решение можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2) r_1^{n-1} = C r_1^{n=1}.$$

У нас остается только одно произвольное постоянное C, и выбрать его так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям $f(1) = a, f(2) = b$, вообще говоря, невозможно.

Поэтому надо найти какое-нибудь второе решение отличное от $f_1(n) = r_1^{n-1}$. Оказывается, таким решением является $f_2(n) = n r_1^{n-1}$. В самом деле, если квадратное уравнение $r^2 = a_1 r + a_2$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2$, то по теореме Виета $a_1 = 2r_1, a_2 = -r_1^2$. Поэтому наше уравнение записывается так:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2.$$

Тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n). \qquad (5)$$

Проверим, что $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ действительно является его решением. Имеем $f_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+1}$, а $f_2(n+1) = (n+1) r_1^n$. Подставляя эти значения в соотношение (4), получаем очевидное тождество

$$(n+2) r_1^{n+1} = 2(n+1) r_1^{n+1} - n r_1^{n+1}.$$

Значит, $n r_1^{n-1}$ — решение нашего соотношения.

Теперь уже знаем два решения $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ заданного соотношения. Его общее решение пишется так:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 n r_1^{n-1} = r_r^{n-1}(C_1 + C_2 n).$$

Путем подбора C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \mathbf{K} + a_k f(n).$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \mathbf{K} + a_k.$$

Если все корни $r_1, \mathbf{K}, r_k$ этого алгебраического уравнение k-й степени различны, то общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \mathbf{K} + C_k r_k^{n-1}.$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = \mathbf{K} = r_s$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1},\ f_2(n) = n r_1^{n-1},\ f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \mathbf{K},\ f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}$$

рассматриваемого рекуррентного соотношения. В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \mathbf{K} + C_s n^{s-1}\right].$$

Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение.

Например, решим рекуррентное соотношение

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n).$$

Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0.$$

Решая его, получаем корни

$$r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 2, r_4 = -1.$$

Значит, общее решение нашего соотношения имеет следующий вид:

$$f(n) = 2^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right] + C_4(-1)^{n-1}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения $f(n+2) = 2f(n+1) - 3f(n)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

1) $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases}$

2. Проверить, являются ли данные функции решениями данных рекуррентных соотношений:

1) $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n);$
$j_1(n) = 5 \cdot 2^n,\ j_2(n) = 2n + 1,\ j_3(n) = 3.$

2) $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n);$
$j_1(n) = 2n, j_2(n) = 5 \cdot 3^n - 1,\ j_3(n) = 7$

3. Найти общее решение рекуррентных соотношений:
   1) $f(n+2) - 7f(n+1) + 12f(n) = 0$;
   2) $f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n) = 0$;
   3) $f(n+2) - 4f(n+1) + 13f(n) = 0$;
   4) $f(n+2) + 9f(n) = 0$;
   5) $f(n+2) + 4f(n+1) + 4f(n) = 0;$
   6) $f(n+3) - 9f(n+2) + 26f(n+1) - 24f(n) = 0;$
   7) $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0;$
   8) $f(n+4) + 4f(n) = 0.$

4. Найти $f(n)$, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

1) $f(n+2)-5f(n+1)+6f(n)=0, \quad f(1)=1, f(2)=-7,$
2) $f(n+2)-4f(n+1)+4f(n)=0, \quad f(1)=2, f(2)=4,$
3) $f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0, \quad f(1)=-\frac{1}{4}, f(2)=-\frac{1}{2}.$
4) $f(n+2)=2f(n+1)-f(n); \quad f(1)=2; \quad f(2)=4;$
5) $f(n+2)=4f(n+1)+5f(n); \quad f(1)=1; \quad f(2)=5;$
6) $f(n+2)=6f(n+1)-9f(n); \quad f(1)=0; \quad f(2)=3;$
7) $f(n+2)=2f(n)-f(n+1); \quad f(1)=1; \quad f(2)=2;$
8) $f(n+2)=8f(n+1); \quad f(1)=4;$

5. Привести пример линейного рекуррентного соотношения 2-го порядка, среди решений которого имеются следующие функции:

1) $j(n)=3^n;$ 2) $j(n)=3\cdot 2^n-5^n;$
3) $j(n)=2^n-1;$ 4) $j(n)=n-17;$

6. Найти такую последовательность, что $f(1)=\cos a$, $f(2)=\cos 2a$ и

$$f(n+2)-2\cos a\ f(n+1)+f(n)=0.$$

7. Найти последовательность такую, что

$$f(n+2)+2f(n+1)-8f(n)=2^n.$$

8. Проанализировать рекуррентное соотношение (3), если известно, что один из корней характеристического уравнений (4) равен нулю. Каков порядок этого рекуррентного соотношения? Доказать, что его общее решение в данном случае имеет вид: $j(n,C)=C_1a_1^n$. Что можно сказать о решении рекуррентного соотношения (3), если оба корня характеристического уравнения (4) равны нулю?

9. Последовательность Фибоначчи задается следующим рекуррентным соотношением: $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$ и начальными условиями $F(1)=F(2)=1$. Найти общий член этой последовательности. Выписать первые 10 чисел Фибоначчи. Доказать, что для любых натуральных m и n справедливы соотношения:

1) $F(n+m)=F(n-1)F(m)+F(n)F(m+1)$
2) $F(1)+F(3)+\mathbf{K}+F(2n+1)=F(2n+2)$

3) $1+F(2)+F(4)+\mathbf{K}+F(2n)=F(2n+1)$

Указание: применить метод математической индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. – М., 1997 — 336 с.
2. Комбинаторика: Методические указания к решению задач / Сост. Т.К.Кацаран, Г.Ф.Федотенко. — Воронеж, 1999. — 32с.— № 599.
3. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике / И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. – М., 1995 — 255 с.
4. Лихтарников Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник – практикум / Л.М.Лихтарников, Т.Г.Сукачева.— СПб, 1998. — 288 с.
5. Методические рекомендации к решению задач по дискретной математике и математической логике / Сост. Т.К.Кацаран, Г.Ф.Федотенко. — Воронеж, 1989. — Ч.2 — 32 с.
6. Методические указания для решения задач по курсу Дискретная математика / Сост. Т.В.Азарнова, И.Н.Булгакова — Воронеж, 2000. — 50 с.— № 951
7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / С.В.Яблонский. — М., 2001 — 384с.

При подготовке данного пособия в основу были положены методические рекомендации [2], [5],[6].

СОДЕРЖАНИЕ