Министерство образования Российской Федерации

Воронежский государственный университет

Факультет прикладной математики и механики
Кафедра математических методов исследования операций

Методические указания для решения задач по курсу «Дискретная математика»

для студентов 1 курса дневного и вечернего отделений факультета ПММ

Составители: Азарнова Т.В.
Булгакова И.Н.

Воронеж-2000

Азарнова Т.В., Булгакова И.Н. Методические указания для решения задач по курсу Дискретная математика для студентов 1 курса дневного и вечернего отделений факультета ПММ – Воронеж: Лаб. опер. полиг. ВГУ, 2000. – 50 с.

Данная работа содержит краткое изложение теории множеств, бинарных отношений и комбинаторики, соответствующее курсу лекций по дисциплине Дискретная математика, читаемому на факультете ПММ. Пособие содержит ряд примеров, демонстрирующих использование изложенной теории для решения конкретных задач. Для закрепления материала в конце параграфов приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть также использованы для проведения практических занятий.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета факультета Прикладной математики и механики Кацаран Т.К.

Теория множеств

§1. Элементы теории множеств

Под множеством понимается совокупность некоторых объектов (элементов), объединенных некоторым признаком. Множества обычно обозначают большими буквами алфавита $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\Omega}$. Элементы, входящие в множество обозначаются малыми буквами a, b, x, y, z, ω. Запись $x \in \boldsymbol{X}$ означает, что x является элементом множества $\boldsymbol{X}$, а запись $x \notin \boldsymbol{X}$ означает, что x не принадлежит множеству $\boldsymbol{X}$. Два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Для описания множества пользуются двумя способами. Первый способ состоит в простом перечислении его элементов. Так, запись $\boldsymbol{A} = \{0,1,5\}$ означает, что множество $\boldsymbol{A}$ состоит из трех чисел 0,1 и 5. Второй способ состоит в определении множества с помощью некоторого свойства P, позволяющего определить, принадлежит ли данный элемент данному множеству или нет. В этом случае используется коллективизирующее обозначение

$$\boldsymbol{A} = \{x : P(x)\},$$

которое читается следующим образом: множество $\boldsymbol{A}$ состоит из всех элементов x, для которых $P(x)$ истинно. Если свойство P относится к элементам некоторого множества $\boldsymbol{X}$, то будем писать также $\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{X} : P(x)\}$. Например, множество $\{1,2,3,4,5\}$ можно задать следующим образом:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{x : x - \textit{целое число из интервала } [1,5]\}.$$

Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

Знаком $\subseteq$ обозначим отношение включения между множествами, т.е. $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ есть элемент множества $\boldsymbol{B}$. Если $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, то говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ есть подмножество множества $\boldsymbol{B}$.

Равенство двух множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ означает выполнение двух включений: $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Если $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, то говорят, что $\boldsymbol{A}$ есть собственное подмножество $\boldsymbol{B}$ и пишут $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.

Множество всех подмножеств множества $\boldsymbol{A}$ называется множеством-степенью и обозначается $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$.

Заметим, что: а) $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{X}$; б) если $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}, \ \boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{Z}$, то $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$; в) если $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}, \ \boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Хотя $1 \in \{1\}, \ \{1\} \in \{\{1\}\}$, не верно, что $1 \in \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Пустое множество есть подмножество любого множества.

Число элементов в множестве $\boldsymbol{X}$ обозначается $|\boldsymbol{X}|$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих.

Объединением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется множество $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, все элементы которого являются элементами множества $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x : x \in \boldsymbol{A} \quad или \quad x \in \boldsymbol{B}\}.$$

Пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется множество $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, элементы которого являются элементами и множества $\boldsymbol{A}$, и множества $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x : x \in \boldsymbol{A} \ и \ x \in \boldsymbol{B}\}.$$

Очевидно, что выполняются включения

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется множество $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ тех элементов из $\boldsymbol{A}$, которые не принадлежат $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \{x : x \in \boldsymbol{A} \ и \ x \notin \boldsymbol{B}\}.$$

Симметричной разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется множество

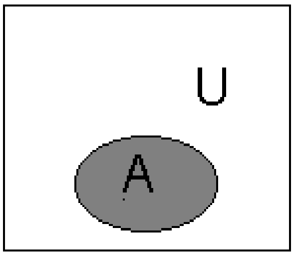
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}.$$

Если все рассматриваемые в данный момент множества являются подмножествами некоторого множества $\boldsymbol{U}$, то множество $\boldsymbol{U}$ называют универсальным для данного рассмотрения.

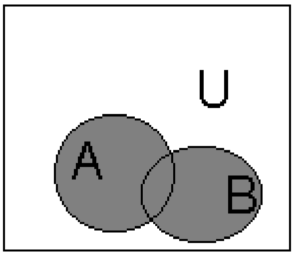
Дополнением множества $\boldsymbol{A}$ называется множество

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{A}.$$

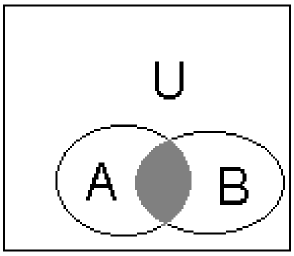
Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсального множества используются диаграммы Эйлера-Венна.



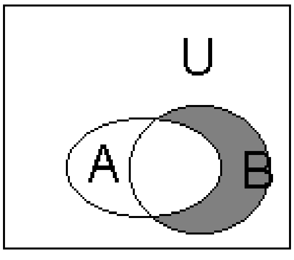
$\boldsymbol{A}$



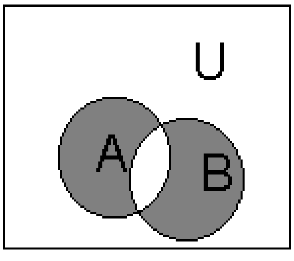
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$



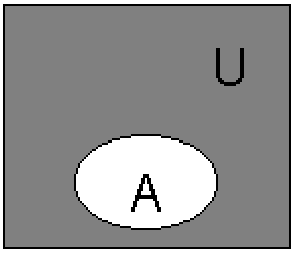
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$



$\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$



$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$



$\overline{\boldsymbol{A}}$

Операции над множествами имеют следующие приоритеты в порядке убывания: операция взятия дополнения, операция пересечения, операция объединения.

Отметим следующие основные законы для операций над множествами:

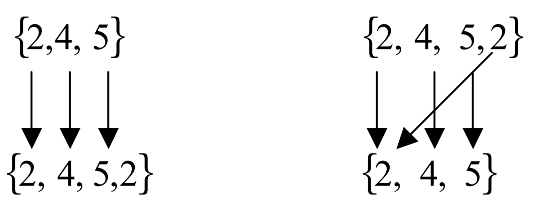
1. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$ (коммутативность объединения);
2. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$ (коммутативность пересечения);
3. $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{M}$ (ассоциативность объединения);
4. $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{M}$ (ассоциативность пересечения);
5. $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{M})$(1-й закон дистрибутивности);
6. $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{M})$(2-й закон дистрибутивности);
7. $\boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}$;
8. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$;
9. $\boldsymbol{A} \cap \varnothing = \varnothing$;
10. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$;
11. $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$ (закон де Моргана);
12. $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$ (закон де Моргана);
13. $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$ (закон поглощения);
14. $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$ (закон поглощения).

Рассмотрим методику решения задач по данной теме.

Задача 1. Равны ли следующие множества:
1) $\{2,4,5\}$ и $\{2,4,5,2\}$;
2) $\{1,2\}$ и $\{\{1,2\}\}$;
3) $\{1,2,3\}$ и $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
4) $\{\{1,2\},3\}$ и $\{\{1\},\{2,3\}\}$.

Решение. Для доказательства равенства произвольных множеств нужно проверить, что первое множество включено во второе, а второе, в свою очередь, включено в первое, т.е. любой элемент первого множества является элементом второго множества, а любой элемент второго множества является элементом первого множества.

Проверка дает положительный результат для множеств из пункта 1). Это можно наглядно показать на следующей схеме, где стрелочка, идущая от элемента, показывает, какой элемент в другом множестве ему соответствует.



Множества из пункта 2) неравны, так как, например, элемент 1из первого множества не имеет себе равного во втором множестве. Второе множество состоит из единственного элемента – множества $\{1,2\}$.

Множества, указанные в пункте 3) неравны, так как элементами первого множества являются числа $1,2,3$, а элементами второго множества являются множества, состоящие из одного элемента $\{1\},\{2\},\{3\}$.

Пункт 4) сделайте самостоятельно.

Задача 2. Следующие множества заданы перечислением своих элементов, задайте эти множества с помощью характерного для их элементов свойства.

1) $\boldsymbol{A}=\{2,4,6,8,...,32\}$;

2) $\boldsymbol{K}=\left\{\begin{array}{l} Киев, Минск, Кишинев, Таллинн, Вильнюс, Рига, Москва, \\ Ереван, Тбилиси, Баку, Ташкент, Ашхабад, Душанбе, \\ Алма-Ата, Фрунзе \end{array}\right\}$

Решение. Множество $\boldsymbol{A}$ представляет собой множество четных натуральных чисел от 1 до 32, поэтому это множество можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}=\{x\in \boldsymbol{N} : x=2n,\ n=1,...,16\}.$$

Множество $\boldsymbol{K}$ представляет собой множество столиц республик бывшего СССР, т.е. это множество можно записать в виде

$$\boldsymbol{K}=\{x : x - столица\ республики\quad СССР\}.$$

Задача 3. Приведите примеры таких множеств $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{K}$, для которых

1) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{K}$;

2) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{K}$;

3) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\notin\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{K}$;

4) $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{K}$.

Решение. В качестве примера множеств, удовлетворяющих условию из пункта 1, можно рассмотреть следующие множества

$$\boldsymbol{A}=\{1,2\},\quad \boldsymbol{B}=\{\{1,2\},1\},\quad \boldsymbol{K}=\{3,\{\{1,2\},1\}\}.$$

Пункту 3) удовлетворяют множества

$$\boldsymbol{A}=\{2,3\},\quad \boldsymbol{B}=\{\{1\},\{2,3\}\},\quad \boldsymbol{K}=\{2,3,4\}.$$

Пункты 2) и 4) рассмотрите самостоятельно.

Задача 4. Докажите следующие тождества:

1) $\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cap\overline{\boldsymbol{B}}$;

2) $\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{K})=(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cup\overline{\boldsymbol{K}})$;

3) $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap(\overline{\boldsymbol{B}}\cup\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$;

4) $\boldsymbol{B}\cap(\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{B})=\varnothing$;

5) $\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K})=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{K})$.

Решение. Для доказательства равенства 1) докажем два включения:

$$A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B},$$
$$A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B.$$

Доказательство первого включения проведем по схеме

$$x \in A \setminus B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B},$$

а доказательство второго включения по схеме

$$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \setminus B.$$

Заметим, что в данном примере мы могли рассмотреть не две схемы, а одну, но вместо знака следствия использовать знак равносильности $\Leftrightarrow$.

Тождество 2 можно также доказать с помощью двух включений, но можно и не использовать данную схему, а опираться на уже доказанное тождество 1) и на основные законы 1-14. Мы приведем данный способ доказательства, причем вверху над равенствами будем писать либо 1) – это означает, что используется тождество 1), либо номер используемого основного закона. Итак,

$$A \cup (B \setminus K) \overset{1)}{=} A \cup \left(B \cap \overline{K}\right) \overset{5)}{=} (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{K}\right).$$

Аналогично можно доказать равенства 3),4),5). Для равенства 4) приведем еще один способ доказательства – доказательство от противного. Предположим противное, что множество $B \cap (A / B)$ не пусто, т.е. существует хотя бы один элемент

$$x \in B \cap (A \setminus B) \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases}.$$

Никакой элемент x не может одновременно принадлежать и самому множеству и его дополнению, поэтому мы пришли к противоречию.

Задача 5. Пусть A, B, K - такие множества, что $B \subseteq A \subseteq K$. Найдите множество X, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = K \end{cases}.$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $B \subseteq X$, поэтому X можно представить в виде $X = B \cup X'$, где $X' \cap B = \varnothing$. Из равенств

$$A \cap X = B, \quad X = B \cup X', \quad X' \cap B = \varnothing$$

следует, что $A \cap X' = \varnothing$.

Итак, нам осталось найти множество X'. Заменим X во втором уравнении на $X = B \cup X'$. Получим $A \cup (B \cup X') = K$. По ассоциативному закону $(A \cup B) \cup X' = K$. Из включения $B \subseteq A$ следует, что $A \cup B = A$, поэтому получаем равносильное уравнение $A \cup X' = K$. Два факта

$A \cap X' = \varnothing$ и $A \subseteq K$ позволяют заключить, что решением последнего уравнения является множество $X' = K \setminus A$. Окончательно
$$X = B \cup (K \setminus A).$$

Задача 6. Докажите, что условие $A \subseteq B$ равносильно каждому из следующих условий:
$$1)\ A \cap B = A; \quad 2)\ A \cup B = B.$$
Решение. Докажем, что $A \subseteq B$ равносильно условию 1).
Итак, пусть $A \subseteq B$, докажем равенство $A \cap B = A$. Равенство будем доказывать в два включения. Пусть
$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A.$$
Обратно, пусть
$$x \in A \Rightarrow^{A \subseteq B} x \in A, \quad x \in B \Rightarrow x \in A \cap B.$$
Теперь предположим, что выполнено условие 1), докажем, что $A \subseteq B$. Рассмотрим
$$x \in A \Rightarrow^{A \cap B = A} x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$
Равносильность условия $A \subseteq B$ условию 1) мы доказали, равносильность условию 2) докажите самостоятельно.

Задача 7. Докажите для произвольных множеств A, B, K:
1) если $A \not\subset B$ и $A \cap K = \varnothing$, то $A \cup K \not\subset B \cup K$;
2) если $B \cap K = \varnothing$ и $A \cap K \neq \varnothing$, то $A \setminus B \neq \varnothing$.

Решение.1) Нам нужно доказать, что существует хотя бы один элемент x' такой, что $x' \in A \cup K, x' \notin B \cup K$. Нам известно, что $A \not\subset B$, поэтому существует некоторый элемент $x^* \in A$ и $x^* \notin B$. В силу условия $A \cap K = \varnothing$, данный элемент $x^* \notin K$. Таким образом, $x^* \in A \cup K, x^* \notin B \cup K$.

2)Нам нужно доказать, что существует хотя бы один элемент в множестве $A \setminus B$. Известно, что $A \cap K \neq \varnothing$, поэтому существует элемент $x^* \in A$, $x^* \in K$, причем, в силу условия $B \cap K = \varnothing$, данный элемент $x^* \notin B$. Итак, мы построили элемент $x^* \in A$ и $x^* \notin B$.

Задача 8. Докажите, что для произвольных множеств A, B справедливо равенство $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Решение. Доказательство проведем в виде двух включений, объединив их одной записью. Пусть
$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A, \quad X \subseteq B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X \in P(A), \quad X \in P(B) \Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B).$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Каждое из следующих множеств задайте в виде некоторого интервала числовой прямой:

1) $\{x \in R : \exists y \in R \quad x^2 + y^2 = 1\}$;

2) $\left\{x \in R : \exists y \in R \quad x = \dfrac{y+1}{y^2+1}\right\}$;

3) $\{a \in R : \exists x \in R \quad 3x^2 + 2ax + a < 0\}$.

2. Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное утверждение.

1) $\{1\} \qquad \{1,\{1,2\}\}$;

2) $\{1,2\} \qquad \{1,2,\{1\},\{2\}\}$;

3) $\{1,2\} \qquad \{1,2,\{1,2\}\}$;

4) $\varnothing \qquad \{1,2,\{1\},\{\varnothing\}\}$;

5) $\varnothing \qquad \{\varnothing\}$;

6) $\varnothing \qquad \{\{\varnothing\}\}$.

3.Перечислите элементы каждого из следующих множеств:

1) $\{x : x \subseteq \{1\}\}$;

2) $\{x : x \subseteq \{1,2,3\}\}$;

3) $\{x : x \subseteq \varnothing\}$.

4. Докажите следующие тождества:

1) $(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$;

2) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap (\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{B})$;

3) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \setminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$;

4) $(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \setminus \overline{\boldsymbol{B}}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \setminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$;

5) $(\boldsymbol{A} \setminus \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \setminus \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}})$;

6) $\boldsymbol{A} \setminus (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$;

7) $\boldsymbol{B} \cup (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$;

8) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K})$;

9) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \varnothing$.

5. Считая $\boldsymbol{\Lambda}$ универсальным множеством для данного рассмотрения, найдите множество $\boldsymbol{X}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}$;

2) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{X} = \varnothing, \quad \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}$;

3) $\boldsymbol{A} \setminus (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{X}) = \varnothing$;

4) $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{X} = \varnothing, \quad \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$;

5) $\boldsymbol{A} \setminus (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{X}) = \varnothing, \quad \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{X}} = \varnothing$.

6. Найдите решение системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{K} \end{cases},$$

если известно, что $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{K} = \varnothing$.

7. Каждое из следующих утверждений либо докажите, либо покажите при помощи диаграмм Эйлера-Венна, что оно не всегда верно:
1) $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K)$;
2) $(A \setminus B) \cup B = A$;
3) $(A \cup B) \setminus B = A$;
4) $(A \cap B) \setminus A = \varnothing$;
5) $(A \setminus B) \cup K = (A \cup K) \setminus (B \cup K)$;
6) $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subseteq B$;
7) $B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow A = \varnothing$.

8. Верно ли, что:
1) $A \cup B = A \cup K \Rightarrow B = K$;
2) $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$;
3) $A \cup B = A \cup K$ и $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$.

9. Докажите:
1) $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K) \Leftrightarrow A \subseteq K$;
2) $A = B \Leftrightarrow A + B = \varnothing$;
3) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$;
4) $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
5) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
6) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
7) $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \varnothing$;
8) $A \cup B \subseteq K \Leftrightarrow A \subseteq K$ и $B \subseteq K$;
9) $A \subseteq B \cup K \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq K$;
10) $K \subseteq A \cap B \Leftrightarrow K \subseteq A$ и $K \subseteq B$;
11) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$;
12) $A \subseteq B \subseteq K \Leftrightarrow A \cup B = B \cap K$;
13) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus K \subseteq B \setminus K$;
14) $B \subseteq A$ и $K = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup K$;
15) $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$.

10. Объединением семейства множеств A_i $(i \in I)$ называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists j \in I \quad x \in A_j\}.$$

Пересечением семейства множеств A_i $(i \in I)$ называется множество

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall j \in I \quad x \in A_j\}.$$

Найдите $\bigcup_{n \in N} [-n, n]$.

11. Пусть $X_\alpha = \{x \in R : x > \alpha\}$. Найдите $\bigcap_{\alpha \in N} X_\alpha$, $\bigcup_{\alpha \in N} X_\alpha$.

12. Приведите пример:

1) последовательности непустых множеств $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_n,\ldots$, такой, что $\boldsymbol{X}_1 \supset \boldsymbol{X}_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n\in \boldsymbol{N}} \boldsymbol{X}_n = \varnothing$;

2) последовательности множеств, отличных от универсального множества $\boldsymbol{\Lambda}$, такой, что $\boldsymbol{X}_1 \subset \boldsymbol{X}_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n\in \boldsymbol{N}} \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Lambda}$;

3) семейства множеств такого, что пересечение любого конечного числа множеств из этого семейства непусто, а пересечение всех множеств пусто.

§ 2. Прямое произведение множеств. Бинарные отношения

Произведением (или декартовым произведением) $\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2$ двух непустых множеств $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$ будем называть множество упорядоченных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in \boldsymbol{X}_1$, $x_2 \in \boldsymbol{X}_2$. Это понятие выросло из понятия декартовой системы координат. Данное понятие можно обобщить и на случай n множеств. Если $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ - n непустых множеств, то их произведение состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_k \in \boldsymbol{X}_k, k = 1, \ldots, n$ элементов этих множеств. Если множества $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 = \ldots = \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}$, то их произведение $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ обозначается $\boldsymbol{X}^n$. Так, символом R^n обозначается множество упорядоченных векторов n вещественных чисел.

Любое подмножество из произведения $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ называется бинарным отношением. Если $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$, то бинарное отношение называется бинарным отношением на множестве $\boldsymbol{X}$. Бинарные отношения обозначаются буквами $\phi, \rho, f, \ldots$ Если пара (x, y) принадлежит бинарному отношению ρ, то пишут $(x, y) \in \rho$ или $x \; \rho \; y$.

Для задания бинарного отношения ρ используют те же методы, что и для произвольных множеств, кроме того, бинарное отношение, заданное на конечном множестве $\boldsymbol{X}$, можно задать в виде графа, а бинарное отношение на множестве R можно задать в виде декартовой диаграммы. Под графом бинарного отношения мы понимаем схему, в которой элементы множества $\boldsymbol{X}$ изображаются точками на плоскости, элементы $x, y \in \boldsymbol{X}$, такие, что пара $(x, y) \in \rho$ соединяются стрелкой, направленной от x к y, пары $(x, x) \in \rho$ изображаются петлей вокруг точки x. Под декартовой диаграммой понимают изображение пар $(x, y) \in \rho$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество

$$D_\rho = \{x \in \boldsymbol{X} : \exists y \quad (x, y) \in \rho\}.$$

Областью значений бинарного отношения ρ называется множество

$$R_\rho = \{y \in \boldsymbol{Y} : \exists x \quad (x, y) \in \rho\}.$$

Бинарное отношение ρ на множестве $\boldsymbol{X}$ называется рефлексивным, если для любого $x \in \boldsymbol{X}$ пара $(x, x) \in \rho$. Если $\boldsymbol{X}$ - конечное множество, то рефлексивность бинарного отношения ρ означает, что на графе данного бинарного отношения вокруг каждой точки x из $\boldsymbol{X}$ есть петля. Если $\boldsymbol{X} = R$, то рефлексивность бинарного отношения ρ с точки зрения декартовой диаграммы означает, что в число изображенных точек войдут все точки прямой $y(x) = x$.

Бинарное отношение ρ на множестве $\boldsymbol{X}$ называется симметричным, если для любых $x, y \in \boldsymbol{X}$ из принадлежности пары (x, y) отношению ρ следует принадлежность этому отношению также пары (y, x). Если $\boldsymbol{X}$ - конечное множество, то симметричность бинарного отношения ρ означает, что на графе данного бинарного отношения все присутствующие стрелки двусторонние. Если $\boldsymbol{X} = R$, то симметричность бинарного отношения ρ с точки зрения декартовой диаграммы означает, что изображенное множество симметрично относительно прямой $y(x) = x$.

Бинарное отношение ρ на множестве $\boldsymbol{X}$ называется антисимметричным, если для любых $x, y \in \boldsymbol{X}$ из принадлежности пар (x, y) и (y, x) отношению ρ следует $x = y$. Если $\boldsymbol{X}$ - конечное множество, то антисимметричность бинарного отношения ρ означает, что на графе данного бинарного отношения все присутствующие стрелки односторонние.

Бинарное отношение ρ на множестве $\boldsymbol{X}$ называется транзитивным, если для любых $x, y, z \in \boldsymbol{X}$ из принадлежности пар (x, y) и (y, z) отношению ρ следует принадлежность этому отношению также пары (x, z).

Обратным отношением для ρ называется отношение

$$\rho^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \rho\}.$$

Композицией отношений ρ_1 и ρ_2 называется отношение

$$\rho_2 \circ \rho_1 = \{(x, y) : \exists z \quad (x, z) \in \rho_1, (z, y) \in \rho_2\}.$$

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho$;
2. $(\rho_2 \circ \rho_1)^{-1} = \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}$.

Задача 1. Перечислите элементы множеств $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$:

1) $\boldsymbol{A} = \{1,2\}$, $\boldsymbol{B} = \{3,4,5\}$;
2) $\boldsymbol{A} = \varnothing$, $\boldsymbol{B} = \{1,2,3,4\}$.

Решение. По определению

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) : a \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{B}\}.$$

Порядок построения данного множества будет следующий: вначале перечислим все пары, первый элемент которых равен первому элементу множества $\boldsymbol{A}$, а второй элемент берется из множества $\boldsymbol{B}$ в том порядке, в котором они записаны в множестве $\boldsymbol{B}$, затем аналогично берем второй элемент из $\boldsymbol{A}$ и составляем пары со всеми элементами из $\boldsymbol{B}$ и т.д.

Аналогичен и метод построения множества

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\{(b,a):b\in\boldsymbol{B},\,a\in\boldsymbol{A}\}.$$

1) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\left\{\begin{matrix}(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,3),(2,4),(2,5)\end{matrix}\right\},\quad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\left\{\begin{matrix}(3,1),(3,2),\\(4,1),(4,2),\\(5,1),(5,2)\end{matrix}\right\}.$

3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\varnothing$, поскольку множество $\boldsymbol{A}$ пусто и мы не можем составить ни одной пары.

Задача 2. Пусть $\boldsymbol{A}=\{3,4\}$. Перечислите элементы множеств $\boldsymbol{A}^4$.

Решение. По определению

$$\boldsymbol{A}^4=\{(a_1,a_2,a_3,a_4):a_1\in\boldsymbol{A},a_2\in\boldsymbol{A},a_3\in\boldsymbol{A},a_4\in\boldsymbol{A}\}=$$

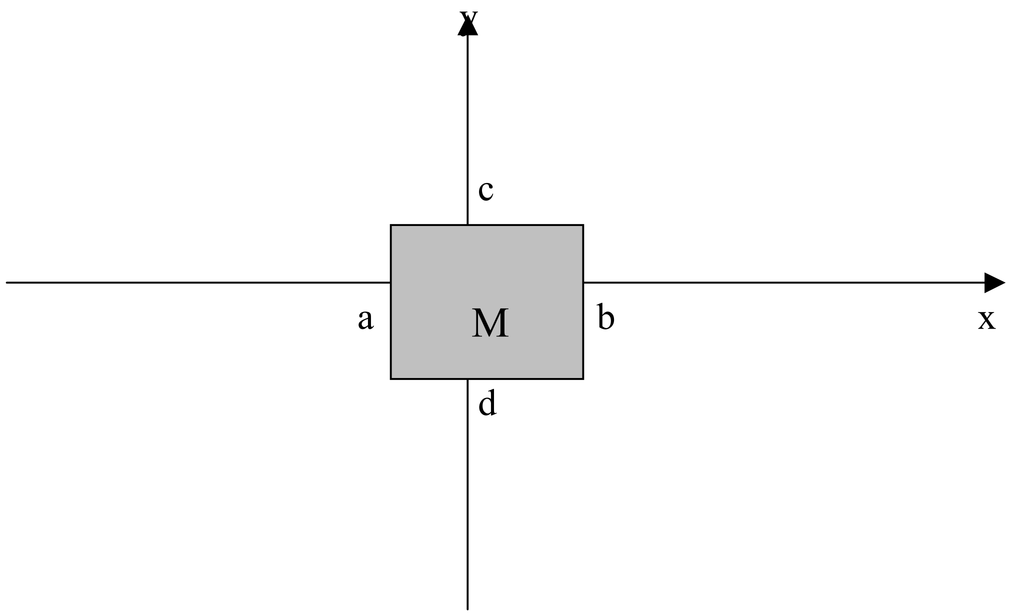
$$=\left\{\begin{matrix}(3,3,3,3),(3,3,3,4),(3,3,4,3),(3,3,4,4),\\(3,4,3,3),(3,4,3,4),(3,4,4,3),(3,4,4,4),\\(4,3,3,3),(4,3,3,4),(4,3,4,3),(4,3,4,4),\\(4,4,3,3),(4,4,3,4),(4,4,4,3),(4,4,4,4)\end{matrix}\right\}.$$

Задача 3. Пусть на плоскости задана декартова система координат. Изобразите на плоскости следующее множество:

$$\boldsymbol{M}=[a,b]\times[c,d],$$

где $a,b,c,d\in R\quad a<b,\quad c<d$.

Решение. При построении прямого произведения $\boldsymbol{M}=[a,b]\times[c,d]$ каждой точке x из отрезка $[a,b]$ ставятся пары (x,y), $y\in[c,d]$, поэтому в результате получим множество



Задача 4. Докажите следующее равенство:

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{K}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{M}).$$

Решение. Равенство двух множеств мы докажем с помощью двух включений, объединив их одной записью. Заметим, что элементами множеств в данном случае являются упорядоченные пары точек. Итак, пусть

$$(x, y) \in (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{M}) \Leftrightarrow x \in (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}), y \in (\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{M}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \boldsymbol{A}, x \in \boldsymbol{B}, y \in \boldsymbol{K}, y \in \boldsymbol{M} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{A}, y \in \boldsymbol{K}, x \in \boldsymbol{B}, y \in \boldsymbol{M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{K}, (x, y) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{M} \Leftrightarrow (x, y) \in (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{K}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{M}).$$

Задача 5. Докажите, что для любых непустых множеств $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{K}$ из равенства $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K}$ следует, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}$.

Решение. Для доказательства данного утверждения установим два равенства $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}$.

Для произвольных $x \in \boldsymbol{A}$ и $y \in \boldsymbol{B}$

$$(x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow (x, y) \in \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} \Rightarrow x \in \boldsymbol{K}, y \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{K}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{K}.$$

С другой стороны, для произвольного $x \in \boldsymbol{K}$

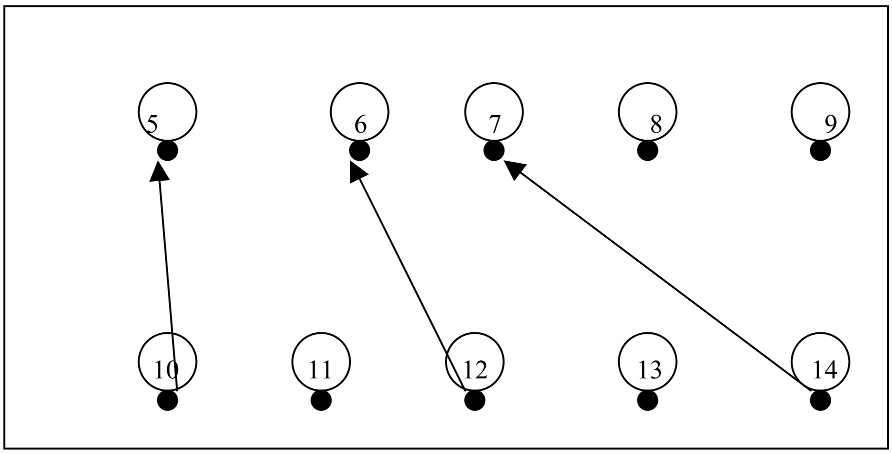
$$(x, x) \in \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} \Rightarrow (x, x) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \text{ или } (x, x) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \boldsymbol{A} \text{ и } x \in \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{A} \text{ и } \boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}$.

Задача 6. На множестве $\boldsymbol{A} = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ задано бинарное отношение $\rho = \{(x, y) : x \textit{ делится на } y\}$. Нарисуйте граф данного бинарного отношения.

Решение. Расположим на плоскости точки множества $\boldsymbol{A}$. Точки $x, y \in \boldsymbol{A}$, для которых пара $(x, y) \in \rho$, соединим стрелкой, направленной от x к y. Пары $(x, x) \in \rho$ изобразим петлей вокруг точки x. Результатом такого построения будет граф



***Задача** 7*. Для следующего бинарного отношения, определенного на множестве R, найдите область определения, область значений и нарисуйте декартову диаграмму

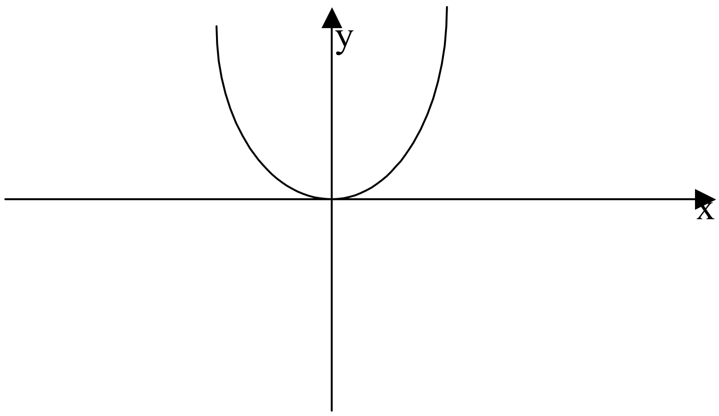
$$\rho = \{(x, y) : x^2 = y\}.$$

Решение. В соответствии с определением

$$D_\rho = \{x \in R : \exists y \quad (x, y) \in \rho\} = R.$$

$$R_\rho = \{y \in \boldsymbol{Y} : \exists x \quad (x, y) \in \rho\} = R_+ \cup 0 \ .$$

Декартова диаграмма для данного бинарного отношения имеет вид



Задача 8. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает.

1) $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,1),(1,3),(3,2),(3,3)\}$ на множестве $\boldsymbol{X} = \{1,2,3\}$;

2) $\rho = \{(x, y) : x - y \in \boldsymbol{Z}\}$ на множестве $\boldsymbol{X} = R$;

3) $\rho = \{(x, y) : 2x = 3y\}$ на множестве $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}$;

4) $\rho = \{(x, y) : x \subseteq y\}$ на множестве $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z})$.

Решение.

1) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для точки $2 \in \boldsymbol{X}$ пара $(2,2) \notin \rho$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(1,3) \in \rho$, а пара $(3,1) \notin \rho$; не является антисимметричным, поскольку, например, пары $(1,2)$ и $(2,1)$ принадлежат ρ, но $1 \neq 2$; не является транзитивным, поскольку, например $(3,2) \in \rho, (2,1) \in \rho$, а $(3,1) \notin \rho$.

2) Данное отношение является рефлексивным, поскольку для любой точки $x \in R$ разность $x - x = 0 \in \boldsymbol{Z}$, т.е. $(x, x) \in R$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары (x, y) отношению ρ означает $x - y = k \in \boldsymbol{Z}$, но тогда $y - x = -k \in \boldsymbol{Z}$, т.е. пара $(y, x) \in \rho$; не является

антисиммеричным, поскольку, например, пары $(1.2,3.2)\in\rho$ и $(3.2,1.2)\in\rho$, но $3.2\neq 1.2$; является транзитивным, поскольку для любых $x,y,z\in R$ принадлежность пар (x,y) и (y,z) отношению ρ означает $x-y=k\in\boldsymbol{Z}$ и $y-z=n\in\boldsymbol{Z}$, но тогда $x-z=k+n\in\boldsymbol{Z}$, т.е. $(x,z)\in\rho$.

3) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку из всех пар $(x,x), x\in\boldsymbol{Z}$ только пара $(0,0)\in\rho$, ведь для всех остальных $x\in\boldsymbol{Z}$ не выполнено равенство $2x=3x$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(3,2)\in\rho$ ($2\cdot 3=3\cdot 2$), а пара $(2,3)\notin\rho$ ($2\cdot 2\neq 3\cdot 3$); является антисимметричным, поскольку для любых пар $(x,y)\in\rho, (y,x)\in\rho$ одновременно выполняются равенства $2x=3y$ и $2y=3x$, т.е. $9x=4x$ и $4y=9y$, но это может быть только в том случае, если $x=y=0$; не является транзитивным, поскольку, например, пара $(9,6)\in\rho$ ($2\cdot 9=3\cdot 6$), пара $(6,4)\in\rho$ ($2\cdot 6=3\cdot 4$), но пара $(9,4)\notin\rho$ ($2\cdot 9\neq 3\cdot 4$).

4) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для $\varnothing\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z})$ пересечение $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$, т.е. $(\varnothing,\varnothing)\notin\rho$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары (x,y) отношению ρ означает $x\cap y\neq\varnothing$, но тогда $y\cap x\neq\varnothing$, т.е. пара $(y,x)\in\rho$; не является транзитивным, поскольку, например, пара $(\{1,2\},\{2,3\})\in\rho$ ($\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}\neq\varnothing$) и пара $(\{2,3\},\{3,6,7\})\in\rho$ ($\{2,3\}\cap\{3,6,7\}=\{3\}\neq\varnothing$), но пара $(\{1,2\},\{3,6,7\})\notin\rho$, так как $\{1,2\}\cap\{3,6,7\}=\varnothing$.

Задача 9. Пусть на множестве R заданы следующие бинарные отношения:

$$\rho_1=\{(x,y): x=y^2\},\ \rho_2=\{(x,y): x+y\leq 2\};\ \rho_3=\{(x,y): x+y\in\boldsymbol{Z}\}$$

Найдите обратные к данным бинарным отношениям и всевозможные композиции этих бинарных отношений.

Решение. Вначале выпишем обратные отношения:

$$\rho_1^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\rho_1\}=\{(x,y): y=x^2\};$$

$$\rho_2^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\rho_2\}=\{(x,y): y+x\leq 2\}=\rho_2;$$

$$\rho_3^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\rho_3\}=\{(x,y): y+x\in\boldsymbol{Z}\}=\rho_3.$$

В качестве примера рассмотрим некоторые композиции рассматриваемых бинарных отношений:

$$\rho_1\circ\rho_2=\{(x,y):\exists z\quad (x,z)\in\rho_2,(z,y)\in\rho_1\}=$$

$$=\{(x,y):\exists z\quad x+z\leq 2, z=y^2\}=\{(x,y): x+y^2\leq 2\};$$

$$\rho_2\circ\rho_1=\{(x,y):\exists z\quad (x,z)\in\rho_1,(z,y)\in\rho_2\}=$$

$$=\{(x,y):\exists z\quad x=z^2, z+y\leq 2\}=\left\{(x,y): x\geq 0,\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+y\leq 2\\ -\sqrt{x}+y\leq 2\end{array}\right.\right\}=$$

$$=\{(x,y): x\geq 0, -\sqrt{x}+y\leq 2\};$$

$\rho_2 \circ \rho_3 = \{(x,y): \exists z \quad (x,z) \in \rho_3, (z,y) \in \rho_2\} =$
$= \{(x,y): \exists z \quad x+z \in \boldsymbol{Z}, z+y \le 2\} =$
$= \{(x,y): \exists z \quad x+z = k \in \boldsymbol{Z}, z+y \le 2\} = \{(x,y): \exists k \in \boldsymbol{Z} \;\; k-x+y \le 2\} = R \times R$
$\rho_3 \circ \rho_2 = \{(x,y): \exists z \quad (x,z) \in \rho_2, (z,y) \in \rho_3\} =$
$= \{(x,y): \exists z \quad x+z \le 2, z+y \in \boldsymbol{Z}\} = R \times R$.

Остальные композиции постройте самостоятельно.

Задача 10. Пусть $\boldsymbol{X}$ - произвольное множество, обозначим символом $\boldsymbol{I_X}$ отношение на множестве $\boldsymbol{X}$ вида

$$\boldsymbol{I_X} = \{(x,y): x = y\} = \{(x,x): x \in \boldsymbol{X}\}.$$

Докажите, что для любого бинарного отношения ρ между элементами множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выполняются равенства:

$$\boldsymbol{I_B} \circ \rho = \rho, \qquad \rho \circ \boldsymbol{I_A} = \rho.$$

Решение.

$\boldsymbol{I_B} \circ \rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : \exists z \in \boldsymbol{B} \; (x,z) \in \rho, (z,y) \in \boldsymbol{I_B}\} =$
$= \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : \exists z \in \boldsymbol{B} \; (x,z) \in \rho, z = y\} = \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : (x,y) \in \rho\} = \rho;$
$\rho \circ \boldsymbol{I_A} = \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : \exists z \in \boldsymbol{A} \; (x,z) \in \boldsymbol{I_A}, (z,y) \in \rho\} =$
$= \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : \exists z \in \boldsymbol{A} \;\; x = z, (z,y) \in \rho\} = \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : (x,y) \in \rho\} = \rho.$

Задача 11. Пусть φ, ϕ, χ бинарные отношения, определенные на множестве $\boldsymbol{X}$. Докажите следующие утверждения:

1) если φ, ϕ - симметричные (антисимметричные) отношения, то $(\varphi \cap \phi)^{-1}$ - симметричное (антисимметричное) отношение;

2) $(\varphi \setminus \phi) \circ \chi \supseteq (\varphi \circ \chi) \setminus (\phi \circ \chi)$.

Решение.

1. Пусть φ, ϕ - симметричные отношения, докажем, что $(\varphi \cap \phi)^{-1}$ - симметричное отношение. Пусть

$$(x,y) \in (\varphi \cap \phi)^{-1} \Rightarrow (y,x) \in \varphi \cap \phi \Rightarrow \begin{cases} (y,x) \in \varphi \\ (y,x) \in \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{\text{симметричность } \varphi,\phi} \begin{cases} (x,y) \in \varphi \\ (x,y) \in \phi \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \varphi \cap \phi \Rightarrow (y,x) \in (\varphi \cap \phi)^{-1};$$

Пусть φ, ϕ - антисимметричные отношения, докажем, что $(\varphi \cap \phi)^{-1}$ - антисимметричное отношение. Пусть

$$\begin{cases} (x,y) \in (\varphi \cap \phi)^{-1} \\ (y,x) \in (\varphi \cap \phi)^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y,x) \in \varphi \cap \phi \\ (x,y) \in \varphi \cap \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y),(y,x) \in \varphi \\ (x,y),(y,x) \in \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{\text{антисимметричность } \varphi,\phi} \; x = y .$$

2. Докажем требуемое включение. Пусть

$(x,y) \in (\varphi \circ \chi) \setminus (\phi \circ \chi) \Rightarrow (x,y) \in \varphi \circ \chi, \quad (x,y) \notin \phi \circ \chi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists z & \begin{cases}(x,z)\in\chi\\(z,y)\in\varphi\end{cases}\\ \forall z & \left[\begin{array}{l}(x,z)\notin\chi\\(z,y)\notin\phi\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \exists z \quad \begin{cases}(x,z)\in\chi\\(z,y)\in\varphi\\(z,y)\notin\phi\end{cases} \Rightarrow \exists z \quad \begin{cases}(x,z)\in\chi\\(z,y)\in\varphi\setminus\phi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y)\in(\varphi\setminus\phi)\circ\chi$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $\boldsymbol{X} = \{*,\times\}$. Перечислите все элементы множеств $\boldsymbol{X}^3, \boldsymbol{X}^4$.

2. Найдите геометрическую интерпретацию множества $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{A}$ - множество точек отрезка $[0,1]$, а $\boldsymbol{B}$ - множество точек квадрата с вершинами в точках $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

3. Доказать, что $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{M})\subseteq(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{K})\times(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{M})$. При каких $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}$ включение можно заменить равенством.

4. Доказать, что для произвольных множеств $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{K}$:

1) $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{K})\cup(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{K})$;
2) $(\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{K})\setminus(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{K})$;
3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\setminus(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{K})$.

5. Пусть $\boldsymbol{A}\neq\varnothing, \boldsymbol{B}\neq\varnothing$ и $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{M}$. Доказать, что в этом случае $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}$.

6. Перечислите все элементы бинарного отношения ρ и нарисуйте его граф:

1) $\rho = \{(x,y): x<y\}$ на множестве $\boldsymbol{X} = \{1,2,3,4,5\}$;
2) $\rho = \{(x,y): y = x+1\}$на множестве $\boldsymbol{X} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

7. Для каждого из следующих бинарных отношений, определенных на множестве R, найдите область определения, область значений и нарисуйте декартову диаграмму:

1) $\rho = \{(x,y): x\leq y\}$;
2) $\rho = \{(x,y): x = y\}$;
3) $\rho = \{(x,y): x^2+4y^2\leq 1\}$;
4) $\rho = \{(x,y): x^2 = y^2\}$;
5) $\rho = \{(x,y): y = \log_2 x\}$;
6) $\rho = \{(x,y): y = \sin x\}$.

8. Даны бинарные отношения ρ между элементами множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, найдите область определения и область значений для данных бинарных отношений:

1) $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,4,5\}, \boldsymbol{B} = \{\{1\},\{1,2\},\{2,5\},\{3\}\}, \quad \rho = \{(x,y)\in\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}: x\in y\}$;

2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{B} = Q, \quad \rho = \left\{((a,b),c) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : c = \frac{a}{b}\right\};$

3) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{B} = Q, \quad \rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : x \cdot y = 1\};$

4) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{B} = Q, \quad \rho = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : b = 2^a\right\}.$

9. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает:

1) $\rho = \left\{(x,y) \in R \times R : x^2 = y^2\right\};$
2) $\rho = \left\{(x,y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\right\};$
3) $\rho = \{(x,y) \in R \times R : x \cdot y > 1\};$
4) $\rho = \{(x,y) \in R \times R : y = |x|\};$
5) $\rho = \left\{(x,y) \in R \times R : x + x^2 = y + y^2\right\};$
6) $\rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} : x \le y + 1\};$
7) $\rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} : 3 \text{ } \textit{делится на } x + y\};$
8) $\rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}) : x \subseteq y\};$
9) $\rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}) : x \cap y = \varnothing\}.$

10. Пусть

$\rho_1 = \left\{(x,y) \in R \times R : x = y^2\right\}; \quad \rho_2 = \{(x,y) \in R \times R : x + y \le 5\};$

$\rho_3 = \left\{(x,y) \in R \times R : x^3 = y\right\}; \quad \rho_4 = \{(x,y) \in R \times R : y = \sin x\}.$

Найдите всевозможные композиции $\rho_i \circ \rho_k \quad i,k = 1,2,3,4.$

11. Покажите, что равенство $\varphi \circ \phi = \phi \circ \varphi$ верно не для любых бинарных отношений.

12. Докажите, что для любого бинарного отношения ρ выполняются условия: $D_{\rho^{-1}} = R_\rho$ и $R_{\rho^{-1}} = D_\rho$.

13. Пусть φ, ϕ, χ - бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Докажите следующие утверждения:

1) $(\varphi \setminus \phi)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \phi^{-1};$
2) $(\varphi \cap \phi) \circ \chi \subseteq (\varphi \circ \chi) \cap (\phi \circ \chi);$
3) $(\varphi \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \varphi^{-1};$
4) $(\varphi \cup \phi)^{-1} = \varphi^{-1} \cup \phi^{-1};$
5) $(\varphi \cup \phi) \circ \chi = (\varphi \circ \chi) \cup (\phi \circ \chi).$

14. Приведите примеры бинарных отношений:

1) рефлексивных и транзитивных, но не антисимметричных;
2) транзитивных и симметричных, но не рефлексивных;
3) рефлексивных и симметричных, но не транзитивных;
4) рефлексивных и транзитивных, но не симметричных.

15. Докажите, что если ρ - транзитивное и симметричное бинарное отношение на множестве $\boldsymbol{A}$, область определения которого совпадает с $\boldsymbol{A}$, то ρ рефлексивно.

§ 3. Специальные бинарные отношения

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ на множестве $\boldsymbol{X}$ называется отношением эквивалентности на множестве $\boldsymbol{X}$. Для отношения эквивалентности вместо записи $(x, y) \in \rho$ часто используют запись $x \approx y$ (читается : x эквивалентен y)

Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества $\boldsymbol{X}$, состоящее из тех элементов $y \in \boldsymbol{X}$, для которых $(x, y) \in \rho$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]$:

$$[x] = \{y \in \boldsymbol{X} : (x, y) \in \rho\}.$$

Разбиением множества $\boldsymbol{X}$ называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{X}$ таких, что каждый элемент множества $\boldsymbol{X}$ принадлежит одному и только одному из этих подмножеств. Всякое разбиение множества $\boldsymbol{X}$ определяет на $\boldsymbol{X}$ отношение эквивалентности ρ: $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения. С другой стороны, всякое отношение эквивалентности ρ определяет разбиение множества $\boldsymbol{X}$ на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества $\boldsymbol{X}$ по отношению эквивалентности ρ называется фактор-множеством множества $\boldsymbol{X}$ по отношению ρ и обозначается $\boldsymbol{X} / \rho$.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка на множестве $\boldsymbol{X}$ и вместо записи $(x, y) \in \rho$ для данного отношения часто используют запись $x \leq y$. Отношение частичного порядка на множестве $\boldsymbol{X}$, для которого любые два элемента сравнимы, т.е. для любых $x, y \in \boldsymbol{X}$ выполнено либо $x \leq y$, либо $y \leq x$, называется отношением линейного порядка. Множество $\boldsymbol{X}$ с заданным на нем частичным (линейным) порядком называется частично (линейно) упорядоченным.

Пусть $\boldsymbol{X}$ - непустое конечное множество, на котором задано отношение частичного порядка. Запишем $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x < y$ и не существует такого элемента u, что $x < u < y$. Для $x < y$ можно записать $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Частично упорядоченные множества можно изображать с помощью так называемых диаграмм Хассе. На диаграмме Хассе элементы частично упорядоченного множества изображаются точками на плоскости, и если элемент y покрывает элемент x, то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y.

Задача 1. Доказать, что бинарное отношение на множестве целых чисел

$$\rho = \{(x, y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} : x = y\}$$

является отношением эквивалентности, и построить соответствующее ему фактор-множество $\boldsymbol{Z} / \rho$.

Решение. Проверку рефлексивности, симметричности и транзитивности данного бинарного отношения выполните самостоятельно. Построим классы эквивалентности для данного отношения эквивалентности. Класс эквивалентности, порожденный любым элементом $x \in \boldsymbol{Z}$, имеет вид

$$[x] = \{y \in \boldsymbol{Z} : x \approx y\} = \{y \in \boldsymbol{Z} : x = y\} = \{x\}.$$

Таким образом, для данного отношения эквивалентности класс эквивалентности, порожденный элементом $x \in \boldsymbol{Z}$, состоит только из этого элемента x и фактор-множество $\boldsymbol{Z} / \rho$ имеет вид

$$\boldsymbol{Z} / \rho = \{\{x\} : x \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Задача 2. Пусть m - некоторое натуральное число. Проверить, является ли отношением эквивалентности следующее бинарное отношение на множестве целых чисел:

$$\rho = \{(x, y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} : x - y \quad \textit{делится} \quad \textit{на} \quad m\}.$$

Построить фактор-множество $\boldsymbol{Z} / \rho$.

Решение. Проверим три основных свойства для отношения эквивалентности.

1. Рефлексивность.

Для произвольного $x \in \boldsymbol{Z}$ разность $x - x = 0 = 0 \cdot m \Rightarrow (x, x) \in \rho$.

2. Симметричность.

Пусть

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow \exists k \in \boldsymbol{Z} \quad x - y = k \cdot m \Rightarrow \exists k \in \boldsymbol{Z} \quad y - x = -k \cdot m \Rightarrow (y, x) \in \rho.$$

3. Транзитивность.

Пусть

$$(x, y) \in \rho, (y, z) \in \rho \Rightarrow \exists k, n \in \mathrm{Z} \quad x - y = k \cdot m, y - z = n \cdot m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists k, n \in \mathrm{Z} \quad x - z = (k + n) \cdot m \Rightarrow \exists r = (k + m) \in \mathrm{Z}\, x - z = r \cdot m \Rightarrow (x, z) \in \rho$$

Итак, исследуемое бинарное отношение является отношением эквивалентности. Построение классов эквивалентности начнем с класса эквивалентности, порожденного $0 \in \boldsymbol{Z}$

$$[0] = \{y \in \boldsymbol{Z} : 0 \approx y\} = \{y \in \boldsymbol{Z} : 0 - y \textit{ делится на } m\} =$$
$$= \{y \in \boldsymbol{Z} : \exists k \in \boldsymbol{Z}\ 0 - y = k \cdot m\} = \{y \in \boldsymbol{Z} : \exists k \in \boldsymbol{Z}\ y = -k \cdot m\} =$$
$$= \{0, m, -m, 2m, -2m, 3m, -3m, \ldots, km, -km, \ldots\}.$$

Если $m=1$, то данный класс эквивалентности $[0]=\boldsymbol{Z}$, других классов эквивалентности просто не существует, и $\boldsymbol{Z}/\rho=\{[0]\}$. Если $m>1$, то существуют элементы, не попавшие в построенный класс, например, элемент 1. Построим класс эквивалентности, порожденный 1

$[1]=\{y\in \boldsymbol{Z} : 1\approx y\}=\{y\in \boldsymbol{Z} : 1-y \textit{ делится на } m\}=$
$=\{y\in \boldsymbol{Z} : \exists k\in \boldsymbol{Z}\ 1-y=k\cdot m\}=\{y\in \boldsymbol{Z} : \exists k\in \boldsymbol{Z}\ y=1-k\cdot m\}=$
$=\{1,1-m,1+m,1-2m,1+2m,1-3m,1+3m,...,1-km,1+km,...\}$.

При $m=2$ построенные два класса эквивалентности при объединении дают все множество $\boldsymbol{Z}$ и поэтому построение классов эквивалентности закончено, в противном случае существует элемент, например 3, не попавший ни в один из этих классов эквивалентности, и нужно перейти к построению класса эквивалентности, порожденного 2. Продолжая данный процесс, при любом m мы построим классы эквивалентности

$$[0],[1],...,[m-1],$$

которые не пересекаются и при объединении дают все множество $\boldsymbol{Z}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{Z}/\rho=\{\{n,n-m,n+m,...,n-km,n+km,...\}: n=1,2,...,m-1\}.$$

Задача 3. На плоскости $\boldsymbol{P}$ выбрана некоторая декартова прямоугольная система координат. На $\boldsymbol{P}$ заданы три отношения эквивалентности:

$$\rho_1=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P} : a_1=b_1, a_2-b_2\in \boldsymbol{Z}\};$$
$$\rho_2=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P} : a_1-b_1\in \boldsymbol{Z}, a_2-b_2\in \boldsymbol{Z}\};$$
$$\rho_3=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P} : a_1-b_1+a_2-b_2\in \boldsymbol{Z}\}.$$

Найдите фактор-множества для данных отношений эквивалентности.

Решение. Построим фактор-множество для отношения ρ_1. Класс эквивалентности, порожденный произвольным элементом $(a_1,a_2)\in\boldsymbol{P}$, имеет вид

$[(a_1,a_2)]=\{(x,y)\in \boldsymbol{P} : ((a_1,a_2),(x,y))\in \rho_1\}=\{(x,y)\in \boldsymbol{P} : x=a_1, a_2-y\in \boldsymbol{Z}\}=$
$=\{(x,y)\in \boldsymbol{P} : \exists k\in \boldsymbol{Z}\ \ x=a_1, a_2-y=k\}=$
$=\{(x,y)\in \boldsymbol{P} : \exists k\in \boldsymbol{Z}\ x=a_1,\ y=a_2-k\}=$
$=\{(a_1,a_2-k)\in \boldsymbol{P} : k\in \boldsymbol{Z}\}$.

Таким образом, в класс эквивалентности, порожденный элементом $(a_1,a_2)\in\boldsymbol{P}$ $\ a_1\in R,\ \ 0\le a_2<1$, попадают вместе с элементом $(a_1,a_2)\in\boldsymbol{P}$ элементы, у которых первая координата равна a_1, а вторая координата отличается от a_2 на целое число. Классы эквивалентности, порожденные элементами с $a_1\in R,\ \ 0\le a_2<1$, не пересекаются и в объединении дают все множество $\boldsymbol{P}$. Следовательно, фактор-множество $\boldsymbol{P}/\rho_1$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{P}/\rho_1=\{\{(\alpha,\beta+k): k\in \boldsymbol{Z}\} : \alpha\in R,\quad \beta\in[0,1)\}.$$

Фактор-множество для отношений ρ_2, ρ_3 постройте самостоятельно.

Задача 4. Придумайте минимальное (по числу элементов) отношение эквивалентности ρ на множестве $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,4,5\}$ так, чтобы $(1,2) \in \rho$ и $(2,3) \in \rho$.

Решение. Отношение эквивалентности рефлексивно, поэтому данному отношению обязательно должны принадлежать пары $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$. Отношение эквивалентности симметрично, поэтому наряду с парами $(1,2)$, $(2,3)$ данному отношению обязаны принадлежать пары $(2,1)$, $(3,2)$. В силу транзитивности отношения ρ ему обязана принадлежать вместе с парами $(3,2)$, $(2,1)$ пара $(3,1)$ (и, следовательно, $(1,3)$). Таким образом, минимальное отношение эквивалентности, которое мы можем построить, имеет вид

$$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(1,3)\}.$$

Задача 5. Докажите, что $\boldsymbol{M} = \{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4,6,7\}\}$ - разбиение множества $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и перечислите все элементы отношения эквивалентности ρ, соответствующего разбиению $\boldsymbol{M}$.

Решение. $\boldsymbol{M}$ является разбиением множества $\boldsymbol{A}$, поскольку множества, являющиеся элементами множества $\boldsymbol{M}$, не пересекаются и при объединении дают все множество $\boldsymbol{A}$. Отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению, строится по правилу $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения, т.е.

$$\rho = \begin{Bmatrix} (1,1),(2,2),(5,5),(2,5),(5,2),(4,4),(6,6),(7,7),(4,6),(6,4), \\ (4,7),(7,4),(6,7),(7,6),(3,3) \end{Bmatrix}.$$

Задача 6. Покажите, что объединение двух отношений эквивалентности может не являться отношением эквивалентности.

Решение. На множестве $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения эквивалентности

$$\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2)(2,1)\};$$
$$\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,2)(2,3)\}.$$

Объединение данных отношений эквивалентности

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2)(2,1),(3,2),(2,3)\}$$

не является отношением эквивалентности, так как для него не выполнено свойство транзитивности ($(3,2) \in \rho_1 \cup \rho_2$, $(2,1) \in \rho_1 \cup \rho_2$, а $(3,1) \notin \rho_1 \cup \rho_2$).

Задача 7. Докажите, что отношение $\rho = \{(x, y) \in R \times R : x \le y\}$ является отношением порядка на множестве R, является ли это отношение отношением линейного порядка.

Решение. Для доказательства проверим три свойства данного отношения: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.

1. Рефлексивность.

$\forall x \in R\ x = x \Rightarrow (x, x) \in \rho$.

2. Антисимметричность.

Пусть $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow x = y$.

3. Транзитивность.

Пусть $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le z \end{cases} \Rightarrow x \le z \Rightarrow (x, z) \in \rho$.

Данное отношение является отношением линейного порядка, так как для любых $x, y \in R$ выполнено либо $x \le y$, либо $y \le x$.

Задача 8. Покажите, что композиция двух отношений частичного порядка может не являться отношением частичного порядка.

Решение. На множестве $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения частичного порядка

$\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,3),(1,3)\}$;

$\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,2),(1,2)\}$.

Однако композиция

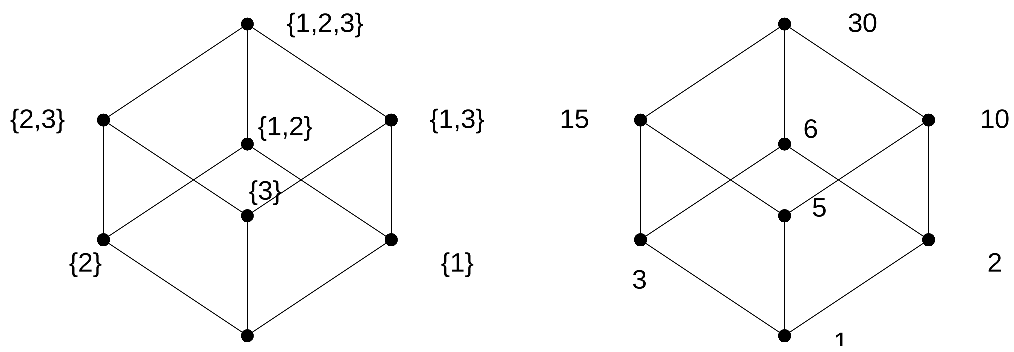
$\rho_2 \circ \rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,2),(2,3),(1,5),(5,2),(1,2)\}$

не является отношением частичного порядка, так как для него нарушено свойство транзитивности ($(5,2) \in \rho_2 \circ \rho_1$, $(2,3) \in \rho_2 \circ \rho_1$, $(5,3) \notin \rho_2 \circ \rho_1$).

Задача 9. Для следующих двух отношений частичного порядка построить диаграммы Хассе.

1. $\boldsymbol{A} = \{1,2,3\}$, $\rho_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) : x \subseteq y\}$.
2. $\boldsymbol{A} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $\rho_2 = \{(x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} : y \text{ делится на } x\}$.

Решение.



1. 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что каждое из следующих отношений является отношением эквивалентности, и найдите классы эквивалентности:

1) $\rho = \{(x, y) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) : |x| = |y|\}$, $\boldsymbol{A} = \{1,2,3\}$;

2) $\rho = \{((a,b),(c,d)) \in \boldsymbol{N}^2 \times \boldsymbol{N}^2 : a + d = b + c\}$;

3) $\rho = \{(x, y) \in R \times R : x^2 = y^2\}$;

4) $\rho = \{(x, y) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) : x + y - \textit{конечное множество}\}$, $\forall \boldsymbol{A}$;

2. На множестве $\boldsymbol{N}$ задано бинарное отношение по следующему правилу: $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда последняя цифра в десятичной записи числа x совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа y. Докажите, что данное отношение является отношением эквивалентности. Сколько элементов в фактор-множестве $\boldsymbol{N} / \rho$?

3. На R задано бинарное отношение $\rho = \{(x, y) \in R \times R : x^2 + x = y^2 + y\}$. Докажите, что ρ - отношение эквивалентности. Сколько элементов может содержать класс эквивалентности? Существует ли класс эквивалентности, состоящий из одного элемента?

4. Покажите, что пересечение отношений эквивалентности, определенных на некотором множестве $\boldsymbol{A}$, является отношением эквивалентности.

5. Докажите, что если ρ - отношение эквивалентности, то ρ^{-1} - также отношение эквивалентности.

6. Какие из следующих подмножеств множества $\boldsymbol{P}(R)$ образуют разбиение R? Для каждого разбиения задайте соответствующее отношение эквивалентности:

1) $\{\{x \in R : x > 0\}, \{x \in R : x < 0\}\}$;

2) $\{\{x \in R : x > 0\}, \{x \in R : x < 0\}, \{0\}\}$;

3) $\{(n, n+1) : n \in \boldsymbol{Z}\}$;

4) $\{[n, n+1] : n \in \boldsymbol{Z}\}$;

5) $\{(n, n+1] : n \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. Пусть $\boldsymbol{M}_1 = \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_n\}$ - два разбиения множества $\boldsymbol{K}$. Докажите, что множество всех непустых подмножеств вида

$A_i \cap B_j$ также является разбиением множества K. Какое отношение эквивалентности соответствует этому разбиению, если разбиению M_1 соответствует отношение ρ_1, а разбиению M_2 - отношение ρ_2?

8. Докажите, что отношение $\rho = \{(x, y) \in N \times N : y \text{ делится на } x\}$ является отношением порядка. Является ли это отношение отношением линейного порядка? Является ли аналогичное отношение отношением порядка, если его рассматривать на множестве Z?
9. Докажите, что отношение $\rho = \{(x, y) \in N \times N : x \text{ делится на } y \text{ или } x < y\}$ является отношением линейного порядка.
10. На множестве всевозможных разбиений данного множества рассмотрим отношение: $(M_1, M_2) \in \rho$, если для любого $A \in M_1$ существует множество $B \in M_2$ такое, что $A \subseteq B$. Докажите, что рассматриваемое отношение является отношением порядка. Является ли оно линейным порядком?
11. Перечислите всевозможные линейные порядки на множестве $\{1,2\}$, на множестве $\{1,2,3\}$. Выскажите предположение о числе линейных порядков на множестве из n элементов.
12. Пусть ρ_1 - отношение порядка на множестве A, ρ_2 - отношение порядка на множестве B. Докажите, что отношение

$$\varphi = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (A \times B) \times (A \times B) : (a_1, b_1) \in \rho_1, (a_2, b_2) \in \rho_2\}$$

есть отношение порядка.
13. Для следующего отношения порядка постройте диаграмму Хассе:
$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\rho = \{(x, y) \in A \times A : x \le y\}$.

Комбинаторика

§1. Общие правила комбинаторики

1. Правило суммы**.**

Пусть объект a можно выбрать m способами, объект b - n способами, не совпадающими со способами выбора объекта a. Тогда выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m+n$ способами.

Это правило справедливо и для большего числа объектов.

Если среди способов выбора объектов a и b есть k общих, то указанный выбор можно осуществить $m+n-k$ способами.

Задача 1. Имеется 10 билетов денежно-вещевой лотереи и 15 билетов художественной лотереи. Сколькими способами можно выбрать один лотерейный билет?

Решение**.** Билет денежно-вещевой лотереи можно выбрать 10 способами (все билеты различны), билет художественной лотереи – 15 способами. По правилу суммы выбор одного лотерейного билета можно осуществить 10+15=25 способами.

Задача 2. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать кость, на которой есть 1 или 2?

Решение**.** Выбрать кость, содержащую 1, можно 7 способами, содержащую 2 – тоже 7 способами, но среди этих способов есть один общий – это выбор кости 1:2. Значит, общее число способов выбора нужной кости считается как 7+7-1=13.

2. Правило произведения**.**

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами, то выбор пары «a и b» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача 3. Из города А в город В идет 5 дорог, из В в С – 4 дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

Решение. Весь путь их А в С состоит из 2 частей – из А в В и из В в С. Из города А в город В можно выйти 5 способами, из города В в город С – 4 способами. Общее число путей, ведущее из А в С, $5 \cdot 4 = 20$.

Задача 4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву из букв слова «компьютер»?

Решение**.** Гласную букву можно выбрать 3-мя способами. После любого выбора гласной согласную можно выбрать 5-ю способами. По правилу произведения выбор гласной и согласной можно осуществить 15-ю способами.

§2. Выборки и упорядочения

Известно, что k - выборка из некоторого множества представляет собой комбинацию из k элементов этого множества. Выборки, в которых все элементы различны, называются *выборками без повторения*, в отличие от *выборок с повторениями*, в которые могут входить одинаковые элементы. Выборка называется *упорядоченной*, если существенным является не только состав элементов в ней, но и порядок их расположения. Две упорядоченные выборки считаются *различными*, если они отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

1. Размещения**.**

Размещения без повторения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется ***размещением из n элементов по k элементов***.

Из определения вытекает, что $n \geq k \geq 0$ и что размещения из n элементов по k элементов – это все k-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Для множества, состоящего из 4-х элементов a, b, c, d, существует 24 размещения по 3 элемента:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acd	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из n элементов по k элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ A_n^k («число размещений из n по k»).

A - первая буква французского слова *arrangement,* что означает размещение, приведение в порядок. Мы уже видели, что $A_4^3 = 24$. В общем случае на вопрос о числе размещений из n элементов по k элементов дает ответ следующая формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k > 0, \tag{1}$$

т.е. ***число размещений из*** n ***элементов по*** k ***элементов равно произведению*** k ***последовательных натуральных чисел от*** n ***до*** $n-k+1$ ***включительно***.

Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Умножив и разделив произведение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)}$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2}$$

Формула (1) была получена в предположении, что $k > 0$, формулой (2) можно пользоваться и при $k = 0$, так как она и в этом случае дает правильный результат, а именно

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

При выводе формулы (1) предполагалось также, что $n \neq 0$, т.е. что данное множество имеет хотя бы один элемент. Если $n = 0$, то это означает, что рассматривается пустое множество, а так как пустое множество имеет только одно подмножество (само себя), то $A_0^0 = 1$.

Задача 5. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

Решение**.** Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у четырнадцатиэлементного множества.

Следовательно, число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5, т.е. равно A_{14}^5. По формуле (1), полагая в ней $n = 14$, $k = 5$ находим

$$A_{14}^5 = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240240.$$

Аналогичный результат получим, воспользовавшись формулой (2):

$$A_{14}^5 = \frac{14!}{(14-5)!} = \frac{14!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$$

<u>Размещением с повторением</u> называются упорядоченные выборки из n элементов с повторением и вычисляются по формуле

$$\overline{A}_n^r = n^r.$$

2. Перестановки.

Размещения из n элементов по n элементов называются ***перестановками из*** n ***элементов.***

Перестановки являются частным случаем размещения. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются только порядком элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n. P-первая буква французского слова *permutatuon* – перестановка.

В общем случае число перестановок из n элементов $P_n = A_n^n$, и, следовательно, его можно найти по формуле (1) или по формуле (2), положив в каждой из них $k = n$.

Действительно, формула (2) дает

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \qquad (3)$$

из формулы (1) находим

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n!.$$

Итак, ***число перестановок из*** n ***элементов равно*** $n!$**.** (Множество, состоящее из n элементов, можно упорядочить $n!$ способами.

Задача 6. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение**.** Для того, чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Задача 7. Найти n, если

$$\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240\, A_{n+3}^{k+3}, \quad k \le n.$$

Решение. Применяя формулу для числа перестановок и формулу (2) для числа размещений, перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{(n+5)!}{(n-k)!} = 240\frac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!}.$$

Полученное уравнение равносильно квадратному уравнению

$$(n+5)(n+4) = 240.$$

Его корни $n=11$ и $n=-20$. При $n=-20$ и левая, и правая части уравнения не имеют смысла. При $n=11$ для любого k такого, что $0 \le k \le 11$, справедливо равенство

$$\frac{P_{16}}{P_{11-k}} = 240 A_{14}^{k+3}.$$

Итак, $n=11$.

Задача 8. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова "задача" ?

Решение. Образовать какую-либо перестановку из букв слова "задача" – это значит на шесть занумерованных мест каким-либо образом поставить одну букву "з", одну букву "д", одну букву "ч" и три буквы "а". Если буквы "з", "д" и "ч" как-то поставлены, то остальные места заполняются буквами "а". Но сколькими способами можно поставить три различные буквы на шесть мест? Очевидно, что число способов равно числу всех трехэлементных упорядоченных подмножеств шестиэлементного множества, т.е. равно $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

Можно рассуждать и иначе. Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы равно 6!. Но буква "а" встречается в данном слове 3 раза, и перестановки только этих трех букв "а" не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова "задача" будет не 6!, а в 3! раза меньше, т.е.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120.$$

3. Сочетания.

<u>Сочетания без повторения</u>. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется ***сочетанием из n элементов по k элементов.***

Таким образом, сочетания из n элементов по k элементов - это все k-элементные подмножества n-элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными. Например, для четырехэлементного множества a, b, c, d сочетаниями по 3 элемента являются следующие подмножества:

$$abc, \quad abd, \quad acd, \quad bcd.$$

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k, где C - первая буква французского слова *combinasion* – сочетания. Только что было показано, что $C_4^3 = 4$.

В общем случае число сочетаний из n элементов по k элементов определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (4)$$

Сначала образуем все возможные упорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Их число равно C_n^k. Затем из каждого полученного подмножества перестановкой его элементов получим все упорядоченные подмножества, которых будет в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Итак, $A_n^k = k!\,C_n^k$, откуда и следует формула (4).

Формулу (4) можно записать в другом, более удобном для вычислений виде. Сократив числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

т.е. ***число сочетаний из*** n ***элементов по*** k ***элементов равно произведению всех натуральных чисел от*** n ***до*** $n-k+1$ ***включительно, деленному на*** $k!$**.**

Задача 8. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Решение. Очевидно, столько, сколько существует семиэлементных подмножеств у четырнадцати элементного множества. По формуле (4) находим:

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{(14-7)!\,7!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3432.$$

Задача 9. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

Решение. В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т.е. их число равно C_{18}^2. По формуле (4) получаем

$$C_{18}^2 = \frac{18!}{16!\cdot 2!} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится $2C_{18}^2 = 306$ встреч.

Задача 10. Решить неравенство

$$C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}.$$

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда x - целое число, принадлежащее отрезку $[1;11]$. Правая часть имеет смысл в том и только том случае, когда x - целое число и $x \in [0;10]$. Следовательно, решениями неравенств могут быть только целые значения x, лежащие на отрезке $[1;10]$.

Используя формулу (4), данное неравенство запишем следующим образом:

$$\frac{10!}{(x-1)!(10-x+1)!} > 2\frac{10!}{x!\,(10-x)!}.$$

Разделив обе части неравенства на $\frac{10!}{(x-1)!(10-x)!}$, получим

$$\frac{1}{11-x} > \frac{2}{x},$$

откуда $x > 22-2x$, т.е. $x > \frac{22}{3}$. Учитывая ограничения $x \in \mathbf{N}$ и $x \in [1;10]$, получаем множество решений данного неравенства: $\{8,9,10\}$.

Число C_n^k обладает многими интересными и важными свойствами. Остановимся на двух свойствах, которые часто используются.

Первое свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Применяя формулу (4), получаем

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Второе свойство: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \quad (k < n)$.

Опять используя формулу (4):

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

<u>Сочетаниями с повторениями</u> называются неупорядоченные выборки из элементов с повторениями и рассчитываются по формуле:

$$\overline{C}_{n+r-1}^{\,r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

§3. Формула включений и исключений

В основе решения многих комбинаторных задач лежит так называемая формула включений и исключений.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - подмножества некоторого множества X, тогда число элементов в объединении множеств

$$\begin{aligned}
&|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n| - \\
&- |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - ... - |X_{n-1} \cap X_n| + \\
&+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + \\
&+ ... + (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n|,
\end{aligned}$$

число элементов в множестве X, не принадлежащих объединению множеств $X_1, X_2, ..., X_n$

$$\begin{aligned}
&|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)| = |X| - |X_1| - |X_2| - ... - |X_n| + \\
&+ |X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + ... + |X_{n-1} \cap X_n| - \\
&- |X_1 \cap X_2 \cap X_3| - ... - |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| - \\
&+ ... + (-1)^{n} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n|.
\end{aligned}$$

Эти формулы носят название формул включений и исключений.

Приведем наиболее часто используемую интерпретацию данных формул. Пусть X - конечное множество, состоящее из N элементов, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - некоторые свойства, которыми могут обладать или не обладать элементы из X. Введем $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ множество $X_i = \{x \in X : x - \textit{обладает свойством } \alpha_i\}$. Обозначим для любого набора $(i_1, i_2, ..., i_k)$ $k = 1,2,...,n$ через $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}) = |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap ... \cap X_{i_k}|$ - число элементов в множестве X, обладающих одновременно свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$. Тогда, в соответствии с приведенными выше формулами включений и исключений, число элементов N_0 в множестве X, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, равно

$$N_0 = N - Z_1 + Z_2 - ... + (-1)^n Z_n,$$

где

$$Z_k = \sum_{1 \le i_1 \le ... \le i_k \le n} N(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k}), \qquad k = 1,2,...,n.$$

Задача 1. В студенческой группе 30 человек. Из них 15 человек знают английский язык, 10 - французский, 6 - немецкий, 5 - английский и французский, 3 - английский и немецкий, 3 - французский и немецкий, 2 - английский, французский и немецкий. Сколько человек в данной группе не знают ни одного языка?

Решение. Обозначим количество студентов в данной группе $\boldsymbol{N}$ и введем три свойства для студентов данной группы: α_1 - знать английский язык, α_2 - знать французский язык, α_3 - знать немецкий язык. Тогда $\boldsymbol{N}(\alpha_1)=15$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2)=10$, $\boldsymbol{N}(\alpha_3)=6$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2)=5$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3)=3$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3)=3$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. По формуле включений и исключений находим число студентов в данной группе $\boldsymbol{N}_0$, которые не знают ни одного языка

$$\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}(\alpha_1)-\boldsymbol{N}(\alpha_2)-\boldsymbol{N}(\alpha_3)+\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2)+\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3)+\boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3)-$$
$$-\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=30-15-10-6+5+3+3-2=8.$$

Задача 2. Найти количество трехзначных чисел, в которых сумма цифр равняется 20.

Решение**.** Обозначим через x_1,x_2,x_3 соответственно первую, вторую и третью цифры в произвольном трехзначном числе

$$a=x_1\cdot 10^2+x_2\cdot 10+x_3.$$

Наша задача состоит в нахождении количества целочисленных наборов (x_1,x_2,x_3), для которых

$$x_1+x_2+x_3=20,$$
$$1\le x_1\le 9,\quad 0\le x_2\le 9,\quad 0\le x_3\le 9.$$

Обозначим через $\boldsymbol{X}$ множество наборов (x_1,x_2,x_3), у которых

$$x_1+x_2+x_3=20,$$
$$x_1\ge 1,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

и для элементов данного множества введем три свойства: α_1 - $x_1\ge 10$, α_2 - $x_2\ge 10$, α_3 - $x_3\ge 10$. Таким образом, в задаче требуется найти множество наборов, для которых не выполнено ни одно из этих свойств.

Вначале найдем количество элементов $\boldsymbol{N}$ в множестве $\boldsymbol{X}$. Если ввести переменные $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$, то число элементов в множестве $\boldsymbol{X}$ можно найти как число целочисленных наборов (y_1,y_2,y_3) таких, что

$$y_1+y_2+y_3=19,$$
$$y_1\ge 0,\quad y_2\ge 0,\quad y_3\ge 0.$$

Число таких наборов находится по формуле для числа сочетаний с повторениями из 3 по 19, т.е.

$$\boldsymbol{N}=\overline{C}_3^{19}=C_{19+3-1}^{19}=\frac{21!}{19!2!}=10\cdot 21=210.$$

Число $\boldsymbol{N}(\alpha_1)$ совпадает с числом наборов (x_1,x_2,x_3), для которых

$$x_1+x_2+x_3=20,$$
$$x_1\ge 10,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_2)$ - с числом наборов (x_1,x_2,x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 10, \quad x_3 \geq 0,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_3)$ - с числом наборов (x_1, x_2, x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 10,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2)$ - с числом наборов (x_1, x_2, x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 10, \quad x_2 \geq 10, \quad x_3 \geq 0,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_3)$ - с числом наборов (x_1, x_2, x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 10, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 10,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_2, \alpha_3)$ - с числом наборов (x_1, x_2, x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 10, \quad x_3 \geq 10,$$

число $\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - с числом наборов (x_1, x_2, x_3), для которых

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

$$x_1 \geq 10, \quad x_2 \geq 10, \quad x_3 \geq 10.$$

Используя подходящие замены переменных и формулу для числа сочетаний с повторениями, найдем

$$\boldsymbol{N}(\alpha_1) = \overline{C}_3^{20-10} = C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!2!} = 66,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_2) = \overline{C}_3^{20-11} = C_{9+3-1}^{9} = C_{11}^{9} = \frac{11!}{9!2!} = 55,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_3) = \overline{C}_3^{20-11} = C_{9+3-1}^{9} = C_{11}^{9} = \frac{11!}{9!2!} = 55,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2) = \overline{C}_3^{20-20} = 1,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_3) = \overline{C}_3^{20-20} = 1,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_2, \alpha_3) = \overline{C}_3^{20-21} = 0,$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0.$$

Итак,

$$\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}(\alpha_1) - \boldsymbol{N}(\alpha_2) - \boldsymbol{N}(\alpha_3) + \boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2) + \boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_3) + \boldsymbol{N}(\alpha_2, \alpha_3) -$$
$$- \boldsymbol{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 210 - 66 - 55 - 55 + 1 + 1 = 36.$$

Задача 3. К обеду за круглым столом приглашены 4 пары враждующих рыцарей. Сколькими способами их можно разместить за столом так, чтобы никакие из двух враждующих рыцарей не сидели рядом?

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{X}$ множество всевозможных размещений рыцарей за столом и введем три свойства для элементов данного множества:

α_1 - первая пара враждующих рыцарей сидит рядом, α_2 - вторая пара враждующих рыцарей сидит рядом, α_3 - третья пара враждующих рыцарей сидит рядом, α_4 - четвертая пара враждующих рыцарей сидит рядом. Теперь наша задача найти число $\boldsymbol{N}_0$ элементов в множестве $\boldsymbol{X}$, которые не обладают ни одним из введенных свойств.

Число элементов $\boldsymbol{N}$ в множестве $\boldsymbol{X}$ равно числу перестановок без повторений из 8 элементов $\boldsymbol{N} = 8!$. Для вычисления чисел $\boldsymbol{N}(\alpha_1)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_3)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_4)$ мы рассматриваем соответствующую пару враждующих рыцарей как один объект и находим всевозможные перестановки 7 объектов, учитывая при этом порядок рыцарей внутри объединенной пары. Поэтому,

$$\boldsymbol{N}(\alpha_1) = \boldsymbol{N}(\alpha_2) = \boldsymbol{N}(\alpha_3) = \boldsymbol{N}(\alpha_4) = 2 \cdot 7!.$$

Числа $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_4)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_4)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_3,\alpha_4)$ находятся аналогично. Объединяются в одно целое по две пары враждующих рыцарей и находятся всевозможные перестановки из 6 объектов, при этом учитывается порядок внутри объединенных пар:

$$\boldsymbol{N}(\alpha_i,\alpha_j) = 2 \cdot 2 \cdot 6! \quad i, j = 1,2,3,4,\ i < j.$$

Аналогично, при нахождении $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$, $\boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_{43})$ объединяются в один объект по три пары враждующих рыцарей и находятся всевозможные перестановки из пяти объектов с учетом порядка внутри объединенных пар. Все эти величины равны между собой и равны $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5!$.

Последняя искомая величина $\boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4!$.

Итак,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}(\alpha_1) - \boldsymbol{N}(\alpha_2) - \boldsymbol{N}(\alpha_3) - \boldsymbol{N}(\alpha_4) - \\
&+ \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2) + \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3) + \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_4) + \boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3) + \boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_4) + \boldsymbol{N}(\alpha_3,\alpha_4) - \\
&- \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4) - \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4) - \boldsymbol{N}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) + \\
&+ \boldsymbol{N}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 8! - 4 \cdot 2 \cdot 7! + 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6! - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5! - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4!
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать тождества:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad n \geq 0;$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1};$

c) $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$;

d) $\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}$.

2. Доказать, что:

a) $\frac{\left(C_{n+1}^{r+1} - C_n^r\right)C_{n-1}^{r-1}}{\left(C_n^r\right)^2 - C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}} = r, \quad n > 1, \quad 0 < r < n$;

b) $\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \frac{2}{n+1}, \quad n \geq 1$;

c) $\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}, \quad n \geq 1$.

3. Найти n, если:

a) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 15(n+2)$;

b) $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$;

c) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$;

d) $(n+2)! = 132 A_n^k P_{n-k}$;

e) $C_{n+3}^{n+1} - 5C_{3n}^2 + 19n^2 = 6$;

f) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{143}{4P_n}$;

g) $8C_{105}^n < 3C_{105}^{n+1}$.

4. Найти множество значений функций:

a) $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$;

b) $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$.

5. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:
   a) все путевки различны;
   b) все путевки одинаковы?

6. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая:
   a) шары одного цвета не отличимы друг от друга;
   b) все шары разные.

7. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:
   a) один из них должен быть старшим;
   b) старшего быть не должно?

8. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?
9. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
10. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй – 4, а четвертый – 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?
11. Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.
12. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?
13. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?
14. Автомобильные номера состоят из трех букв (используются только те буквы латинского алфавита, написание которых совпадает с буквами русского алфавита) и трех цифр (используются все 10 цифр). Сколько

автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

15. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

16. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

17. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть пять занятий: по алгебре, геометрии, истории, географии, литературе, причем алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

18. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова ИНТЕГРАЛ?

19. Рассмотрим слово ФРАГМЕНТЫ. Сколько совокупностей из букв, не повторяя их, можно образовать, беря

a) все буквы;

b) восемь букв;

c) две буквы?

20. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: *зебра, баран, водород, абракадабра?*

21. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

22. На конференции должны выступить докладчики A, B, C и D, причем B не может выступать раньше A. Сколькими способами можно установить очередность выступлений?

23. Сейф запирается на замок, состоящий из пяти дисков, на каждом из которых изображены числа 0, 1, 2, …, 9. Замок открывается, если на дисках набрана одна определенная комбинация цифр. Хватит ли 10 дней на открытие сейфа, если «рабочий день» продолжается 13 часов, а на набор одной комбинации цифр уходит 5 секунд?

24. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трем комнатам, если в первую можно поместить 2, во вторую 6, в третью 4 человека?

25. У денди 14 перчаток. Сколькими способами можно выбрать одну левую перчатку и одну правую так, чтобы они были не из одной пары?

26. Экзамен состоит из 10 вопросов, три из них по математике. Сколькими способами можно поставить 10 вопросов так, чтобы никакие два вопроса не следовали один за другим?
27. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется:
a) хотя бы один туз;
b) ровно один туз;
c) не менее двух тузов;
d) ровно два туза?
28. Сколькими способами можно вытащить 13 карт из колоды в 52 карты, если:
a) карта после вытаскивания возвращается обратно;
b) карта не возвращается?
29. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?
30. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф)?
31. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть по одному юноше?
32. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест на каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, 3 спиной к паровозу, остальным 3-м безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?
33. Найти количество целых положительных чисел, не превосходящих 200 и не делящихся ни на одно из простых чисел 7, 11, 13.
34. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, …, 10. Из нее вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел равна 9? Не меньше 9?
35. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?
36. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 6 участников, так, чтобы каждый день были различные составы хора?

37. Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами может он это сделать?

38. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между этими предприятиями?

39. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как ***пресс*** или ***ссора***, не допускаются?

40. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 35 человек?

41. Имеется пять различных предметов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и пять различных ячеек b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Сколькими способами можно разложить предметы по ячейкам так, чтобы никакой предмет a_i не попал в ячейку b_j?

42. Определить количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40$$

$$4 \le x_1 \le 15, \quad 9 \le x_2 \le 18, \quad 5 \le x_3 \le 16 .$$

43. Сколькими способами можно переставлять цифры числа 232423434 так, чтобы никакие три одинаковые цифры не стояли рядом ?

Рекуррентные соотношения

При решении многих комбинаторных задач часто пользуются методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. ***Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений.*** Пользуясь рекуррентными соотношениями, можно свести задачу об n предметах к задаче об $n-1$ предметах, потом к задаче об $n-2$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить.

В книге “Liber Abaci” итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привел следующую: пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будет $F(n)$ и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, то есть еще $F(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Так как по условию $F(0)=1$ и $F(1)=2$, то последовательно находим

$$F(2)=3, \quad F(3)=5, \quad F(4)=8 \text{ и т.д.}$$

Числа $F(n)$ ***называются числами Фибоначчи***.

§ 1. Решение рекуррентных соотношений

Будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Например,

$$f(n+2) = f(n)f(n+1) - 3f^2(n+1) + 1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n+3) = 6f(n)f(n+2) + f(n+1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k-го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первые k

элементов последовательности можно задать совершенно произвольно — между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно — элемент $f(k+1)$ выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1),\ldots,f(k)$, элемент $f(k+2)$ — через $f(2),\ldots,f(k+1)$ и т.д.

Будем говорить, что некоторая последовательность является ***решением*** данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется. Например, последовательность

$$2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$$

является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n)=2^n$. Значит, $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$. Но при любом n имеет место тождество $2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n$. Поэтому 2^n является решением указанного соотношения.

Решением рекуррентного соотношения k-го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1,\ldots,C_k$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \tag{1}$$

общим решением будет

$$f(n)=C_1 2^n+C_2 3^n. \tag{2}$$

В самом деле, легко проверить, что последовательность обращает соотношение в тождество. Поэтому нам надо только показать, что любое решение нашего соотношения можно представить в виде (2). Но любое решение соотношения (1) однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому нам надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения C_1 и C_2, что

$$2C_1+3C_2=a$$

и

$$2^2C_1+3^2C_2=b.$$

Но легко видеть, что при любых значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases}2C_1+3C_2=a,\\ 4C_1+9C_2=b\end{cases}$$

имеет решение. Поэтому (2) действительно является общим решение соотношения (1).

§2. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил не существует. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемых единообразным методом. Это – рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - некоторые числа. Такие соотношения называются ***линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.***

Рассмотрим, как решаются такие соотношения при $k = 2$, то есть изучим соотношения вида

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \tag{3}$$

Решение этих соотношений основано на следующих двух утверждениях:

1) Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (3), то при любых A и B последовательность $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ также является решением этого соотношения. В самом деле, по условию имеем

   $$f_1(n+2) = a_1 f_1(n+1) + a_2 f_1(n)$$

   и

   $$f_2(n+2) = a_1 f_2(n+1) + a_2 f_2(n) \ .$$

   Умножим эти равенства на A и B соответственно и сложим полученные тождества. Мы получим, что

   $$\begin{aligned} &Af_1(n+2) + Bf_2(n+2) = a_1[Af_1(n+1) + Bf_2(n+1)] + \\ &+ a_2[Af_1(n) + Bf(n)] \end{aligned}.$$

   Это означает, что $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ является решением нашего соотношения.

2) Если число r_1 является корнем квадратного уравнения

   $$r^2 = a_1 r + a_2,$$

   то последовательность

   $$1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^{n-1}, \ldots$$

   является решением рекуррентного соотношения

   $$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

   Наряду с последовательностью $\left\{r_1^{n-1}\right\}$ любая последовательность вида

   $$f(n) = r_1^{n+m}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   также является решением исследуемого соотношения.

Из утверждений 1) и 2) вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Пусть дано рекуррентное соотношение

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

Составим квадратное уравнение

$$r^2 = a_1 r + a_2,$$

которое называется характеристическим для данного соотношения. Если это уравнение имеет два различных корня r_1 и r_2, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-2}.$$

Действительно, по утверждению 2) $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = r_2^{n-1}$ являются решениями нашего соотношения. По утверждению 1) и $f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-2}$ является его решением. Надо показать, что любое решение соотношения можно записать в этом виде. Но любое решение линейного рекуррентного соотношения второго порядка определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = b \end{cases}$$

имеет решение при любых a и b. Этими решениями являются

$$C_1 = \frac{b - a r_2}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{a r_1 - b}{r_1 - r_2}.$$

Случай, когда оба корня уравнения $r^2 = a_1 r + a_2$ совпадают друг с другом, мы разберем несколько позже. Рассмотрим пример.

При изучении чисел Фибоначчи мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 = r + 1.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

§ 3. Случай равных корней характеристического уравнения

Остановимся теперь на случае, когда оба корня характеристического уравнения совпадают: $r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ уже не будет общим решением. Ведь из-за того, что $r_1 = r_2$, это решение можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2) r_1^{n-1} = C r_1^{n=1}.$$

У нас остается только одно произвольное постоянное C, и выбрать его так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям $f(1) = a, f(2) = b$, вообще говоря, невозможно.

Поэтому надо найти какое-нибудь второе решение отличное от $f_1(n) = r_1^{n-1}$. Оказывается, таким решением является $f_2(n) = n r_1^{n-1}$. В самом деле, если квадратное уравнение $r^2 = a_1 r + a_2$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2$, то по теореме Виета $a_1 = 2r_1, a_2 = -r_1^2$. Поэтому наше уравнение записывается так:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2.$$

Тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n). \tag{4}$$

Проверим, что $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ действительно является его решением. Имеем $f_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+1}$, а $f_2(n+1) = (n+1) r_1^n$. Подставляя эти значения в соотношение (4), получаем очевидное тождество

$$(n+2) r_1^{n+1} = 2(n+1) r_1^{n+1} - n r_1^{n+1}.$$

Значит, $n r_1^{n-1}$ — решение нашего соотношения.

Теперь уже знаем два решения $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ заданного соотношения. Его общее решение пишется так:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 n r_1^{n-1} = r_r^{n-1}(C_1 + C_2 n).$$

Путем подбора C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n).$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Если все корни $r_1, \ldots, r_k$ этого алгебраического уравнение k-й степени различны, то общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_k r_k^{n-1}.$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n)=r_1^{n-1},\ f_2(n)=nr_1^{n-1},\ f_3(n)=n^2 r_1^{n-1}, \ldots,\ f_s(n)=n^{s-1}r_1^{n-1}$$

рассматриваемого рекуррентного соотношения. В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1}\left[C_1+C_2 n+C_3 n^2+\ldots+C_s n^{s-1}\right].$$

Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение.

Например, решим рекуррентное соотношение

$$f(n+4)=5f(n+3)-6f(n+2)-4f(n+1)+8f(n).$$

Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$r^4-5r^3+6r^2+4r-8=0.$$

Решая его, получаем корни

$$r_1=2,\ r_2=2,\ r_3=2,\ r_4=-1.$$

Значит, общее решение нашего соотношения имеет следующий вид:

$$f(n)=2^{n-1}\left[C_1+C_2 n+C_3 n^2\right]+C_4(-1)^{n-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения $f(n+2)=2f(n+1)-3f(n)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

a) $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=8 \end{cases}$

2. Проверить, являются ли данные функции решениями данных рекуррентных соотношений:

a) $f(n+2)=2f(n+1)-f(n);$
$\varphi_1(n)=5\cdot 2^n,\ \varphi_2(n)=2n+1,\ \varphi_3(n)=3.$

b) $f(n+2)=4f(n+1)-3f(n);$
$\varphi_1(n)=2n, \varphi_2(n)=5\cdot 3^n-1,\ \varphi_3(n)=7$

3. Найти общее решение рекуррентных соотношений:
   a) $f(n+2)-7f(n+1)+12f(n)=0$;
   b) $f(n+2)+3f(n+1)-10f(n)=0$;
   c) $f(n+2)-4f(n+1)+13f(n)=0$;
   d) $f(n+2)+9f(n)=0$;
   e) $f(n+2)+4f(n+1)+4f(n)=0;$
   f) $f(n+3)-9f(n+2)+26f(n+1)-24f(n)=0;$

g) $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0;$

h) $f(n+4)+4f(n)=0.$

4. Найти $f(n)$, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

a) $f(n+2)-5f(n+1)+6f(n)=0, \quad f(1)=1, f(2)=-7,$

b) $f(n+2)-4f(n+1)+4f(n)=0, \quad f(1)=2, f(2)=4,$

c) $f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0, \quad f(1)=-\frac{1}{4}, f(2)=-\frac{1}{2}.$

d) $f(n+2)=2f(n+1)-f(n); \quad f(1)=2; \quad f(2)=4;$

e) $f(n+2)=4f(n+1)+5f(n); \quad f(1)=1; \quad f(2)=5;$

f) $f(n+2)=6f(n+1)-9f(n); \quad f(1)=0; \quad f(2)=3;$

g) $f(n+2)=2f(n)-f(n+1); \quad f(1)=1; \quad f(2)=2;$

h) $f(n+2)=8f(n+1); \quad f(1)=4;$

5. Привести пример линейного рекуррентного соотношения 2-го порядка, среди решений которого имеются следующие функции:

a) $\varphi(n)=3^n;$ b) $\varphi(n)=3\cdot 2^n-5^n;$

c) $\varphi(n)=2^n-1;$ d) $\varphi(n)=n-17;$

6. Найти такую последовательность, что $f(1)=\cos\alpha, f(2)=\cos 2\alpha$ и

$$f(n+2)-2\cos\alpha\, f(n+1)+f(n)=0.$$

7. Найти последовательность такую, что

$$f(n+2)+2f(n+1)-8f(n)=2^n.$$

8. Проанализировать рекуррентное соотношение (1), если известно, что один из корней уравнений (3) равен нулю. Каков порядок этого рекуррентного соотношения? Доказать, что его общее решение в данном случае имеет вид: $\varphi(n,C)=C_1a_1^n$. Что можно сказать о решении рекуррентного соотношения (1), если оба корня уравнения (3) равны нулю?

9. Последовательность Фибоначчи задается следующим рекуррентным соотношением: $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$ и начальными условиями $F(1)=F(2)=1$. Найти общий член этой последовательности. Выписать первые 10 чисел Фибоначчи. Доказать, что для любых натуральных m и n справедливы соотношения:

a) $F(n+m)=F(n-1)F(m)+F(n)F(m+1)$

b) $F(1)+F(3)+\ldots+F(2n+1)=F(2n+2)$

c) $1+F(2)+F(4)+\ldots+F(2n)=F(2n+1)$

Указание: применить метод математической индукции

Литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.:МАИ,1992. – 292 с.
3. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.:Просвещение.1993. – 287 с.
4. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975. – 479 с.

Азарнова Татьяна Васильевна
Булгакова Ирина Николаевна

Редактор Тихомирова О.А.