ИГУМО ИНСТИТУТ ГУМАНИТАРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В. И. Соловьев, В. Н. Калинина

Математика в общественной сфере

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ СТУДЕНТА

Москва – 2005

УДК 51 (075.8)
ББК 22.17я73

Ф., и., о. студента

(факультет)

(группа)

С 60 **Соловьев В. И., Калинина В. Н.** Математика в общественной сфере: Рабочая тетрадь студента. – М., 2005. – 131 с.

Дано краткое изложение основ математической логики, теории вероятностей, математической статистики, методов оптимизации и финансовой математики в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальностям социальных наук.

Все рассматриваемые методы иллюстрируются практическими примерами из области юриспруденции, социологии, экономики, связей с общественностью и других социальных наук, которые доводятся до числовых результатов и содержательной интерпретации.

Для студентов вузов, обучающихся по социальным специальностям. Может быть полезно преподавателям и аспирантам.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая рабочая тетрадь по дисциплине «Математика» составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по связям с общественностью, социологии, политологии, юриспруденции, журналистике и др.

В соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования учебными планами социальных и гуманитарных специальностей предусмотрено изучение математики. Необходимой составляющей успешной подготовки специалистов является разнообразие рассматриваемых содержательных практических задач из будущей предметной области, требующих применения математических методов.

Особенностью данной книги является ее прикладная направленность: изложение теоретического материала подкрепляется разобранными примерами применения математических методов в конкретных профессиональных и жизненных ситуациях и задачами для самостоятельного решения. В процессе решения таких задач студент не только закрепляет и углубляет теоретические знания, но и учится применять эти знания при постановке и решении реальных задач. В предлагаемом пособии приложения математических методов выходят на первый план, серьезный акцент делается не столько на методы решения задач, сколько на построение математических моделей, анализ и содержательную интерпретацию полученных результатов.

Данная книга содержит материал дисциплины, посвященной, прежде всего, основам математической логики, теории вероятностей, математической статистики, методов оптимизации и финансовой математики.

Тетрадь состоит из глав и разделов, примеры, теоремы, рисунки, таблицы и формулы имеют сквозную нумерацию. В конце каждого раздела приводятся задачи для решения на практических занятиях и дома. По итогам изучения дисциплины студент должен выполнить индивидуальное контрольное задание, которое приводится в конце рабочей тетради. Для решения задач на практических занятиях, выполнения домашних заданий и индивидуального контрольного задания в рабочей тетради отведены чистые страницы.

Работа авторов распределилась следующим образом: В. И. Соловьев подготовил материал введения, глав 3 и 4, а также задачи к главам 1 и 2 и контрольные задания, В. Н. Калинина подготовила главы 1 и 2.

ВВЕДЕНИЕ

Математика изучает количественные отношения в реальном мире.

Неизвестно, когда она зародилась, но самостоятельное положение как наука математика заняла в Древней Греции приблизительно в VI–V вв. до нашей эры. Геометрия Евклида – первая естественнонаучная дисциплина – сделалась образцом построения естественно-научной теории. К XVII в. нашей эры методы математики развились настолько, что позволили описывать процессы движения физических тел.

В становлении математики существенную роль сыграли труды Архимеда, Евклида, Р. Декарта, И. Ньютона, Г. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Гаусса, О. Коши.

Дальнейшее ее развитие происходило благодаря идеям выдающихся российских математиков: Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышёва, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, А. Н. Колмогорова, Л. В. Канторовича, М. А. Лаврентьева, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова и многих других; современная российская математическая школа занимает ведущее место в мире.

Сейчас без математики немыслимы и естественно-научные дисциплины: физика, химия, биология, психология, и общественные: социология, политология, история.

Многие из читателей этой книги выбирали такую специальность, в которой, по их мнению, математика не нужна и изучать ее не придется.

Отметим, что еще 100–150 лет назад многие серьезно сомневались, должен ли физик владеть математикой. Сейчас ответ на этот вопрос не вызывает сомнений. Обсудим, зачем нужна математика специалисту в области общественного знания, какая и в каком объеме.

Зачем математика нужна **историку,** красноречиво демонстрирует следующий пример, заимствованный из книги [17].

После окончания Великой Отечественной войны в одном из Потсдамских архивов было обнаружено семь мешков с письмами солдат шестой армии рейха, попавшей под Сталинградом в окружение в январе 1943 г. Фашистская военная цензура задержала эти письма для изучения настроения солдат. Показательны отдельные выдержки: «Прекрасные деревни сожжены и сделаны пепелищами. Пустые поля не вспаханы. Но самое страшное, что погибло так много людей»; «Я не трус, но мне грустно, что приходится умирать за бессмысленное, преступное дело». Но как охарактеризовать настроение солдат в целом?

Всех авторов писем разделили на пять категорий:

- отправители, положительно относящиеся к военному руководству (таких оказалось 2,1%);
- отправители без определенных позиций (33%);
- сомневающиеся (4,4%);
- неверящие (57%);
- оппозиционно настроенные (4,4%).

Эти цифры настолько красноречиво характеризуют мрачную картину, что их даже не рискнули довести до высшего командования гитлеровской армии.

Та же идея лежит в основе контент-анализа, метода, активно используемого **в социологии, политологии, истории.**

Идея этого метода состоит в том, что в текстах выделяются различные смысловые единицы и подсчитываются количества их появления.

Например, Л. Лоуэнталь в 1953 г. опубликовал результаты исследования сознания «среднего американца» по характеру публикаций в массовых изданиях биографий «видных американцев». В качестве смысловых единиц были выбраны области деятельности тех, чьи биографии публиковались: политических деятелей (политика), бизнесменов (экономика), артистов и писателей (сфера развлечений).

Приведем фрагмент результатов исследования (в каждом столбце этой таблицы указан процент публикаций в данный период времени биографий персонажей, относящихся к указанной области деятельности):

Период публикаций / Область деятельности рекламируемых персонажей	1901–1914	1922–1930	1930–1934	1940–1941
Политика	46	28	31	25
Экономика	28	18	14	20
Сфера развлечений	26	54	55	55
Итого	100	100	100	100

Обратим внимание лишь на два момента. В 20-е гг. XX в. США охватил серьезнейший экономический кризис, Великая депрессия. При этом число публикаций экономического характера в три раза меньше, чем публикаций в сфере развлечений.

Начало тридцатых годов, фашизм поднимает голову, а сфере развлечений уделяется почти в два раза больше внимания, чем политике. А что интересует «среднего американца» в начале сороковых годов? Политика? Нет, и в эти годы сфера развлечений сохраняет абсолютное первенство…

Перевод документа на формально-логический язык, с которым мы познакомимся в первой главе, позволит специалисту проанализировать неоднозначности и двусмысленности, что особенно важно **в юридической практике**.

А вот пример применения математики в филологии. Известно несколько вариантов финала драмы А. С. Пушкина «Русалка». У каждого писателя и поэта свой специфический частотный словарь с индивидуальной частотой повторения различных слов. Математические методы позволяют определить, случайны или нет различия и сходства частотных словарей в разных текстах.

Оказалось, что частотный словарь начала «Русалки» полностью идентичен частотному словарю А. С. Пушкина, но у всех вариантов финала частотные словари оказались совершенно непохожи на пушкинский.

Особенно важно применение количественных методов **в экономических науках**: как теоретических, так и практических. Большинство Нобелевских премий в области экономики присуждается за применение математических методов к анализу экономических, управленческих и финансовых проблем (как известно, в области математики Нобелевская премия не присуждается, но математики получают эту премию, как правило, в области экономики).

Роль математики в современной науке и практике сейчас заключается, прежде всего, в предоставлении специалистам универсального логически строгого языка как средства точной и четкой формулировки проблем и интерпретации результатов их решения, а также инструмента как количественного, так и качественного исследования.

Можно ли вовсе обойтись без математики?

Количественные методы исследования, действительно, сложны, их невозможно освоить быстро. Поэтому многие, не справившись с первой попытки с трудным делом – изучением математики, оправдывают себя «бесполезностью этой науки лично для них».

На наш взгляд, математикой нужно овладеть в таком же объеме, как иностранным языком или вождением автомобиля: нужно (как минимум) владеть достаточным словарным запасом и уметь излагать свои мысли и понимать других на иностранном языке, а детально знать теоретическую грамматику необязательно; в случае с автомобилем нужно иметь навыки практического вождения, а как устроен двигатель внутреннего сгорания можно и не знать.

Именно такой подход применяется в данной рабочей тетради. Мы рассматриваем математику как науку о математических моделях реального мира. С такими моделями различных областей общественной жизни мы постоянно будем знакомиться в нашем курсе.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Математическая логика – современный вид формальной логики, изучающей правила выведения следствий из различных посылок, истинность которых очевидна. Математическая логика возникла в середине XIX в. для потребностей математики и стала применяться в самых различных областях знаний, в том числе и в политической, социологической и правоприменительной деятельности.

Основным понятием математической логики является понятие *высказывания* (высказывания будем обозначать латинскими буквами: *a, b, c,* …). Любое высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным. Какой из этих случаев имеет место? При ответе на этот вопрос надо учитывать тот факт, что одно и тоже высказывание может быть истинным в одних условиях и ложным в других. Например, *значение истинности* (т. е. истинность или ложность) высказывания «в Российской Федерации применяется пропорциональная избирательная система» определяется действующим законодательством.

1.1. Связки и таблицы истинности

Различают п р о с т ы е и с о с т а в н ы е высказывания. Высказывание «наследники умершей – ее муж и сын» – составное, в то время как высказывания «наследник умершей – ее муж» и «наследник умершей – ее сын» простые. Связывание простых высказываний в составные осуществляется логическими операциями, называемыми *связками*. Рассмотрим следующие связки: конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, импликацию и двойную импликацию.

Обозначим символами a и b два какие-либо высказывания.

Конъюнкцией высказываний a и b называется высказывание $a \wedge b$ («a и b») истинное, если истинно каждое из высказываний a и b, в противном случае $a \wedge b$ ложно. Высказывание «социолог должен знать информатику и математику» является конъюнкцией высказываний: a = «социолог должен знать информатику» и b = «социолог должен знать математику». Зависимость значения истинности составного высказывания от значений истинности его компонент представляется *таблицей истинности.* Таблица истинности высказывания $a \wedge b$ изображена на рис.1.

a	b	$a \wedge b$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Рис. 1

Дизъюнкцией высказываний a и b называется высказывание $a \vee b$ («a или b», иначе «a либо b») истинное, когда хотя бы одно из высказываний a, b истинно, и ложное, когда оба высказывания ложны (см. рис. 2, *а*). Неоднозначность первой строки рис. 2, *а* объясняется тем, что обиходное употребление связки «или» двусмысленно: если «или» понимать в смысле «одно или другое или оба», то при истинности обоих высказываний a и b будет истинно высказывание $a \vee b$; если же «или» понимать в смысле «одно или другое, но не оба», то одновременная истинность a и b невозможна, т. е. при истинности a и b высказывание $a \vee b$ будет ложно. Например, в высказывании «договор может быть заключен в устной или письменной форме» допускается возможность заключения договора не только в какой-то одной форме, но и в обоих. А в высказывании «5 марта я поеду на шахматный турнир в Москву или во Владивосток» исключено посещение обоих турниров одновременно. В математической логике для устранения двусмысленности связки «или» введены термины:

- *дизъюнкция в неисключающем смысле* – это дизъюнкция $a \vee b$, истинная при истинности не только одного из высказываний a или b, но и обоих (иначе, при истинности не менее одного из двух высказываний; иначе, при истинности по крайней мере одного из двух высказываний; иначе, при истинности хотя бы одного из двух высказываний); ее таблица истинности приведена на рис. 2, *б*;
- *дизъюнкция в исключающем смысле* (обозначим ее $a \veebar b$) – это дизъюнкция, истинная при истинности только одного из высказываний a или b, но не обоих; ее таблица истинности изображена на рис. 2, *в*.

a	b	$a \vee b$
и	и	и (л)?
и	л	и
л	и	и
л	л	л

а)

a	b	$a \vee b$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

б)

a	b	$a \veebar b$
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	л

в)

Рис. 2

Отрицанием высказывания a называют высказывание $\sim a$ («не a» или «неверно, что a»), отрицающее a. Таблица истинности высказывания $\sim a$ изображена на рис. 3.

a	$\sim a$
и	л
л	и

Рис. 3

Импликацией высказываний a и b называется высказывание $a \to b$ («если a, то b»), ложное, когда a истинно, но b ложно, а в остальных случаях истинное. Таблица истинности высказывания $a \to b$ изображена на рис. 4. Ее первые две строки: «если как a так и b истинны, то $a \to b$ истинно», «если a истинно, а b ложно, то $a \to b$ ложно» очевидны. При a ложном, значение истинности высказывания $a \to b$, вообще говоря, неопределенно, но поскольку каждое высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, считается что при a ложном высказывание $a \to b$ истинно (см. третью и четвертую строки на рис. 4); основанием для принятия такого решения может служить как бы оправдание при a ложном импликации $a \to b$ «за недостаточностью улик».

В юридических текстах в форме импликаций формулируют правовые предписания, разрешения и т. д.; например: «Если договор поднайма заключен без указания срока, наниматель обязан предупредить поднанимателя о прекращении договора поднайма за три месяца» (ч.2 ст. 80 Жилищного кодекса РСФСР). Отметим, что импликация $a \to b$ при отсутствии смысловой связки между a и b звучит странно. Так, странно звучат импликации: «если $2 \cdot 2 = 4$, то $3+2 = 6$» и «если $3+2 = 6$, то $2 \cdot 2 = 4$», первая из которых ложна (см. вторую строку на рис. 4), а вторая истинна (см. третью строку на рис. 4). Но связка «если a, то b», не означает никакой причинно-следственной связи, не означает, что из a следует b (отношение следования рассматривается ниже): просто $a \to b$ – это новое высказывание, образованное из a и b. Поэтому рассмотренные парадоксальные импликации имеют право на существование.

Двойной импликацией высказываний a и b называется высказывание $a \leftrightarrow b$ («b, если и только если a»); не путать с одинарной импликацией $a \to b$ («если a, то b»). Высказывание «b, если и только если a» означает истинность двух высказываний: «если a истинно, то и b истинно» и « если a ложно, то и b ложно». Поэтому двойная импликация $a \leftrightarrow b$ истинна только в этих случаях и ложна в остальных (см. рис. 5).

a	b	$a \to b$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Рис. 4

a	b	$a \leftrightarrow b$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Рис. 5

Форму двойной импликации имеет, например, высказывание «совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию ($= b$), *если и только если* возраст совершившего уголовное преступление не меньше 14 лет ($= a$)». Очевидно, что истинны высказывания: «*если* возраст … не меньше 14 лет, *то* … подлежит … наказанию» (рис. 5, первая строка) и «*если* возраст … меньше 14 лет, *то* не подлежит … наказанию» (рис. 5, четвертая строка), и ложны высказывания: «*если* возраст … не меньше 14 лет, *то* … не подлежит… наказанию» (рис. 5, вторая строка) и «*если* возраст … меньше 14 лет, *то* … подлежит … наказанию» (рис. 5, третья строка).

Покажем, как строятся таблицы истинности составных высказываний. Последовательность построения таблицы для высказывания $(a \to b) \leftrightarrow (\sim a \vee b)$, компонентами которого являются простые высказывания a и b, приведена на рис. 6.

Замечание. Высказывания, в которых присутствуют скобки, следует читать подобно алгебраическим выражениям. В данном случае сначала выполняется связка $a \to b$, стоящая в первой скобке, затем $\sim a$, затем связка $\sim a \vee b$ и наконец связка «$\leftrightarrow$».

Окончательно, при любой комбинации значений истинности высказываний a и b (см. первые два столбца на рис. 6), высказывание $(a \to b) \leftrightarrow (\sim a \vee b)$ всегда истинно.

a	b	$a\to b$	$\sim a$	$\sim a\vee b$	$a\to b$	$\sim a\vee b$	$(a\to b)\leftrightarrow(\sim a\vee b)$
и	и	и	л	и	и	и	и
и	л	л	л	л	л	л	и
л	и	и	и	и	и	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и

Рис. 6

Последовательность построения таблицы истинности высказывания

$$\sim((\sim a\wedge\sim b)\wedge(a\vee c)),$$

состоящего из трех простых высказываний *a, b, c*, приведена на рис.7.

a	b	c	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a\wedge\sim b$	$a\vee c$	$(\sim a\wedge\sim b)\wedge(a\vee c)$	$\sim((\sim a\wedge\sim b)\wedge(a\vee c))$
и	и	и	л	л	л	и	л	и
и	и	л	л	л	л	и	л	и
и	л	и	л	и	л	и	л	и
л	и	и	и	л	л	и	л	и
и	л	л	л	и	л	и	л	и
л	и	л	и	л	л	л	л	и
л	л	и	и	и	и	и	и	л
л	л	л	и	и	и	л	л	и

Рис. 7

Окончательно, высказывание $\sim((\sim a\wedge\sim b)\wedge(a\vee c))$ ложно только тогда, когда *a* и *b* ложны, но *c* истинно; а в остальных случаях оно истинно.

Обратим внимание на то, что таблица истинности высказывания, состоящего из двух простых: *a* и *b*, содержала $2^2 = 4$ строк – столько различных комбинаций значений истинности двух простых высказываний; для высказывания, состоящего из трех простых: *a, b, c*, таблица содержала $2^3 = 8$ строк – столько различных комбинаций значений истинности трех высказываний. Для высказывания, состоящего из четырех простых, таблица истинности будет содержать $2^4 = 16$ строк и т. д.

Формально-логический анализ правовых норм позволяет в ряде случаев обнаружить неясности, двусмысленности в их применении. Например, по ст. 112 Уголовного кодекса РСФСР «*умышленное причинение телесного повреждения* (= *a*) или *нанесение побоев* (= *b*), повлекшее за собой *кратковременное расстройство здоровья* (= *c*) или *незначительную стойкую утрату трудоспособности* (= *d*), наказывается *лишением свободы на срок до одного года* (= *e*) или *исправительными работами на этот же срок* (= *f*)» возникают следующие вопросы:

- союзы «*или*» между *a* и *b*, между *c* и *d*, между *e* и *f* – это дизъюнкции в не исключающем смысле или в исключающем? Если, например, союз «*или*» между *e* и *f* – это дизъюнкция в неисключающем смысле, т. е. $e \vee f$, то перечисленные в статье преступные действия могут быть наказаны и лишением свободы и исправительными работами; если же это дизъюнкция с исключением, т. е. $e \underline{\vee} f$, то используется только какой-то один вид наказания;

- слово «*повлекшее*» стоит после высказывания b и по правилам согласования должно относится только к b; по содержанию же статьи это слово относится к обоим перечисленным преступным действиям и следовательно надо писать «*повлекшие…*»; но с другой стороны, если часть статьи, расположенную перед словом «*повлекшее*», заключить в скобки, т. е. рассматривать как одно высказывание $a \vee b$ (или $a \veebar b$), то неясности не было бы.

Условимся, что в рассматриваемой статье первые два «*или*» – это дизъюнкции в неисключающем смысле, а последнее «*или*» – это дизъюнкции с исключением, и что часть статьи перед словом «*повлекшее*» заключена в скобки. Тогда логическая формула статьи будет такой:

$$((a \vee b) \wedge (c \vee d)) \rightarrow (e \veebar f);$$

формула содержит 6 компонент, ее таблица истинности будет содержать $2^6 = 64$ строки.

Анализ приведенной статьи Уголовного кодекса убеждает в необходимости использования символического языка математической логики для уяснения смысла правовых контекстов, для построения норм права, не допускающих двусмысленных толкований.

Этот язык оказывается полезным и в других областях человеческой деятельности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть p = «Петя сдал экзамен вовремя», и q = «Маша сдала экзамен вовремя». Запишите символически высказывание «Неверно, что Петя и Маша оба не сдали экзамен вовремя». Составьте таблицу истинности для этого высказывания. Придумайте более простое высказывание, выражающее то же самое, что и данное составное высказывание.

2. Даны два простых высказывания: a = «Петя любит Машу» и b = «Маша любит Петю». Запишите в символьной форме следующие составные высказывания: а) «Петя и Маша любят друг друга», б) «Петя и Маша не любят друг друга», в) «ни Петя не любит Машу, ни Маша не любит Петю», г) «Петя любит Машу, а Маша не любит Петю». Какие из этих высказываний истинны в случае, когда Петя любит Машу, а Маша к Пете равнодушна?

3. Даны два простых высказывания: a = «У меня есть собака» и b = «У меня есть попугай». Переведите на разговорный язык и упростите высказывание $\sim(\sim a \sim \vee (\sim(\sim b))) \wedge \sim(\sim a)$.

4. Даны два простых высказывания: p = «Идет дождь», и q = «Дует ветер». Запишите в символьной форме следующие составные высказывания: а) «Если идет дождь, то дует ветер», б) «Если дует ветер, то идет дождь», в) «Если дует ветер, то дождя нет», г) «Ветер дует тогда и только тогда, когда идет дождь», е) «Неверно, что ветер дует тогда и только тогда, когда дождя нет». Постройте таблицы истинности для этих высказываний.

5. Приведите примеры того, какую пользу может принести формально-логический анализ высказываний в Вашей профессиональной деятельности.

1.2. Логические возможности. Логически истинные и логически ложные высказывания

Выше отмечалось, что число строк в таблице истинности высказывания, состоящего из n простых высказываний, равно 2^n – именно столько существует различных комбинаций значений истинности n простых высказываний. Однако в конкретных ситуациях появление некоторых из этих комбинаций невозможно в принципе, и поэтому число строк таблицы истинности «можно уменьшить».

Свяжем каждое высказывание с определенными логическими возможностями и условимся никакое предложение не рассматривать как высказывание до тех пор, пока не определено множество связанных с ним логических возможностей. Если же речь идет одновременно о нескольких высказываниях (а именно так обстоит дело при изучении составных высказываний), потребуем, чтобы каждое из них было связано с одним и тем же множеством логических возможностей. Понятие множества логических возможностей поясним на следующем примере.

Пример 1. Жюри из трех человек X, Y, Z принимает решение большинством голосов, при этом есть только два варианта голосования для каждого члена жюри: «за» (+) и «против» (–). Возникающие при голосовании логические возможности представлены на рис. 8, *а*, а так называемое дерево логических возможностей, на рис. 8, *б*.

Обратим внимание на то, что таблица истинности высказывания: «X проголосует «за» ($=a$) *или* Y проголосует «за» ($=b$), *или* Z проголосует «за» ($=c$)», т. е. высказывания $a \vee b \vee c$, (см. рис. 9) содержит столько же строк, сколько и таблица логических возможностей (см. рис. 8, *а*):

Это объясняется тем, что все комбинации значений истинности высказываний *a, b, c* логически возможны.

К множеству логических возможностей предъявляются два требования:

- в любых условиях должна осуществляться только одна из возможностей множества,
- в рамках этого множества определяется значение истинности любого высказывания по изучаемой проблеме.

Логические возможности в примере 1 (см. рис. 8) первому требованию удовлетворяют; они удовлетворяют и второму: ведь все логические возможности – это все мыслимые комбинации значений истинности высказываний *a, b, c.*

Логически истинным называют высказывание, истинное при каждой логической возможности. *Логически ложным* называют высказывание, ложное при каждой логической возможности.

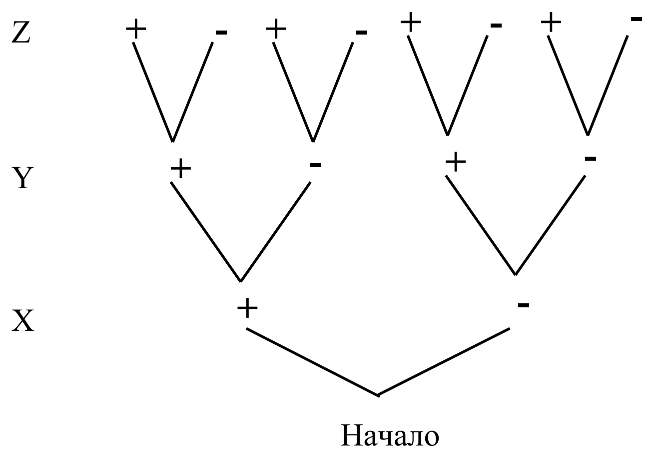
В условиях примера 1 высказывания:

- «жюри примет какое-то решение» – логически истинное,
- «жюри не примет никакого решения» – логически ложное,

- «по крайней мере два члена жюри проголосуют «за» $(=(a \wedge b \wedge \sim c) \underline{\vee} (a \wedge \sim b \wedge c) \underline{\vee} (\sim a \wedge b \wedge c) \underline{\vee} (a \wedge b \wedge c))$» истинно в возможностях № 1, 2, 3, 5 (см. рис. 8, *а*),
- «только два члена жюри проголосуют «за» $(=(a \wedge b \wedge \sim c) \underline{\vee} (a \wedge \sim b \wedge c) \underline{\vee} (\sim a \wedge b \wedge c))$» истинно в возможностях № 2, 3, 5.

№ возможности	X	Y	Z
1	+	+	+
2	+	+	–
3	+	–	+
4	+	–	–
5	–	+	+
6	–	+	–
7	–	–	+
8	–	–	–

а)



б)

Рис. 8

a	*b*	*c*	$a \vee b$	$a \vee b \vee c$	№ возможности (см. рис.8, *а*)
и	и	и	и	и	1
и	и	л	и	и	2
и	л	и	и	и	3
л	и	и	и	и	5
и	л	л	и	и	4
л	и	л	и	и	6
л	л	и	л	и	7
л	л	л	л	л	8

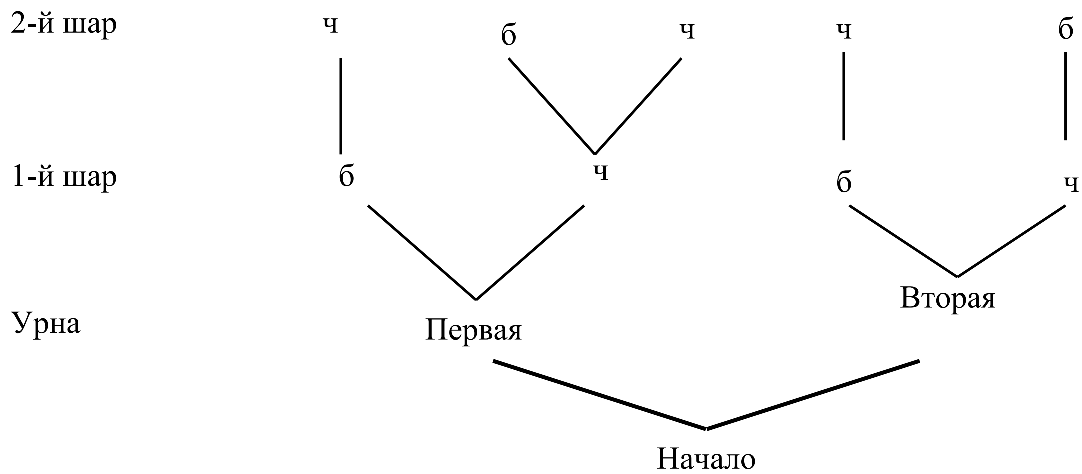
Рис. 9

Для ряда проблем можно построить не одно, а несколько множеств логических возможностей. Поэтому ответ на вопрос «для скольких возможностей то или иное высказывание истинно?» зависит от рассматриваемого множества логических возможностей. Однако логически истинные (логически ложные) высказывания являются в этом отношение исключениями: они истинны (ложны) на любом множестве логических возможностей, относящемся к изучаемой проблеме.

Пример 2. Имеются две урны, первая из которых содержит один белый и два черных шара с номерами 1 и 2, а вторая – белый и черный. Из наудачу взятой урны вынимают последовательно два шара (к такой урновой модели сводится, например, следующая ситуация: известно, что в городе действуют две преступные группировки, в первой – одна женщина и двое мужчин, во второй – женщина и мужчина; двумя лицами, принадлежащими к какой-то одной группе, совершена кража). Множество логических возможностей и их дерево для случая, когда нас интересует только цвет вынутых шаров (пол преступников) изображены на рис. 10 (белый шар – «б», черный – «ч»), а для случая, когда нас интересует не только цвет (пол), но и номера вынутых шаров (фамилии мужчин из первой группировки) – изображены на рис. 11 (черный шар с номером 1 – «ч1»).

№ возможности	Урна	Первый шар	Второй шар
1	1	б	ч
2	1	ч	б
3	1	ч	ч
4	2	б	ч
5	2	ч	б

а)



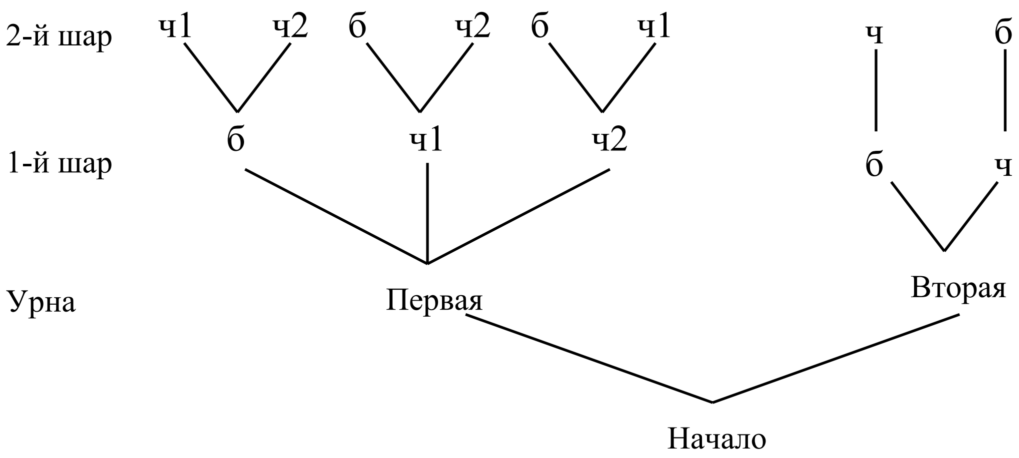
б)

Рис. 10

Первое множество логических возможностей (см. рис. 10) «более грубое», чем второе (см. рис. 11): оно оказывается достаточным для определения значения истинности высказываний, в которых акцент сделан только на цвет, и недостаточным – для высказываний, в которых фигурируют и цвет и номер шара; в рамках же второго, более детального множества определяются значения истинности высказываний как первого, так и второго типа. Высказывание «выбрана первая урна и из нее вынуты белый и черный шар» истинно на первом множестве – в возможностях № 1, 2 (см. рис. 10, *а*), а на втором – в возможностях № 1, 2, 3, 5 (см. рис. 11, *а*). Высказывание «выбрана вторая урна и из нее первым вынут белый шар, а вторым – черный» истинно на первом множестве только в возможности № 1, а на втором в возможностях № 1, 2. Случаи же истинности высказывания «выбрана первая урна и из нее извлечены белый шар и черный с номером 1» могут быть установлены только на втором множестве – это случай № 1, 3 (см. рис. 11, *а*).

№ возможности	Урна	Первый шар	Второй шар
1	1	б	ч1
2	1	б	ч2
3	1	ч1	б
4	1	ч1	ч2
5	1	ч2	б
6	1	ч2	ч1
7	2	б	ч
8	2	ч	б

а)



б)

Рис. 11

Обратим еще раз внимание на то, что число логических возможностей всегда не больше числа строк таблицы истинности любого высказывания по рассматриваемой проблеме. Так, если нас интересует только цвет вынутых шаров и простые высказывания таковы: a = «выбрана первая урна», b = «первым извлечен белый шар», c = «вторым извлечен черный шар», то таблица истинности любого высказывания, состоящего из этих трех простых, будет иметь $2^3 = 8$ строк, тогда как логических возможностей – пять (см. рис. 10, *а*). Также обратим внимание на то, что высказывание, являющееся логически истинным, может иметь различные значения истинности в таблице истинности. В подтверждение составим таблицу истинности высказывания $a \to (\sim b \vee c)$, где a, b, c определены выше, и сопоставим ее с таблицей логических возможностей (см.

рис. 10, *а*). Таблица истинности приведена на рис. 12, из нее вычеркнуты строки, появление которых логически не возможно.

a	b	c	№ возможности (см. рис.10, *а*)	$\sim b$	$\sim b \vee c$	$a \to (\sim b \vee c)$
и	и	и	1	л	и	и
и	и	л		л	л	л
и	л	и	3	и	и	и
л	и	и	2	л	и	и
и	л	л	4	и	и	и
л	и	л		л	л	и
л	л	и		и	и	и
л	л	л	5	и	и	и

и

Рис. 12

л

Окончательно, при любой логической возможности импликация $a \to (\sim b \vee c)$ истинна, т. е. это – логически истинное высказывание. Словесная формулировка импликации такая: «если будет выбрана первая урна, то хотя бы один из двух вынутых шаров – черный» – это высказывание истинно, в чем нетрудно убедиться, взглянув на ответвления дерева логических возможностей, выходящие из корня «Первая» (см. рис.10, *б*). Однако в рамках всей таблицы истинности высказывание $a \to (\sim b \vee c)$ не всегда истинно (см. первую выделенную строку на рис. 12).

Задачи для самостоятельного решения

1. В сессию студент должен сдать четыре экзамена, по каждому из которых он может получить одну из четырех оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Сколько логических возможностей может иметь место?

2. Даны три простых высказывания: p = «Петя выше 180 см», q = «Петя ниже 180 см» и r = «Рост Пети равен 187 см». Выпишите все восемь возможных комбинаций значений истинности высказываний p, q и r и исключите из них противоречивые.

3. Приведите пример высказывания, которое истинно при каждой логической возможности.

4. На каникулах Петя собирается поехать в одно из трех мест. В каждом из этих мест погода может быть хорошей или плохой. Постройте для этой ситуации дерево логических возможностей. Приведите примеры высказываний для этого дерева логических возможностей, которые были бы истинными: а) в половине случаев; б) во всех случаях.

5. Меню студенческой столовой такое: первое блюдо – грибной суп или куриный бульон, второе – котлета, курица или рыба, гарнир – рис, макароны или картофельное пюре, третье – чай, кофе, компот или сок. Полный обед включает в себя одно первое, одно второе (с одним гарниром) и одно третье. Постройте для этой ситуации дерево логических возможностей. Сколько может быть вариантов полного обеда? Сколько из них включают в себя курицу на второе?

6. Приведите примеры логически истинных и логически ложных высказываний из Вашего опыта.

1.3. Отношения следования, эквивалентности и несовместимости

Выше рассматривались отдельные высказывания (простые или составные). Но часто бывает нужно, исходя из анализа множества логических возможностей, связанного с двумя высказываниями c и d, установить логические отношения между ними. Рассмотрим отношения следования, эквивалентности и несовместимости (совместимости).

Из высказывания *с логически следует* высказывание d, если при истинности c истинно всякий раз и d. Высказывания c и *d логически эквивалентны,* если из высказывания c логически следует высказывание d и наоборот, из d логически следует c.

Высказывания *несовместимы*, если нет ни одной логической возможности для одновременной истинности этих высказываний.

Введенные отношения поясним на примере высказываний: $a \leftrightarrow b$, $a \to b$, $\sim b \to \sim a$. Составим их таблицы истинности (см. рис. 13).

a	b	$a \leftrightarrow b$	$a \to b$	$\sim b$	$\sim a$	$\sim b \to \sim a$	$(a \leftrightarrow b) \to (a \to b)$	$(a \to b) \leftrightarrow (\sim b \to \sim a)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
и	и	и	и	л	л	и	и	и
и	л	л	л	и	л	л	и	и
л	и	л	и	л	и	и	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и	и

Рис. 13

Из высказывания $a \leftrightarrow b$ следует высказывание $a \to b$, так как при истинности $a \leftrightarrow b$ истинно всякий раз и $a \to b$; но из высказывания $a \to b$ не следует высказывание $a \leftrightarrow b$, так как при истинности $a \to b$ высказывание $a \leftrightarrow b$ может быть ложным (см. рис.13, столбцы 3 и 4). Эквивалентны высказывания: $a \to b$ *и* $\sim b \to \sim a$; обратим внимание на то, что значения истинности эквивалентных высказываний совпадают (см. рис. 13, столбцы 4 и 7).

Высказывания a и $\sim a$ несовместимы, а, например, высказывания $a \leftrightarrow b$ и $\sim b \to \sim a$ совместимы.

Между отношением следования и импликацией, так же как между отношением эквивалентности и двойной импликацией, имеется тесная связь, но важно не путать эти понятия. Импликация и двойная импликация – это новые высказывания, составленные из двух данных, а следование и эквивалентность – это отношения между двумя высказываниями. Связь же между ними такова: *из высказывания c следует высказывание d, если и только если импликация $c \to d$ логически истинна; c и d эквивалентны, если и только если двойная импликация $c \leftrightarrow d$ логически истинна.* В подтверждение: из высказывания $a \leftrightarrow b$ следует $a \to b$ и импликация $(a \leftrightarrow b) \to (a \to b)$ логически истинна (см. рис. 13, столбец 8); высказывания $a \to b$ и $\sim b \to \sim a$ эквивалентны и двойная импликация $(a \to b) \leftrightarrow (\sim b \to \sim a)$ логически истинна (см. рис. 13, столбец 9).

Проанализируем некоторые часто используемые (в том числе и рассмотренные ранее в этой книге) формы высказываний с позиций отношений следования и эквивалентности:

1. *Высказывание «a истинно, только если b истинно» и высказывание «если a истинно, то b истинно» эквивалентны.*

Действительно, высказывание «a истинно, только если b истинно» констатирует, что «если b ложно, то и a ложно», которое эквивалентно высказыванию «если a истинно, то b истинно», так как, допустив, что из истинности a следует ложность b, и имея в виду, что из ложности b следует ложность a, мы получим, что из истинности a следует ложность a, чего быть не может. Итак, высказывание «a истинно, только если b истинно» эквивалентно высказыванию «если b ложно, то a ложно», которое эквивалентно высказыванию «если a истинно, то b истинно». Поэтому высказывания «a истинно, только если b истинно» и «если a истинно, то b истинно» эквивалентны.

В подтверждение приведем пример: эквивалентны следующие три высказывания, составленные из высказываний a = «совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию» и b = «совершивший уголовное преступление не моложе 14 лет»:

- «совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию, только если он не моложе 14 лет» («a истинно, только если b истинно»),
- «если совершивший уголовное преступление моложе 14 лет, то он не подлежит уголовному наказанию» («если b ложно, то a ложно»),
- «если совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию, то он не моложе 14 лет» («если a истинно, то b истинно»).

Обратим внимание на то, что два последних высказывания символически записываются так: $\sim b \rightarrow \sim a$, $a \rightarrow b$; эквивалентность же этих связок была подтверждена раньше (см. рис.13, столбцы 7, 4, 9). Оба высказывания, в рамках существующего Уголовного кодекса, логически истинны.

Замечание. Синонимами выражения «a истинно, только если b истинно» являются выражения: «a истинно только в том случае, если b истинно» и «a истинно только тогда, когда b истинно».

2. *Высказывание «a истинно, если и только если b истинно» и часто используемое в математике высказывание «истинность a является достаточным и необходимым условием истинности b» эквивалентны.*

Действительно, высказывание «a истинно, если и только если b истинно» констатирует следующее: «если b истинно, то a истинно» и «если b ложно, то и a ложно». А так как последнее высказывание эквивалентно высказыванию «если a истинно, то и b истинно» (см. пункт 1), то получим, что высказывания: «a истинно, если и только если b истинно» и «если b истинно, то a истинно, и если a истинно, то b истинно» эквивалентны.

Далее, высказывание «истинность a является достаточным условием для истинности b» констатирует «если a истинно, то b истинно», а высказывание «истинность a является необходимым условием истинности b» констатирует, что «b истинно, только если a истинно», или «если b истинно, то и a истинно». Поэтому высказывание «истинность a является достаточным и необходимым условием истинности b» эквивалентно высказыванию «если a истинно, то b истинно и если b истинно, то a истинно».

Окончательно высказывания «a истинно, если и только если b истинно» и «истинность a является достаточным и необходимым условием истинности b» эквивалентны.

В подтверждение приведем пример: эквивалентны следующие два высказывания, составленные из высказываний a = «совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию» и b = «совершивший уголовное преступление не моложе 14 лет»:

- «совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию, если и только если он не моложе 14 лет» («a истинно, если и только если b истинно»),
- «если совершивший уголовное преступление подлежит уголовному наказанию, то он не моложе 14 лет, и если совершивший уголовное преступление не моложе 14 лет, то он подлежит уголовному наказанию» («истинность a является достаточным и необходимым условием истинности b»).

Обратим внимание на то, что последние два высказывания символически записываются так: $a \leftrightarrow b$, $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$; нетрудно убедиться в эквивалентности этих связок. И далее, поскольку в рамках существующего Уголовного кодекса второе высказывание логически истинно, то и первое тоже логически истинно.

Высказывание же «произведение двух чисел – четное число, если и только если оба числа – четные» не является логически истинным, так как не является логически истинным высказывание «если произведение двух чисел – четное число, то оба числа – четные, и если оба числа четные, то их произведение четно». Действительно, в последнем высказывании вторая часть логически истинна, но первая часть не является логически истинной: если произведение двух чисел – четное число, например 16, то из этого вовсе не следует, что эти два числа четные: такими числами могут быть 1 и 16. Логически истинно высказывание, например, такое: «произведение двух чисел – четное число тогда, когда оба числа – четные».

Замечание. Синонимами выражения «a истинно, если и только если b истинно» являются «a истинно в том и только том случае, если b истинно» и «a истинно тогда и только тогда, когда b истинно».

Задачи для самостоятельного решения

1. Что можно сказать о высказывании, которое эквивалентно своему отрицанию?

2. Приведите пример высказывания, из которого следует его отрицание. Докажите, что это высказывание противоречиво.

3. Докажите, что если высказывание a логически истинно, то: а) $a \vee b$ логически истинно, б) $\sim a \wedge b$ логически ложно, в) $a \wedge b$ эквивалентно b, г) $\sim a \vee b$ эквивалентно b.

4. Какое отношение имеет место между двумя высказываниями, если: а) они оба логически истинны, б) они оба логически ложны, в) они противоречивы?

1.4. Аргументы правильные и ложные

Под *аргументом* понимают утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) логически следует из других высказываний (посылок). Аргумент называют *правильным* тогда и только тогда, когда из конъюнкции посылок логически следует заключение, т. е. когда при истинности всех посылок всякий раз будет истинным и заключение. Аргумент, не являющийся правильным, называется *ложным*. Примем такую форму записи аргумента: выпишем все посылки, под ними проведем черту, под которой запишем заключение. Приведем примеры словесной и символьной записи аргументов:

Пример 3. Правильный аргумент:

Посылки	Словесная форма	Символьная форма
1	Если *гражданин законопослушен* (= a), *он не совершит преступления* (= b).	$a \to b$
2	Иванов – законопослушный гражданин.	a
Заключение:	Иванов не совершит преступления.	b

Аргумент правильный, так как из конъюнкции двух посылок следует заключение. В подтверждение приведем таблицу истинности аргументации (см. рис. 14).

a	b	$a \to b$	$(a \to b) \wedge a$	b
и	и	и	и	и
и	л	л	л	л
л	и	и	л	и
л	л	и	л	л

Рис. 14

Сравнив два последние столбца рис. 14, видим, что при истинности конъюнкции $(a \to b) \wedge a$ посылок заключение b истинно, т. е. из конъюнкции двух посылок следует заключение.

Пример 4. Ложный аргумент:

Посылки	Словесная форма	Символьная форма
1	Если *гражданин законопослушен* (= a), *он не совершит преступления* (= b).	$a \to b$
2	Иванов – не законопослушен.	$\sim a$
Заключение:	Иванов совершит преступление.	$\sim b$

Аргумент ложный: при истинности конъюнкции $(a \to b) \wedge \sim a$ посылок заключение $\sim b$ не всегда истинно, что видно из таблицы истинности этой аргументации, приведенной на рис.15.

Наиболее типичны следующие правильные аргументы:

$$\frac{\begin{matrix} a \to b \\ a \end{matrix}}{b} \quad \frac{\begin{matrix} a \to b \\ \sim b \end{matrix}}{\sim a} \quad \frac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \end{matrix}}{a \to c} \quad \frac{\begin{matrix} a \leftrightarrow b \\ a \end{matrix}}{b} \quad \frac{\begin{matrix} a \vee b \\ \sim a \end{matrix}}{b} \quad \frac{\begin{matrix} a \to b \\ \sim c \to \sim b \end{matrix}}{\sim c \to \sim a}$$

и следующие ложные аргументы:

$$\frac{\begin{array}{c} a \to b \\ b \end{array}}{a} \qquad \frac{\begin{array}{c} a \to b \\ \sim a \end{array}}{\sim b} \qquad \frac{\begin{array}{c} a \wedge b \\ \sim a \to b \end{array}}{\sim b} \qquad \frac{\begin{array}{c} a \to b \\ \sim b \to \sim c \end{array}}{c \to a} \qquad \frac{\begin{array}{c} a \leftrightarrow b \\ b \vee c \\ \sim c \end{array}}{\sim a}$$

В правильности (ложности) этих аргументов легко убедиться, составив их таблицы истинности.

a	b	$a \to b$	$\sim a$	$(a \to b) \wedge \sim a$	$\sim b$
и	и	и	л	л	л
и	л	л	л	л	и
л	и	и	и	и	л
л	л	и	и	и	и

Рис. 15

Убедимся в правильности следующего аргумента: «если *Джонс – убийца* (= a), то *ему точно известны время смерти Смита* (= b) и *чем он был убит* (= c). Поэтому *если он не знает, когда умер Смит* (= $\sim b$) или *не знает, чем он был убит* (= $\sim c$), то *он не является убийцей* (= $\sim a$)». Символическая запись этого аргумента:

$$\frac{\begin{array}{c} a \to (b \wedge c) \\ \sim b \vee \sim c \end{array}}{\sim a.}$$

Таблица истинности аргумента приведена на рис. 16.

a	b	c	$b \wedge c$	$a \to (b \wedge c)$	$\sim b$	$\sim c$	$\sim b \vee \sim c$	$(a \to (b \wedge c)) \wedge (\sim b \vee \sim c)$	$\sim a$
и	и	и	и	и	л	л	л	л	л
и	и	л	л	л	л	и	и	л	л
и	л	и	л	л	и	л	и	л	л
л	и	и	и	и	л	л	л	л	и
и	л	л	л	л	и	и	и	л	л
л	и	л	л	и	л	и	и	и	и
л	л	и	л	и	и	л	и	и	и
л	л	л	л	и	и	и	и	и	и

Рис. 16

Из двух последних столбцов таблицы видно, что при истинности конъюнкции $(a \to (b \wedge c)) \wedge (\sim b \vee \sim c)$ посылок аргумента заключение $\sim a$ истинно, поэтому приведенный аргумент правильный.

Задачи для самостоятельного решения

1. Почему следующий аргумент ложный: «Если Шекспир – великий драматург, то его пьесы ставятся в театрах. Произведения Шекспира ставятся в театрах. Значит, Шекспир – великий драматург»?

2. Является ли следующий аргумент правильным: «Если курс математики интересен, то он полезен. Или экзаменатор снисходителен, или курс математи-

ки бесполезен. Но экзаменатор не снисходителен. Значит, курс математики бесполезен»?

3. Правилен или ложен такой аргумент: «Все собаки имеют по две ноги. Все двуногие животные плотоядны. Значит, собаки плотоядны»?

1.5. Множества и операции над ними. Соотношения между множествами и высказываниями

Понятие множества не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве статей Конституции Российской Федерации, о множестве логических возможностей и т. д. Множества будем обозначать полужирными прописными латинскими буквами: **A**, **B**, … Если элемент x принадлежит множеству **A**, пишут $x \in \mathbf{A}$ (читают: «x принадлежит множеству **A**»), в противном случае пишут $x \notin \mathbf{A}$ («x не принадлежит множеству **A**»). Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Множество считается *заданным*, если о любом данном объекте можно однозначно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Существует д в а с п о с о б а задания множества:

- дается п о л н ы й п е р е ч е н ь э л е м е н т о в множества; например, множество результатов голосования такое: {«за», «против», «воздержался»};
- указывается п р а в и л о о п р е д е л е н и я п р и н а д л е ж н о с т и любого объекта к рассматриваемому множеству; например, запись $\mathbf{A}=\{x: |x| < 10\}$ означает, что **A** состоит из таких чисел x, модуль которых меньше 10 (после двоеточия записано правило, которому должно удовлетворять число x, чтобы его можно было отнести к множеству **A**).

Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными*. Если множества **A** и **B** равны, то пишут $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Например, заданные перечнем элементов множества $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$ и $\mathbf{B} = \{3, 2, 1\}$, равны, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, или $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

Если каждый элемент множества **B** является в то же время элементом множества **A**, то говорят, что **B** – часть, или, иначе, *подмножество* множества **A**. В этом случае пишут $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ (читают **B** – подмножество множества **A**).

В последующем исходное множество будем называть *универсальным* и обозначать буквой $\mathbf{\Omega}$ (прописная греческая буква «омега»). *Собственные подмножества* множества $\mathbf{\Omega}$ – это те подмножества, которые содержат некоторые, но не все элементы $\mathbf{\Omega}$. Наряду с собственными подмножествами условимся само $\mathbf{\Omega}$ и пустое множество $\varnothing$ также считать подмножествами множества $\mathbf{\Omega}$.

На базе множества $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ можно образовать $2^2 = 4$ подмножества: $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\mathbf{\Omega}$, $\varnothing$, из которых $2^2 - 2 = 2$ собственных – это $\{\omega_1\}$ и $\{\omega_2\}$. На базе множества $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ можно образовать $2^3 = 8$ подмножеств: $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$,$\{\omega_3\}$, $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_1, \omega_3\}$,$\{\omega_2, \omega_3\}$, $\mathbf{\Omega}$, $\varnothing$, из которых $2^3 - 2 = 6$ собственных. На базе множества $\mathbf{\Omega}$, содержащего N элементов, можно образовать 2^N подмножеств, из которых $(2^N - 2)$ собственных.

Ранее были рассмотрены способы, которыми из данных высказываний могут быть образованы новые высказывания. Рассмотрим аналогичный процесс образования новых множеств из данных множеств **A** и **B**, при этом будем предполагать, что и **A,** и **B,** и вновь образованное множество являются подмножествами некоторого универсального множества $\mathbf{\Omega}$.

Для наглядного представления операций над множествами используем *диаграмму Вьенна* (Дж. Вьенн – английский логик, 1834–1923), на которой универсальное множество **Ω** изображается прямоугольником, а его подмножества **A** и **B** – некоторыми фигурами внутри прямоугольника.

Пересечением множеств **A** и **B** называется множество $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$, состоящие из тех и только тех элементов, которые принадлежат и **A,** и **B** одновременно (словосочетание «из тех и только тех» в данном контексте означает, что $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ состоит из элементов, принадлежащих одновременно и **A,** и **B**, и никакие другие элементы в $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ не входят). Пересечение $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ множеств **A** и **B** на диаграмме Вьенна изображено на рис. 17, *а* заштрихованной областью. Если **A** и **B** не имеют общих элементов, то пересечения $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ будет пустым множеством $\varnothing$, т. е. $\mathbf{A}\cap\mathbf{B} = \varnothing$ (рис. 17, *б*).

Объединением множеств **A** и **B** называется множество $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат или **A,** или **B** (или обоим множествам, если таковые элементы есть) (рис. 18, *а* и 18, *б* – заштрихованные области).

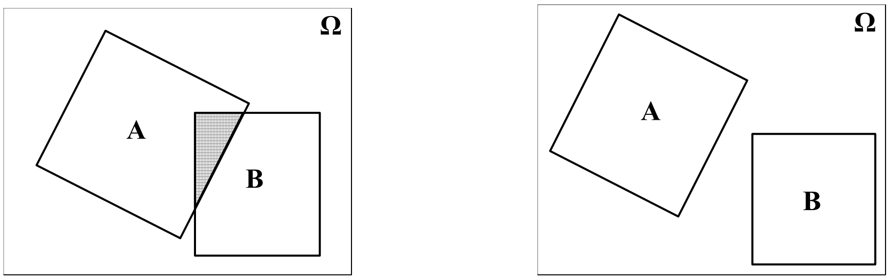
Дополнением множества **A** называется множество $\bar{\mathbf{A}}$ (читают «не **A**»), состоящее из тех и только тех элементов множества **Ω**, которые не принадлежат **A** (см. рис. 19 – заштрихованная область). Операция «дополнение» симметрична: если $\bar{\mathbf{A}}$ **–** дополнение **A**, то и **A** – дополнение $\bar{\mathbf{A}}$; поэтому множества **A** и $\bar{\mathbf{A}}$ называют *взаимодополняющими*.

Разностью множеств **A** и **B** называется множество **A\B** (читают «**A** без **B**») всех тех элементов **A**, которые не принадлежат **B** (рис. 20, *а* – заштрихованная область).

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

- $\mathbf{\Omega\backslash A} = \bar{\mathbf{A}}$;
- если у **A** и **B** нет общих элементов, т. е. $\mathbf{A}\cap\mathbf{B} = \varnothing$, то $\mathbf{A\backslash B} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{B\backslash A} = \mathbf{B}$ (рис. 20, *б* – заштрихованная область);
- если **A** – подмножество множества **B**, т. е. $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, то $\mathbf{A\backslash B} = \varnothing$ (рис.20, *в*).

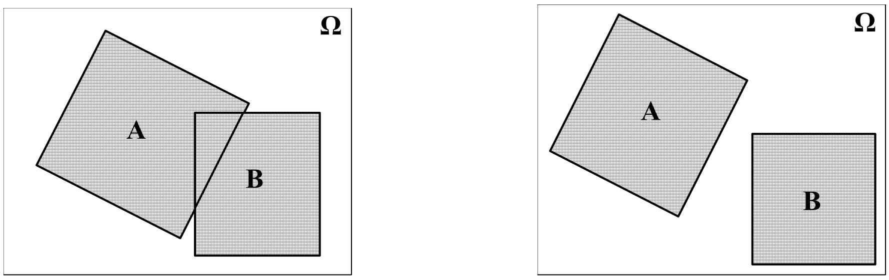
В качестве приложения введенных понятий рассмотрим **задачу о голосующих коалициях**. Пусть имеется группа людей, голосующих «за» или «против» проведения какой-то меры (возможность «воздержания» исключим). Каждый член группы может иметь один или несколько голосов. Решение группы принимается согласно какому-либо правилу: или простым большинством, или 2/3 от общего числа голосов и т. д. Некоторые члены группы могут объединяться в коалицию с целью проведения названной меры. Коалицию называют *выигрывающей*, если ее голосов достаточно для проведения меры; *проигрывающей*, если члены, не вошедшие в коалицию, могут провести свое решение вопреки желанию коалиции. Коалицию называют *блокирующей*, если ее члены сами по себе, как и члены, не вошедшие в эту коалицию, не могут провести никакого решения. Например, комитет состоит из трех членов: X (председатель), имеющий два голоса, и x_1 и x_2, имеющих по одному голосу каждый. Исход решается простым большинством голосов. Возможные варианты голосования трех членов указанные в таблице на рис. 21.



$A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \varnothing$

а) $\qquad$ *б)*

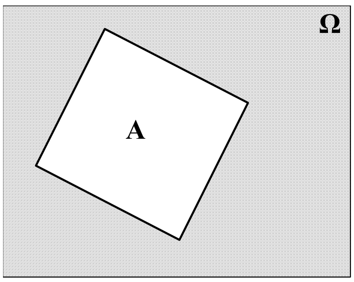
Рис. 17



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cup B$

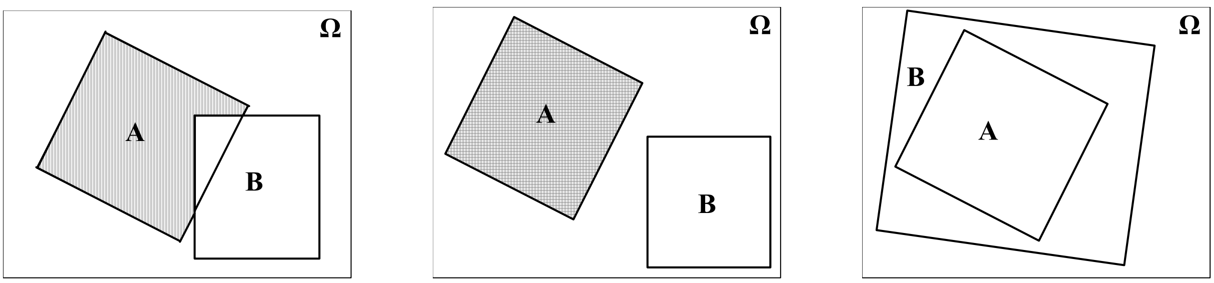
а) $\qquad$ *б)*

Рис. 18



$\overline{A}$

Рис. 19



$A \setminus B$ $\qquad$ $A \setminus B = A$ $\qquad$ $A \setminus B = \varnothing$

а) $\qquad$ *б)* $\qquad$ *в)*

Рис. 20

За универсальное множество Ω примем множество $\{X, x_1, x_2\}$ всех членов комитета в предположении, что каждый из них высказался «за», $\Omega = \{X, x_1, x_2\}$. Тогда, например, подмножество $\{X, x_1\}$ означает, что X и x_1 проголосовали «за», а x_2 – «против» (т. е. имеет место второй вариант голосования), а пустое множество $\varnothing$ означает, что все члены комитета проголосовали «против» (восьмой вариант голосования). Количество подмножеств множества Ω, включая Ω и $\varnothing$, равно $2^3 = 8$, из которых 6 собственных (варианты 2–7). Так как решения «за» принимается в первом, втором и третьем вариантах голосования, а решение «против» в шестом, седьмом и восьмом вариантах, то выигрывающими коалициями являются множества $\mathbf{\Omega} = \{X, x_1, x_2\}$, $\{X, x_1\}$, $\{X, x_2\}$, а проигрывающими: $\varnothing$, $\{x_2\}$, $\{x_1\}$. Обратим внимание на следующее: если множество – коалиция $\mathbf{C}$ является выигрывающей (проигрывающей), то дополнение $\overline{\mathbf{C}}$ множества $\mathbf{C}$ – проигрывающая (выигрывающая) коалиция.

№ варианта	X		x_1	x_2
1	+	+	+	+
2	+	+	+	–
3	+	+	–	+
4	+	+	–	–
5	–	–	+	+
6	–	–	+	–
7	–	–	–	+
8	–	–	–	–

Рис. 21

Для подтверждения приведем такую таблицу:

Выигрывающая коалиция (множество $\mathbf{C}$)	Проигрывающая коалиция (множество $\overline{\mathbf{C}} = \Omega \backslash \mathbf{C}$)
$\mathbf{C} = \{X, x_1, x_2\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \varnothing$
$\mathbf{C} = \{X, x_1\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_2\}$
$\mathbf{C} = \{X, x_2\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_1\}$

Среди выигрывающих коалиций выделяют минимальные выигрывающие (в задаче это коалиции $\{X, x_1\}$ и $\{X, x_2\}$). *Минимальная выигрывающая* коалиция – это такая выигрывающая коалиция, ни одно из собственных подмножеств которой не является выигрывающей коалицией. Выигрывающая коалиция $\{X, x_1\}$ – минимальная, так как ни одно из ее собственных подмножеств: $\{X\}$ и $\{x_1\}$, не является выигрывающей коалицией; то же относится и к коалиции $\{X, x_2\}$.

В четвертом и пятом вариантах (см. рис.21) решение принято не будет (нет большинства); поэтому коалиция $\{X\}$ и коалиция $\{x_1, x_2\}$ – блокирующие. Обратим внимание на то, что сумма числа выигрывающих, проигрывающих и блокирующих коалиций равна числу подмножеств множества Ω.

Пример 5. Интересным примером группы, принимающей решения, служит Совет безопасности ООН, состоящий при существовании СССР из одиннадцати членов: пяти представителей великих держав ($X_1, X_2, \dots, X_5$), каждый из которых может единолично блокировать любую меру, и шести представителей малых наций ($x_1, x_2, \dots, x_6$). Каждый из 11 членов имеет один голос (возможность «воздержания» исключим). Для принятия Советом какой-либо меры необходимо, чтобы за нее проголосовало семь членов, включая большую пятерку. За универсальное множество Ω примем множество $\{X_1, \dots, X_5, x_1, \dots, x_6\}$ всех членов комитета в предположении, что каждый из них высказался «за». Общее число вариантов голосования 11 членов равно $2^{11} = 2048$ – столько подмножеств имеет множество $\mathbf{\Omega} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, \ldots, x_6\}$. Любое подмножество множества $\mathbf{\Omega}$, состоящее из большой пятерки, и двух или более (не менее двух) представителей малых наций, будет выигрывающей коалицией; а любое подмножество, состоящее из четырех или менее (не более четырех) представителей малых наций будет проигрывающей коалицией. Примеры этих коалиций приведены в следующей таблице:

Выигрывающая коалиция (множество **C**)	Проигрывающая коалиция (множество $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{\Omega}\backslash\mathbf{C}$)
$\mathbf{C} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, x_2,\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$
$\mathbf{C} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, x_2, x_3\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_4, x_5, x_6\}$
$\mathbf{C} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_5, x_6\}$
$\mathbf{C} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \{x_6\}$
$\mathbf{C} = \{X_1, \ldots, X_5, x_1, \ldots, x_6\}$	$\overline{\mathbf{C}} = \varnothing$
………………………………	……………………………

Общее число выигрывающих коалиций равно 57*) (столько же и проигрывающих коалиций), из которых 15*) будет минимальных – это коалиции, состоящие из большой пятерки и двух представителей малых наций. Число блокирующих коалиций равно

$$(2048 - 57 - 57) = 1934,$$

среди них и единичные множества $\{X_1\}$, $\{X_2\}$, $\{X_3\}$, $\{X_4\}$, $\{X_5\}$.

Между множествами и высказываниями, а также между операциями над множествами и операциями, связывающими простые высказывания в составные, существует тесная связь.

Естественный способ сопоставления высказываний с множествами такой:

- для имеющихся высказываний *a, b, c*,… находим множество $\mathbf{\Omega}$ всех логических возможностей – универсальное множество;
- на множестве $\mathbf{\Omega}$ выделяем подмножества **A**, **B**, **C**, … логических возможностей, для которых истинны соответственно высказывания *a, b, c*,…; **A**, **B**, **C**, … называют *множествами истинности* соответствующих высказываний;
- каждому высказыванию ставим в соответствие его множество истинности.

Естественный способ сопоставления операций связывания простых высказываний в составные и операций над множествами такой:

- множество истинности высказывания $a \wedge b$ – это множество $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (рис. 22 – область двойной штриховки);
- множество истинности высказывания $a \vee b$ – это множество $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ (рис. 22 – вся заштрихованная область);

Замечание. На рис. 22 множества **A** и **B** истинности высказываний *a* и *b* имеют общие элементы – это говорит о том, что допустима одновременная истинность и *a* и *b*, т. е. *a* и *b* – совместимые высказывания. Множества **A** и **B** истинности несовместимых высказываний *a* и *b* не имеют общих точек (см. рис. 18, б*а*), но и в этом случае множество истинности высказывания $a \vee b$ (точнее, $a \vee b$) – это множество $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

*) Способ подсчета этих чисел будет изложен дальше.

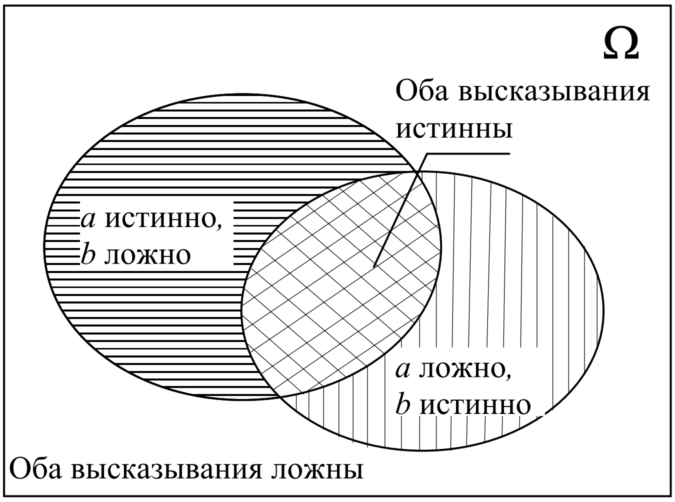
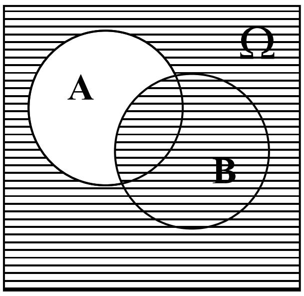


Рис. 22

- множество истинности высказывания $\sim a$ (иначе, множество «ложности» высказывания a) – это множество $\bar{\mathbf{A}}$ (рис. 19 – заштрихованная область);
- множество истинности высказывания $a \to b$ – множество $\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}$, это объясняется тем, что высказывание $a \to b$ эквивалентно высказыванию $\sim a \vee b$ (см. последние три столбца на рис. 6), множеством истинности которого является множество $\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}$ (рис. 23); обратим внимание на то, что незаштрихованная на рис. 23 область – это множество $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$, тогда заштрихованная область – это множество $\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$, и, следовательно, $\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B} = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$;



$\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B} = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$ – множество истинности высказывания $a \to b$
(вся заштрихованная область)

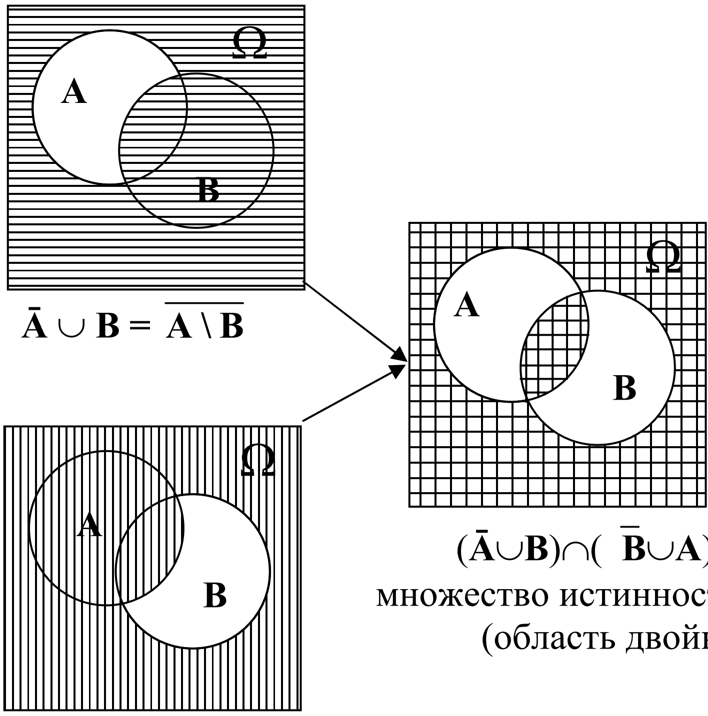
Рис. 23

- множество истинности высказывания $a \leftrightarrow b$, эквивалентного высказыванию $(\sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee a)$, – это множество $(\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}) \cap (\bar{\mathbf{B}} \cup \mathbf{A})$, или равное ему множество $\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}}$; последовательность построения множества истинности приведена на рис. 24;
- множество истинности логически истинного высказывания (напомним, это высказывание, истинное в каждом логически возможном случае) – это множество Ω всех логических возможностей;
- множество истинности логически ложного высказывания – пустое множество $\varnothing$.

И наконец, как на языке множеств выглядят отношения следования и эквивалентности? Ответ:

- из высказывания *a* следует высказывание *b*, если и только если импликация $a \to b$ логически истинна (см. стр.13); логическая же истинность высказывания $a \to b$ означает, что его множество истинности $\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}} = \Omega$, и тогда $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \varnothing$, но последнее равенство верно в том и только том случае, когда множество **A** является подмножеством множества **B.**

Итак, из высказывания *a* следует высказывание *b*, если и только если между множествами **A** и **B** истинности этих высказываний имеет место соотношение: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (см. рис. 25);



$\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B} = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$

$\bar{\mathbf{B}} \cup \mathbf{A} = \overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}}$

$(\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}) \cap (\bar{\mathbf{B}} \cup \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}}$ –
множество истинности высказывания $a \leftrightarrow b$
(область двойной штриховки)

Рис. 24

- высказывания *a* и *b* эквивалентны, если и только если двойная импликация $a \leftrightarrow b$ логически истинна; логическая же истинность высказывания $a \leftrightarrow b$ означает, что его множество истинности $\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}} = \Omega$, но последнее равенство верно в том и только том случае, когда $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Итак, высказывание *a* эквивалентно высказыванию *b,* если и только если между множествами **A** и **B** истинности этих высказываний имеет место соотношение: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ (см. рис. 26).

На рис. 27 приведем итоговую таблицу соотношений между высказываниями и множествами. Выявленные соотношения позволяют перевести любую задачу, относящуюся к высказываниям, в задачу теории множеств и наоборот, задачу, относящуюся к множествам, перевести на язык высказываний. Приведем пример, подтверждающий целесообразность такого перехода.

Пример 6. Пусть требуется выяснить, совместимы или нет следующие высказывания:

1. Если *математика интересна* (= *a*), то *я буду над ней работать* (= *b*);

2. Если *математика не интересна* (= ~*a*), то *я получу по этому предмету плохую оценку* (= *c*);

3. *Я не буду работать над математикой* (= ~*b*), но *получу по этому предмету хорошую оценку* (= ~*c*).

В принятых обозначениях символические выражения высказываний таковы:

1) $a \to b$, 2) $\sim a \to c$, 3) $\sim b \to \sim c$.

A ⊂ B

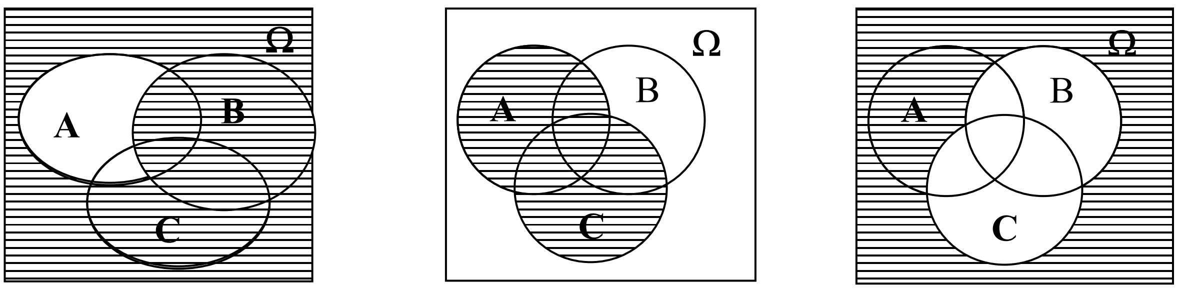
Рис. 25

A = B

Рис.26

Высказывание	Множество истинности
логически истинное	**Ω**
логически ложное	$\varnothing$
a	$\mathbf{A} \subset \Omega$
b	$\mathbf{B} \subset \Omega$
$a \wedge b$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$
$a \vee b$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
$\sim a$	$\bar{\mathbf{A}}$
$a \to b$	$\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B} = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$
$a \leftrightarrow b$	$(\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}) \cap (\bar{\mathbf{B}} \cup \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}}$
Отношение между высказываниями	**Отношения между множествами истинности**
из *a* следует *b*	$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$
a эквивалентно *b*	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Рис. 27



$\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$ $\overline{\bar{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{C}}$ $\bar{\mathbf{B}} \cap \bar{\mathbf{C}}$

Рис. 28

Ответ на вопрос дадим двумя способами: используя язык множеств и используя язык высказываний.

Язык множеств. Перейдем от высказываний к множествам истинности:

Высказывание	Множество истинности
1. $a \to b$	$\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$
2. $\sim a \to c$	$\overline{\overline{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{C}}$
3. $\sim b \wedge \sim c$	$\overline{B} \cap \overline{\mathbf{C}}$

Множества истинности изобразим на диаграммах Вьенна (см. рис. 28, заштрихованные области).

Из диаграмм видно: нет элементов множества логических возможностей Ω, которые бы принадлежали одновременно всем трем множествам истинности, иначе, нет ни одной логической возможности для одновременной истинности высказываний 1, 2, 3, поэтому эти высказывания несовместимы в совокупности, однако они попарно совместимы.

Язык высказываний. Построим таблицы истинности высказываний 1, 2, 3 (рис. 29).

№	a	b	c	$a \to b$	$\sim a \to c$	$\sim b \wedge \sim c$
1	и	и	и	и	и	л
2	и	и	л	и	и	л
3	и	л	и	л	и	л
4	л	и	и	и	и	л
5	и	л	л	л	и	и
6	л	и	л	и	л	л
7	л	л	и	и	и	л
8	л	л	л	и	л	и

Рис. 29

В таблице нет ни одной строки, где бы все три высказывания $a \to b$, $\sim a \to c$, $\sim b \wedge \sim c$ были одновременно истинны, поэтому высказывания несовместимы в совокупности; однако, они совместимы попарно.

Результаты обоих подходов, естественно, совпали.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры несовместимых высказываний. Укажите множества истинности этих высказываний.
2. Петя, Маша, Катя и Вася хотят сфотографироваться так, чтобы молодые люди и девушки чередовались. Укажите множество всех возможностей и множества истинности высказываний: а) «Девушки и молодые люди чередуются», б) «Петя и Маша стоят рядом», в) «молодые люди стоят по краям».
3. В условиях предыдущей задачи укажите все такие пары множеств, что одно множество является подмножеством другого множества.

ГЛАВА 2. ВЕРОЯТНОСТИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

В политической практике мы часто слышим высказывания такого типа: «я имею все шансы победить на выборах», в юридической сфере говорят: «орудием убийства, скорее всего, был тяжелый предмет» и т. д. Эти высказывания относятся к определенным событиям. Так, первое высказывание относится к событию A – победа (того, кто произнес эту фразу) на выборах, а второе к событию B – орудие убийства – тяжелый камень. Судя по высказываниям, в исходе этих событий мы не уверены: событие A, так же, как и событие B, может произойти, а может и не произойти.

Событие, исход которого, судя по высказыванию, не однозначен, называется *случайным*, а само высказывание – *вероятностным*. События, о которых идет речь в высказываниях a, b, c, будем обозначать соответственно A, B, C, … При этом договоримся, что высказывание $a \wedge b$ относится к событию $A \cap B$, $a \vee b$ к событию $A \cup B$, $\sim a$ к событию $\bar{A}$ и т. д. (знаки между событиями соответствуют знакам между множествами истинности высказываний – см. рис. 27).

Напомним, маргинальными высказываниями являются логически истинное (истинное в каждой логической возможности) и логически ложное. Логически истинное высказывание относится к *достоверному* событию (его будем обозначать буквой Ω) – оно происходит всегда, в каждой логической возможности; логически ложное высказывание относится к *невозможному* событию (его будем обозначать символом $\varnothing$) – оно не происходит никогда, ни в одной логической возможности. Например, достоверным является событие Ω – число выпавших очков при однократном подбрасывании игральной кости не больше шести, а невозможным – событие $\varnothing$ – число выпавших очков при однократном подбрасывании кости больше шести.

Можно ли изучать случайные события (а следовательно, и относящиеся к ним вероятностные высказывания), если заранее сказать, каков будет исход этих событий, нельзя? Действительно, предвидеть результат единичного судебного процесса нельзя; однако, прошлый опыт многократного проведения аналогичных процессов в типичных условиях зачастую позволяет случайному событию A – победа на выборах (а, следовательно, и высказыванию a = «я выиграю на выборах») – приписать количественную меру $P(A)$ возможности появления события A (количественную меру $P(a)$ истинности высказывания a), называемую *вероятностью* события A (высказывания a). Если такое «приписывание» возможно, то говорят, что изучаемое случайное событие с т а т и с т и ч е с к и у с т о й ч и в о.

Случайное явление обладает свойством *статистической устойчивости*, если некоторая функция результатов многократных наблюдений этого явления в типичных условиях предсказуема с большой степенью надежности, тогда как результат единичного наблюдения непредсказуем.

Дадим более подробные пояснения этого свойства. Например, исход единичного подбрасывания монеты предсказать нельзя; однако при многократном ее подбрасывании примерно в одинаковых условиях можно ожидать с большой степенью уверенности, что герб появится примерно в 50% подбрасываний. Это подтверждают следующие эксперименты, проведенные в XVIII в.

Экспериментатор	Количество подбрасываний (n)	Количество выпадений герба (m)	Относительная частота выпадения герба ($\hat{p} = m/n$)
Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	12000	6019	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5005

Относительная частота $\hat{p} = m/n$ выпадений герба при большом числе n наблюдений становится предсказуемой (в экспериментах $\hat{p} \approx 0{,}5$).

Я. Бернулли (XVIII в.) доказал теорему, согласно которой относительная частота обладает свойством статистической устойчивости: *при увеличении числа n наблюдений, проводимых в типичных условиях, увеличивается (при выполнении достаточно общих ограничений) уверенность в незначительном отклонении относительной частоты* $\hat{p} = m/n$ *от некоторого постоянного числа p*. Устойчивость, или практически отсутствующая колеблемость относительной частоты при большом числе наблюдений была подмечена во многих явлениях еще задолго до XVIII в. Так, еще в древнем Китае было обнаружено, что для больших городов отношение числа родившихся мальчиков к числу всех родившихся из года в год почти неизменно чуть больше 0,5.

Статистическая устойчивость свойственна, при выполнении определенных ограничений, не только относительной частоте, но и средней арифметической результатов наблюдений – это было доказано русским математиком П. Л. Чебышевым (XIX в.): *при увеличении числа n наблюдений, проводимых в типичных условиях, увеличивается (при выполнении достаточно общих ограничений) уверенность в незначительном отклонении вычисленной по этим наблюдениям средней арифметической от некоторого постоянного числа.* Так, устойчивость свойственна среднему возрасту преступника, среднему числу ДТП, например, за месяц в крупном городе и т. д. Колеблемость этих средних при больших числах наблюдений (соответственно, обследованных преступников, месяцев) практически отсутствует.

Статистической устойчивостью, наряду с относительной частотой и средней арифметической, обладает и целый ряд других функций результатов наблюдений.

Математические методы изучения случайных явлений, обладающих свойством статистической устойчивости, предлагает теория вероятностей и математическая статистика.

2.1. Приписывание вероятностей случайным событиям (вероятностным высказываниям)

Опытная вероятность. Выше было введено понятие относительной частоты $\hat{p}(A)$ появления случайного события A – это отношение числа m_A наблюдений, в которых появилось это событие A, к общему числу n проведенных наблюдений:

$$\hat{p}(A) = m_A/n.$$

Также было отмечено, что при выполнении достаточно общих ограничений, в силу теоремы Я. Бернулли, значение относительной частоты при проведении в типичных условиях большого числа n наблюдений становится предсказуемым (статистически устойчивым). Это служит основанием тому, чтобы относительную частоту появления события в большом числе n наблюдений принять за вероятность события; ее называют *опытной*, или *эмпирической,* или *статистической вероятностью*. Отметим, опытная вероятность не постоянна: при повторении n наблюдений число наблюдений m_A, в которых произойдет событие A может отличаться от ранее полученного, в результате – новое значение относительной частоты, или опытной вероятности.

Так как всегда

$$0 \leqslant m_A \leqslant n,$$

то

$$0 \leqslant \hat{p}(A) \leqslant 1;$$

для достоверного события Ω (оно появляется во всех испытаниях): $m_\Omega = n$ и опытная вероятность $\hat{p}(\Omega) = 1$; для невозможного события $\varnothing$ (оно не появляется ни в одном испытании): $m_\varnothing = 0$ и $\hat{p}(\varnothing) = 0$.

Замечание. Из теоремы Я. Бернулли вовсе не вытекает, что устойчивость относительной частоты – неоспоримый факт. Например, бессмысленно с вероятностной точки зрения высказывание типа: «медведь может выскочить из-за фиксированного куста с вероятностью 0,1, и тогда охотник убивает его с вероятностью 0,5», так как весьма сомнительно предположение статистической устойчивости относительной частоты появления медведя из-за данного куста, равно как и относительной частоты его «убивания» в этом случае (без чего приведенные в выражении вероятности не имеют смысла). Проверка статистической устойчивости трудна и не всегда выполнима; чаще всего вопрос ее выполнимости решается на интуитивном уровне с учетом накопленного опыта работы.

Нахождение опытной вероятности требует проведения большого числа наблюдений. Но как можно, например, провести многократно уникальный судебный процесс с тем, чтобы определить вероятность вынесения оправдания? Однако ряду статистически устойчивых явлений можно «приписать» вероятности (меры объективной возможности появления этих явлений), не проводя наблюдений, такие вероятности часто называют «доопытными».

«Доопытная» вероятность. Пусть a – некоторое вероятностное высказывание, относящееся к случайному событию A. Естествен следующий алгоритм «приписывания» вероятности высказыванию a (событию A):

1. Высказывание a свяжем с множеством $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ логических возможностей (требования, предъявляемые к этому множеству, изложены на с. 15).

2. Каждому элементу ω_i множества $\mathbf{\Omega}$ поставим в соответствие некоторое положительное число, вес $P(\omega_i)$, который назовем *вероятностью логической возможности* ω_i, так, чтобы сумма этих чисел (весов) равнялась единице:

$$P(\omega_i) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1 \tag{1}$$

(запись $\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$ означает суммирование вероятностей всех тех элементов ω_i, которые образуют множество $\mathbf{\Omega}$).

3. На множестве $\mathbf{\Omega}$ выделим подмножество $\mathbf{A}$ – множество истинности высказывания a (оно включает те и только те логические возможности, для которых высказывание a истинно).

4. Находим сумму вероятностей элементов, образующих множество $\mathbf{A}$, которую и примем за вероятность $P(a)$ высказывания a (за вероятность $P(A)$ события A):

$$P(a) = P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \tag{2}$$

Заметим, если высказывание логически истинно, т. е. если высказывание относится к достоверному событию Ω, то множеством истинности этого высказывания будет все множество $\mathbf{\Omega}$, поэтому, учитывая (1), «доопытная» вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$. Множеством истинности логически ложного высказывания – высказывания, относящегося к невозможному событию $\varnothing$, будет пустое множество $\varnothing$, поэтому $P(\varnothing) = 0$. Окончательно, для любого высказывания a (события A)

$$0 \leqslant P(a) = P(A) \leqslant 1.$$

В дальнейшем не будем делать различий между вероятностями высказывания a и относящегося к этому высказыванию события A.

Задача 1. В городе работает три риэлторских агентства X_1, X_2, X_3. Клиенту известно, что каждое из агентств X_1 и X_2 примерно в 1,5 раза известнее, чем агентство X_3. Какова вероятность высказывания a = «клиент обратится или в агентство X_1, или в агентство X_2»?

Решение. Пусть множество логических возможностей $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где ω_i – решение агентством X_i ($i = 1, 2, 3$) квартирного вопроса клиента. Множество истинности высказывания a – это множество $\mathbf{A} = \{\omega_1, \omega_2\}$, и, согласно (2), $P(a) = P(\omega_1) + P(\omega_2)$. Элементу ω_3 присвоим вес $f > 0$, а элементам ω_1 и ω_2 – веса $1{,}5f$ и $1{,}5f$. Так как согласно (1) сумма этих весов должна быть равна единице, то $1{,}5f + f + 1{,}5f = 1$, откуда $f = 0{,}25$, $P(\omega_3) = f = 0{,}25$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0{,}375$. Окончательно $P(a) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = 0{,}75$.

Поиск вероятности высказывания a (события A) значительно упрощается, если число логических возможностей множества $\mathbf{\Omega}$ к о н е ч н о, например, равно N, т. е. $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, и есть основание считать эти возможности р а в н о в е р о я т н ы м и, и потому приписать каждой из них один и тот же вес. Тогда, учитывая, что в соответствии с (1)

$$P(\omega_1) + \ldots + P(\omega_N) = 1,$$

получим:

$$P(\omega_1) = \ldots = P(\omega_N) = 1/N.$$

И если множество **А** истинности высказывания a содержит M логических возможностей, то

$$P(a) = P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = M/N.$$

Формула

$$P(a) = P(A) = M/N, \qquad (3)$$

где N – общее число равновероятных логических возможностей, связанных с высказыванием a (событием A), а M – число тех возможностей, при которых высказывание a истинно (событие A произойдет), носит название *классической формулы вероятности.*

Задача 2. *В* условиях примера 1 найти вероятности следующих высказываний: d = «только один член жюри проголосует "за"», e = «по крайней мере один член жюри проголосует "за"».

Решение. При тайном голосовании трех членов жюри, поставленных в одинаковые условия, есть основание считать, что имеющиеся N = 8 логических возможностей (см. рис. 8, *а*) равновероятны. *В*ысказывание d истинно в M = 3 из них – это возможности 3, 4, 7; поэтому $P(d)$ = 3/8. *В*ысказывание e истинно в M = 7 возможностях – это возможности 1–7, поэтому $P(e)$ = 7/8.

Замечание. *В* условиях примера 2 логические возможности не равновероятны (это относится как к «грубому» множеству – см. рис.10, так и к «более детальному» – см. рис. 11): ведь составы урн различны. Однако в рамках «каждой отдельной взятой урны» логические возможности равновероятны. Поэтому вероятность высказывания a = «из первой урны будет извлечен белый шар», в котором выбор первой урны зафиксирован как истина, можно рассчитать по классической формуле:

- при использовании «грубого» множества (см. рис. 10, *а*) общее число равновероятных возможностей N = 3 – это возможности 1, 2, 3, из которых M = 2 возможности ведут к появлению белого шара; $P(a)$ = 2/3,
- при использовании «более детального» множества (см. рис. 11, *а*) N = 6 – это возможности 1–6, из которых $M = 4$ возможности ведут к появлению белого шара; по-прежнему $P(a) = 4/6 = 2/3$.

При использовании классической формулы вероятности в решении конкретных задач числовые значения входящих в формулу величин N и M не всегда очевидны. Часто их определение требует применения правил и формул *комбинаторики* – специального раздела математики, изучающего задачи составления тех или иных комбинаций из заданного множества элементов. Отметим, что сами по себе комбинаторные задачи часто возникают и в общественной сфере: например, классификация причин преступности по степени их сходства, составление вариантов расследования сложных многоэпизодных дел и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры вероятностных высказываний из Вашего опыта.
2. В корзине три красных и семь зеленых яблок. Из корзины вынимают одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.
3. Петя и Маша приглашены на день рождения в компанию из десяти человек, включая их, но приходят на него порознь, причем, как и остальные гости, в случайное время. Найти вероятность того, что они будут сидеть за праздничным столом рядом, если хозяин рассаживает гостей случайным образом, а стол, имеющий прямоугольную форму: а) стоит в середине комнаты; б) придвинут к стене.

2.2. Правила и формулы комбинаторики при вычислении вероятностей

1. Правило суммы. Если элемент x можно выбрать n_x способами и если после его выбора элемент y можно выбрать n_y способами, то выбор «либо x, либо y» можно осуществить $n_x + n_y$ способами.

2. Правило произведения. Если элемент x можно выбрать n_x способами и если после его выбора элемент y можно выбрать n_y способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) можно осуществить $n_x n_y$ способами.

Пример 7. Различающиеся только цветом $n_x + n_y$ шаров распределены по двум урнам: в первой урне n_x шаров, во второй n_y. *В*ыберем случайным образом урну (это можно сделать так: подбросим монету и при выпадении герба выберем первую урну; цифры – вторую), а затем из нее случайным образом шар (так как шары различаются только цветом, то это можно сделать так: перемешать шары и, закрыв глаза, вытащить один). Так как заранее неизвестно, из какой урны будет вынут шар, то число вариантов цвета для шара, вынутого либо из первой, либо из второй урны, равно $n_x + n_y$.

Теперь случайным образом выберем шар из первой урны, а затем случайным образом шар из второй урны. Так как шар, вынутый из первой урны, имеет n_x вариантов цвета и при каждом из этих вариантов шар, вынутый из второй урны, имеет n_y вариантов цвета, то различных упорядоченных пар цветов для двух вынутых шаров (упорядоченность пар цветов означает, что, например, пары «синий, белый» и «белый, синий» различны) будет $n_x n_y$.

3. Перестановки.

Перестановками без повторений из n различных элементов называются все возможные последовательности этих n элементов.

Число перестановок без повторений из n элементов обозначают символом P_n и подсчитывают так:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad (4)$$

(символ $n!$ читается «эн факториал», $n!$ равен произведению натуральных чисел от 1 до n; по определению $0! = 1$).

Пример 8. Перестановки без повторений из $n = 3$ различных элементов: a, b, c таковы: a, b, c; b, a, c; b, c,

Перестановками с повторением из n элементов k типов ($k \le n$):
число элементов первого типа равно n_1
число элементов второго типа равно n_2
……………………………………..……
число элементов k-го типа равно n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

называются все возможные последовательности исходных n элементов.

Число перестановок с повторениями обозначают символом $\overline{P}_{n=n_1+n_2+\ldots+n_k}$ и подсчитывают так:

$$\overline{P}_{n=n_1+n_2+\ldots+n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (5)$$

Пример 9. Перестановки с повторениями из $n = 3$ элементов: a, a, b $k = 2$ типов: тип «a» повторяется $n_1 = 2$ раза, тип a; a, c, b; c, b, a; c, a, b. Число перестановок равно 6. И согласно формулы (4) получим такой же результат: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

«b» повторяется $n_2 = 1$ раз, таковы: a, a, b; a, b, a; b, a, a. Число перестановок равно 3. И согласно формуле (5) получим такой же результат: $\overline{P}_{3=2+1} = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$.

Замечания.

- Если все n элементов разных типов, т. е. число типов $k = 1+1+\ldots+1 = n$, то число перестановок с повторениями равно числу перестановок без повторений. Действительно,

$$\overline{P}_{n\, =\, 1+1+\ldots+1} = \frac{n!}{1!1!\ldots1!} = n! = P_n.$$

- Обратим внимание на то, что при любом виде перестановок (и без повторений, и с повторениями) *каждая перестановка включает все n исходных элементов и одна перестановка отличается от другой только порядком следования этих элементов.*

Задача 3. В выборах участвует пять кандидатов: A, B, C, D, E. Какова вероятность того, что в списке этих пяти человек, составленном случайным образом: а) B будет следовать сразу после A, б) B не будет перед A?

Решение. Список из пяти человек можно составить $N = 5!$ способами – это общее число равновероятных возможностей.

а) «B следует сразу после A» в списках следующих видов:

- A, B,?,?,? – таких списков $P_3 = 3!$, так как последовательность трех букв – трех человек C, D, E на последних трех местах – это некоторая перестановка букв C, D, E, а число таких перестановок равно $P_3 = 3!$,
- ?, A, B,?,? – таких списков тоже 3!,
- ?,?, A, B,? – таких списков тоже 3!,
- ?,?,?, A, B – таких списков тоже 3!.

Поэтому в соответствии с правилом суммы число списков, в которых B следует сразу после A, равно: $M = 3! + 3! + 3! + 3! = 4 \cdot 3!$ и искомая вероятность $P = M/N = (4 \cdot 3!)/5! = 1/5$.

б) «B не будет перед A» в списках следующих видов:

1. A, $\underbrace{?,\ ?,\ ?,\ ?}_{\text{места для B}}$ – таких списков $P_4 = 4!$ (последовательность четырех различных букв B, C, D, E на последних четырех местах – это некоторая перестановка этих букв, а число таких перестановок равно $P_4 = 4!$),
2. ?, A, $\underbrace{?,\ ?,\ ?}_{\text{места для B}}$ – таких списков 4! – 3! (если бы не было ограничений на расположение B, то число списков вида «?, A, ?, ?, ?» было бы равно 4!; из этого числа надо вычесть количество списков вида «B, A, ?, ?, ?», а их 3!),
3. ?, ?, A, $\underbrace{?,\ ?}_{\text{места для B}}$ – таких списков 4! – 2·3! (из 4! списков вида «?, ?, A, ?, ?» вычитаем 3! списков вида «B, ?, A, ?, ?» и 3! списков вида «?, B, A, ?, ?»),
4. ?, ?, ?, A, B – таких списков 3!

Поэтому число списков, в которых «B не будет перед A»,

$$M = 4! + (4! - 3!) + (4! - 2\cdot 3!) + 3! = 60,$$

и вероятность того, что в списке, составленном случайным образом, «В не будет перед А», равна $P = M/N = 60/5! = 0{,}5$.

Задача 4. Какова вероятность получить слово «юрист», переставляя в случайном порядке буквы этого слова? Какова вероятность получить слова «математика», переставляя в случайном порядке буквы этого слова?

Решение. *В* слове «юрист» все 5 букв разные: число перестановок этих букв равно $N = P_5 = 5!$ и лишь $M = 1$ вариант из 5! вариантов дает слово «юрист». Поэтому вероятность получить это слово $P = M/N = 1/5! = 1/120$.

В слове «математика» $n = 10$ букв, однако различных букв $k = 6$:

- «м», которая повторяется $n_1 = 2$ раза,
- «а», которая повторяется $n_2 = 3$ раза,
- «т», которая повторяется $n_3 = 2$ раза,
- «е», которая повторяется $n_4 = 1$ раз,
- «и», которая повторяется $n_5 = 1$ раз,
- «к», которая повторяется $n_6 = 1$ раз.

Поэтому перестановки букв слова «математика» – это перестановки с повторениями из $n = 10$ элементов $k = 6$ типов, и в соответствии с формулой (5) общее число таких перестановок

$$\overline{P}_{10 = 2+3+2+1+1+1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200.$$

Из них только одна перестановка дает слово «математика»; вероятность получить это слово, случайно переставляя буквы, равна 1/151200.

4. Размещения.

Размещениями без повторений из n различных элементов по m элементов ($m < n$) называются все такие последовательности m различных элементов, выбранных из исходных n, которые *отличаются друг от друга или порядком следования элементов или составом элементов.*

Число размещений без повторений из n элементов по m обозначают символом A_n^m,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (6)$$

где

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$, $(n-m)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-m)$.

Пример 10. Размещения без повторений из $n = 3$ различных элементов: a, b, c по $m = 2$ элемента таковы:

Размещениями с повторениями из элементов k типов по m элементов (k и m могут быть в любых соотношениях: $m < k$, $m \geqslant k$) называются все такие последовательности m элементов, принадлежащих исходным типам, которые *отличаются друг от друга или порядком следования элементов или составом элементов*.

Число размещений с повторениями из элементов k типов по m элементов обозначают $\overline{A}_k^m$,

$$\overline{A}_k^m = k^m \qquad (7)$$

Пример 11. Размещения с повторениями из элементов $k = 2$ типов (типа «a» и типа «b») по $m = 3$ элеa, b; b, a; a, c; c, a; b, c; c, b. Размещений 6; и согласно формуле (6) получим такой же результат:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1} = 6.$$

мента таковы: a, a, a; b, a, a; a, b, a; a, a, b; b, b, a; b, a, b; a, b, b; b, b, b. Размещений с повторениями – 8; и согласно формуле (7) получим такой же результат: $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Замечание. Формулой (7) мы пользовались и ранее, не приводя ее. Так, подсчет числа строк в таблице истинности высказывания, состоящего из $m = 3$ простых высказываний, каждое из которых может быть $k = 2$ типов (или «и» – истинным, или «л» – ложным); или подсчет числа подмножеств множества Ω, состоящего из $m = 3$ элементов, для каждого из которых может быть $k = 2$ варианта (или элемент войдет в подмножество или не войдет), – это подсчет числа размещений с повторениями: $\overline{A}_k^m = \overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Выборка без возвращения и выборка с возвращением.

- **Выборка без возвращения.** Пусть имеется совокупность n элементов, пронумерованных числами 1, 2, …, n; назовем эту совокупность *генеральной*. Случайным образом выберем элемент (этот выбор можно осуществить так: номера напишем на одинаковых карточках и, перемешав карточки, например, в шапке, закрыв глаза, вытащим одну; ее номер и будет номером отобранного элемента). Отобранный элемент отложим в сторону. Повторим выбор m раз ($m < n$), не возвращая отбираемые элементы в исходную генеральную совокупность (не возвращая отбираемые карточки обратно в шапку). В результате окажется выбранной некоторая группа из m элементов. Ее называют *m – выборкой без возвращения из генеральной совокупности объема n ($m < n$).* Вернем m отобранных элементов в генеральную совокупность и вновь «без возврата» отберем из n элементов m элементов и т. д. Сколько существует различных m выборок, если различными считать *выборки, отличающиеся или составом номеров вошедших в них элементов, или порядком следования номеров*? Число таких выборок равно числу размещений без повторений (ведь в выборке не может оказаться одинаковых номеров) из n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

- **Выборка с возвращением.** Из той же совокупности n элементов отберем m элементов, но перед выбором каждого следующего элемент, отобранный на предыдущем шаге, будем возвращать в исходную генеральную совокупность (возвращать отобранную карточку в шапку), предварительно запомнив его номер. Выбранную (запомненную) группу из m элементов называют *m-выборкой с возвращением из генеральной совокупности объема n* (при выборке с возвращением m и n могут находиться в любом соотношении: $m \leqslant n$ и $m>n$). Поскольку каждый из отобранных m элементов может быть n типов: иметь номер 1, иметь номер 2, …, иметь номер n, то число различных m-выборок с возвращением равно числу размещений с повторениями (ведь в выборке могут оказаться два и больше одинаковых номеров) из элементов n типов по m элементов:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Задача 5. В фирме работают 8 человек одинаковой квалификации, среди них Иванов, Петров, Сидоров. Случайно выбранным троим из них (из восьми) поручают три различных вида работ (первому выбранному – работу первого вида, второму выбранному – второго вида, третьему – третьего вида). Какова вероятность того, что работа первого вида будет поручена Иванову, второго – Петрову, третьего – Сидорову?

Решение. Отбор трех человек из восьми в условиях задачи – это выборка без возврата, где важен не только состав отобранных людей, но и в каком порядке они отобраны: ведь от порядка отбора зависит распределение работ. Поэтому число вариантов отбора $m = 3$ человек из $n = 8$

$$N = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336.$$

И только в $M = 1$ варианте из этих 336 работа первого вида будет поручена Иванову, второго – Петрову, третьего – Сидорову. Поэтому искомая вероятность $P = M/N = 1/336$.

Задача 6. Замок камеры хранения имеет четыре диска, каждый из которых разделен на 10 секторов; на секторах каждого из дисков написаны цифры 0, 1, 2, …, 9. Какова вероятность открыть закрытую камеру для человека: а) забывшего все, что он набрал на дисках, закрывая камеру, б) помнившего только цифру, набранную на первом диске, в) помнившего только, что ни на втором, ни на третьем, ни на четвертом диске он не набирал цифры 6?

Решение. а) Пытаясь открыть камеру с четырьмя дисками, человек, по сути, выбирает $m = 4$ цифры из $n = 10$ цифр, при этом выбор с возвратом. Общее число вариантов такого выбора $N = \overline{A}_{10}^4 = 10^4$, из которых только в $M = 1$ варианте камера откроется. Поэтому искомая вероятность равна $1/10^4$.

б) При известной цифре на первом диске, общее число вариантов «набора» цифр на $m = 3$ оставшихся дисках $N = \overline{A}_{10}^3 = 10^3$. Искомая вероятность равна $1/10^3$.

в) На первом диске может быть набрана любая из 10 цифр. Число вариантов набора цифр (уже не из 10, а из 9 цифр) на трех оставшихся дисках равно $\overline{A}_9^3 = 9^3$. Общее число вариантов набора цифр на четырех дисках, с учетом правила произведения (см. с. 50), будет $N = 10 \cdot 9^3$. Искомая вероятность равна $1/(10 \cdot 9^3)$.

5. Сочетания.

Сочетаниями без повторений из n различных элементов по m элементов ($m<n$) называются все такие последовательности m различных элементов, выбранных из исходных n, которые *отличаются друг от друга составом элементов*.

Число сочетаний без повторений из n элементов по m обозначают символом C_n^m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (8)$$

Пример 12. Сочетания без повторений из $n = 3$ различных элементов: a, b, c по $m = 2$ элемента таковы: a, b; a, c; c, b (сочетания отличаются друг от друга только составом элементов, поэтому, например, последовательности «a, b» и «b, a» – это одно и то же сочетание). Число сочетаний без повторений – 3. И согласно формуле (8) получим такой же результат:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Сочетаниями с повторениями из элементов k типов по m элементов (k и m могут быть в любых соотношениях: $m \leqslant k$, $m > k$) называются все такие последовательности m элементов, принадлежащих исходным типам, *которые отличаются друг от друга составом элементов*.

Число сочетаний с повторениями из элементов k типов по m элементов обозначают символом $\overline{C}_k^m$:

$$\overline{C}_k^m = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} \qquad (9)$$

Пример 13. Сочетания с повторениями из элементов $k = 2$ типов: тип «a» и тип «b» по $m = 3$ элемента таковы: a, a, a; b, a, a; b, b, a; b, b, b (сочетания отличаются друг от друга только составом элементов, поэтому, например, последовательности: «b, a, a», «a, b, a» и «a, a, b» – это одно и то же сочетание). Число сочетаний с повторениями – 4. И согласно формуле (9), получим такой же результат

$$\overline{C}_2^3 = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Задача 7. В примере 5 в качестве «голосующей коалиции» был рассмотрен Совет безопасности ООН. Каково число выигрывающих и минимальных выигрывающих коалиций в Совете безопасности?

Решение. Напомним, выигрывающая коалиция включает «большую пятерку» и не менее двух из шести представителей малых наций. Поскольку «большая пятерка» в любой выигрывающей коалиции обязательно должна присутствовать, то вариативность выигрывающих коалиций определяется количеством (или 2, или 3, или 4, или 5, или 6) и составом вошедших в них представителей малых наций. Число вариантов выбора из 6 представителей малых наций 2 представителей равно числу сочетаний (ведь порядок выбора не важен!) без повторений из $n = 6$ по $m = 2$, т. е.

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15 \text{ –}$$

именно столько будет минимальных выигрывающих коалиций. Аналогично, число вариантов выбора из 6 представителей малых наций трех равно $C_6^3 = 20$, четырех – $C_6^4 = 15$, пяти – $C_6^5 = 6$, шести – $C_6^6 = 1$. Окончательно число выигрывающих коалиций, в соответствии с правилом суммы, равно $C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 57$.

Задача 8. Известно, что 5 из 40 пассажиров автобуса замешаны в похищении крупной суммы денег. На остановке к автобусу подошел инспектор уголовного розыска и заявил, что ему для обнаружения по крайней мере одного преступника достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: риск или трезвый расчет?

Решение. Дадим «урновую» интерпретацию условию задачи. Пусть $K = 40$ пассажиров – это 40 пронумерованных шаров в урне, из которых $L = 5$ черных (это виновные пассажиры) и $K - L = 35$ белых (это невиновные). Из урны наудачу берут $k = 6$ шаров (пассажиров). Число вариантов выбора $k = 6$ из $K = 40$ шаров $N = C_K^k = C_{40}^6$ (используем сочетания без повторений, так как шары пронумерованы разными числами, и важны номера отобранных шаров, но не порядок). По условию, в выборке должен оказаться по крайней мере один черный шар (виновный), т. е. в выборке должен оказаться:

- либо $l = 1$ черный шар и $k - l = 5$ белых,
- либо $l = 2$ черных шара и $k - l = 4$ белых,
- либо $l = 3$ черных шара и $k - l = 3$ белых,
- либо $l = 4$ черных шара и $k - l = 2$ белых,
- либо $l = 5$ черных шаров и $k - l = 1$ белый.
- Число вариантов выбора $l = 1$ черного шара (виновного) из $L = 5$ черных равно $C_L^l = C_5^1$. Для каждого такого варианта должно быть выбрано $k - l = 6 - 1 = 5$ белых шаров (невиновных) из $K - L = 40 - 5 = 35$ белых, что можно сделать $C_{K-L}^{k-l} = C_{35}^5$ способами. Таким образом, число вариантов выбора $l = 1$ черного шара и $k - l = 5$ белых, согласно правилу произведения, равно $C_L^l C_{K-L}^{k-l} = C_5^1 C_{35}^5$ (см. рис. 30, *а*). *А*налогично число вариантов отбора:
- $l = 2$ черных и $k - l = 6 - 2 = 4$ белых шаров равно $C_L^l C_{K-L}^{k-l} = C_5^2 C_{35}^4$ (см. рис.30, *б*),
- $l = 3$ черных и $k - l = 3$ белых равно $C_5^3 C_{35}^3$,
- $l = 4$ черных и $k - l = 2$ белых равно $C_5^4 C_{35}^2$,
- $l = 5$ черных и $k - l = 1$ белого равно $C_5^5 C_{35}^1$.

Тогда число вариантов выбора 6 шаров (пассажиров) из 40, в которых окажется по крайней мере один черный шар (виновный), согласно правилу сложения, будет $M = C_5^1 C_{35}^5 + C_5^2 C_{35}^4 + C_5^3 C_{35}^3 + C_5^4 C_{35}^2 + C_5^5 C_{35}^1 = 2215220$. И вероятность обнаружения в выборке из шести пассажиров по крайней мере одного преступника равна

$$P = \frac{M}{N} = \frac{2215220}{C_{40}^{6}} = 0{,}57 \ –$$

вероятность превысила 0,5 – по-видимому, это и дало основание инспектору назвать цифру 6.

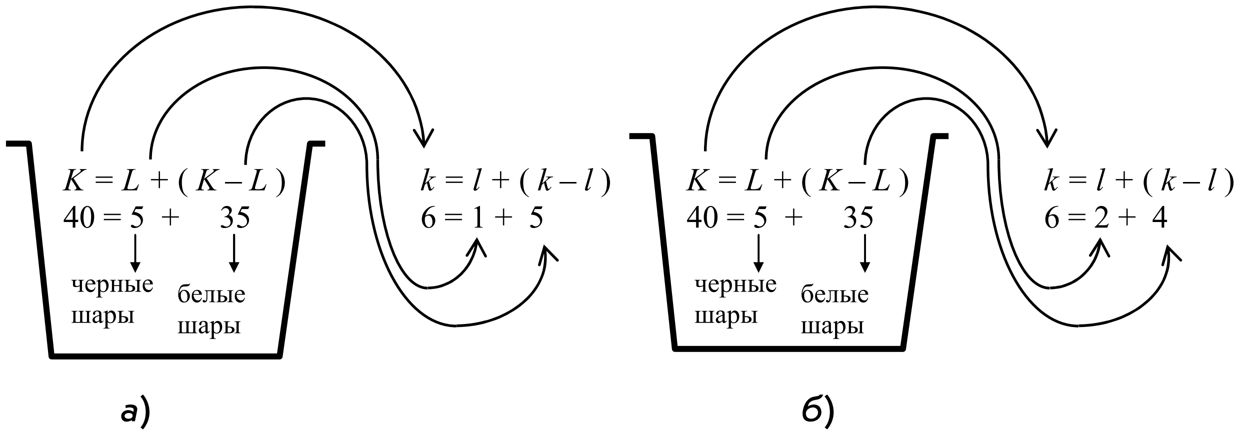


Рис. 30

Вероятность того, что при отборе «без возвращения» из K пронумерованных шаров, среди которых L черных и $K – L$ белых, k шаров, в выборке окажется l черных и $k – l$ белых рассчитывается по формуле

$$P = \frac{C_{L}^{l} C_{K-L}^{k-l}}{C_{K}^{k}}, \tag{10}$$

получившей название формулы *гипергеометрической* вероятности.

Задача 9. Инвестор формирует портфель ценных бумаг. Он может вложить свои деньги в акции 5 различных фирм. Сколькими способами инвестор может образовать набор из 7 акций, и какова вероятность того, что в набор попадут 4 акции, принадлежащие различным фирмам?

Решение. По условию, из акций $k = 5$ типов инвестор составляет набор из $m = 7$ акций (в число таких наборов может, в том числе, входить и набор, все 7 акций которого принадлежат какой-то одной фирме). Очевидно, что для инвестора важен только состав набора: акции каких фирм и в каких количествах входят в набор, и совсем не важен порядок следования отобранных акций. Поэтому количество таких наборов равно числу сочетаний с повторениями из элементов $k = 5$ типов по $m = 7$ элементов: $N = \overline{C}_{5}^{7}$ или, учитывая формулу (9),

$$N = \overline{C}_{5}^{7} = \frac{(5+7-1)!}{7!(5-1)!} = 330.$$

Среди этих наборов количество наборов, в каждом из которых 4 акции принадлежат различным фирмам, равно числу сочетаний без повторений из 5 элементов (5 различным фирм) по 4:

$$M = C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{M}{N} = \frac{C_5^4}{C_5^7} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В отделе работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник отдела должен выделить одного сотрудника. Определить, сколько способов существует у начальника управления.

2. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Определить, сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию.

3. В сессию в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать пять экзаменов. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если запрещается сдавать два экзамена в один день?

4. В конкурсе по трем номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

5. Двери лифта закрылись на первом этаже прямо перед Петей, который успел только заметить, что в лифт вошли пять человек. В общежитии семь этажей, и лифт, если откроет на каком-либо из них двери, стоит там целую минуту. Петя живет на седьмом этаже и очень не хочет идти по лестнице. Он размышляет, каковы вероятности следующих событий: а) все пятеро выйдут на одном этаже; б) все пятеро выйдут на разных этажах. Найти эти вероятности.

2.3. Вычисление вероятностей составных высказываний

Ранее было введено понятие несовместимых высказываний. Несовместимость высказываний, определенных на множестве логических возможностей (универсальном множестве) Ω, означает, что эти высказывания никогда не могут оказаться одновременно истинным.

Введем понятие независимости высказываний. Пусть a и b – два высказывания, определенные на универсальном множестве Ω. Предположим, что получена информация, согласно которой высказывание, скажем a, истинно. Вероятность высказывания b после получения такой информации о высказывании a называется *условной вероятностью* и обозначается символом $P_a(b)$, который следует читать «вероятность b при условии a». Высказывание b *не зависит* от a, если и только если вероятность b при условии a равна вероятности b, т. е.

$$P_a(b) = P(b) \qquad (11)$$

Свойство независимости является в з а и м н ы м: если b не зависит от a, то и a не зависит от b т. е. $P_b(a) = P(a)$. При независимости a и b также независимы a и $\sim b$, $\sim a$ и b, $\sim a$ и $\sim b$.

Если $P_a(b) \neq P(b)$, то высказывания a и b *зависимы*.

Пример 14. *В*ернемся к примеру 2: имеется две урны; в первой лежат один белый и два черных шара, во второй – один белый и один черный. Наугад выбирается одна из урн и из нее последовательно без возвращения вынимаются два шара.

Каждой из пяти логических возможностей (см. рис. 10, *а*) соответствует свой «путь». Отрезки, составляющие путь, назовем «ветвями». Присвоим им вероятности. *В*ведем высказывания: a = «выбрана первая урна», b = «первый выбранный шар – белый», c = «второй выбранный шар – белый» (рис. 31).

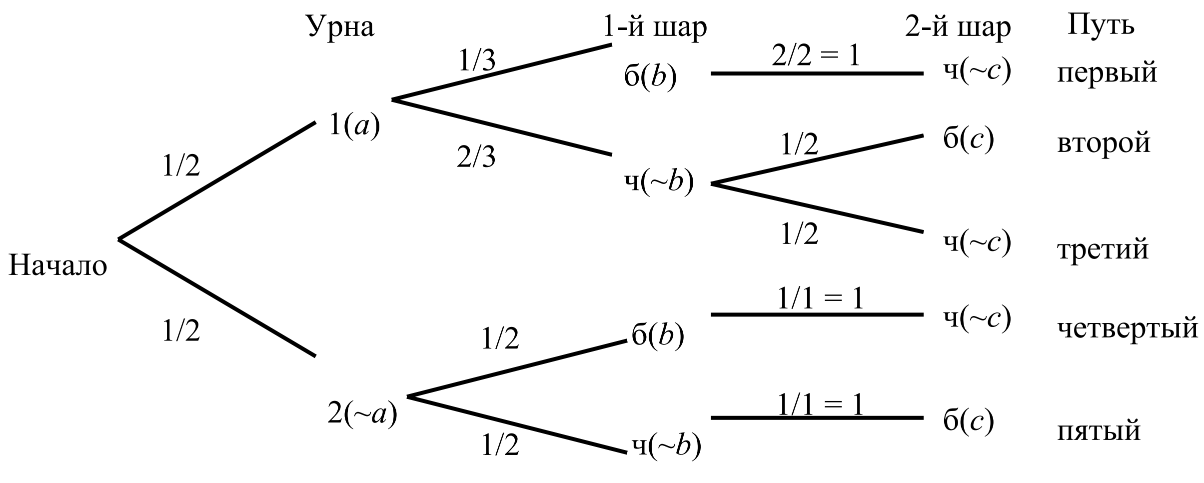


Рис. 31

Рассуждаем так. Выбор наугад одной из двух урн означает, что $P(a) = P(\sim a) = 1/2$, где $\sim a$ – это высказывание «выбрана не первая (а вторая) урна»; эти вероятности проставлены на соответствующих ветвях (см. рис. 31). Далее, если выбрана первая урна, т. е. истинно высказывание a, то $P_a(b)=1/3$, а $P_a(\sim b)=2/3$: ведь в первой урне три шара, из которых один белый и два черных. Далее, если истинно высказывание $a \wedge b$, т. е. выбрана первая урна и из нее взят белый шар, то в урне останется два шара и оба они черные, поэтому $P_{a\wedge b}(\sim c)=2/2=1$.

Итак, вероятности ветвей первого пути таковы:

$$P(a)=\frac{1}{2}, \quad P_a(b)=\frac{1}{3}, \quad P_{a\wedge b}(\sim c)=1.$$

Аналогично вероятности ветвей:

- второго пути $\quad P(a)=\dfrac{1}{2}, \quad P_a(\sim b)=\dfrac{2}{3}, \quad P_{a\wedge\sim b}(c)=\dfrac{1}{2}$;
- третьего пути $\quad P(a)=\dfrac{1}{2}, \quad P_a(\sim b)=\dfrac{2}{3}, \quad P_{a\wedge\sim b}(\sim c)=\dfrac{1}{2}$;
- четвертого пути $\quad P(\sim a)=\dfrac{1}{2}, \quad P_{\sim a}(b)=\dfrac{1}{2}, \quad P_{\sim a\wedge b}(\sim c)=\dfrac{1}{1}=1$;
- пятого пути: $\quad P(\sim a)=\dfrac{1}{2}, \quad P_{\sim a}(\sim b)=\dfrac{1}{2}, \quad P_{\sim a\wedge\sim b}(c)=\dfrac{1}{1}=1$.

Можно ли выразить условную вероятность $P_a(b)$ через «безусловные» вероятности? Да, если $P(a)\neq 0$, т. е. если высказывание a не является логически ложным. *С*оответствующая формула имеет вид:

$$P_a(b)=\frac{P(a\wedge b)}{P(a)}, \qquad P(a)\neq 0 \tag{12}$$

Обоснование формулы таково: информация о том, что высказывание a истинно, сокращает число логических возможностей универсального множества **Ω,** на котором определены высказывания *а и b* и их вероятности $P(a)$ и $P(b)$: оно будет сведено к числу возможностей множества **A** истинности высказывания a. Это, в свою очередь, приводит: во-первых, к уменьшению всех вероятностей, определенных на **Ω**, в $P(a)$ раз и, во-вторых, к тому, что множеством истинности высказывания b будет не **B,** а $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$.

Поэтому

$$P_a(b)=\sum_{\omega_i\in A\cap B}\frac{P(\omega_i)}{P(a)}=\frac{1}{P(a)}\sum_{\omega_i\in A\cap B}P(\omega_i)=\frac{1}{P(a)}P(a\wedge b)\ -$$

получили формулу (12).

Из формулы (12), очевидно, вытекают следующие соотношения:

- формула вероятности конъюнкции двух п р о и з в о л ь н ы х высказываний

$$P(a\wedge b)=P(a)P_a(b); \tag{13}$$

- формула вероятности конъюнкции двух независимых высказываний (напомним, что если a и b независимы, то $P_a(b) = P(b)$)

$$P(a \wedge b) = P(a)P(b). \tag{14}$$

Обобщение формулы (13) на случай трех высказываний *a, b, c* имеет вид:

$$P(a \wedge b \wedge c) = P(a)P_a(b)P_{a \wedge b}(c). \tag{15}$$

Замечание. Для расчета $P(a \wedge b \wedge c)$ можно использовать 3! = 6 тождественных формул, в том числе, например, такую:

$$P(a \wedge b \wedge c) = P(c \wedge a \wedge b) = P(c)P_c(a)P_{c \wedge a}(b).$$

Обобщение формулы (14) на случай трех независимых в совокупности высказываний *a, b, c* (*a, b, c* независимы в совокупности, если и только если независимы a и b, a и c, $a \wedge b$ и c, $a \wedge c$ и b, $b \wedge c$ и a) имеет такой вид:

$$P(a \wedge b \wedge c) = P(a)P(b)P(c). \tag{16}$$

Пример 15. В примере 14 были приписаны вероятности ветвям всех путей дерева логических возможностей (см. рис. 31). Используя введенные в примере высказывания *a, b* и *c*, найдем вероятность каждой логической возможности:

№ возможности	Соответствующее высказывание	Вероятность
1	$a \wedge b \wedge \sim c$	$P(a)P_a(b)P_{a \wedge b}(\sim c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
2	$a \wedge \sim b \wedge c$	$P(a)P_a(\sim b)P_{a \wedge \sim b}(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
3	$a \wedge \sim b \wedge \sim c$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
4	$\sim a \wedge b \wedge \sim c$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
5	$\sim a \wedge \sim b \wedge c$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Заметим, логические возможности не равновероятны. Однако равновероятны возможности 1, 2, 3, соответствующие высказыванию a = «выбрана первая урна»; вероятность каждой из них равна 1/6. Аналогично равновероятны возможности 4 и 5, соответствующие высказыванию $\sim a$ = «выбрана вторая урна»; вероятность каждой из них равна 1/4.

Из рассмотренного ранее алгоритма приписывания высказываниям вероятностей вытекают следующие соотношения:

- формула вероятности дизъюнкции двух несовместимых высказываний

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b); \tag{17}$$

Действительно, множеством истинности высказывания $a \vee b$ является множество $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, где **A** и **B** –множества истинности соответственно высказывания *a* и *b*, и в соответствии с (2)

$$P(a \vee b) = \sum_{\omega_i \in A \cup B} P(\omega_i).$$

Из несовместимости же *a* и *b* следует, что **A** и **B** не имеют общих точек (см. рис. 18, *б*), поэтому

$$\sum_{\omega_i \in A \cup B} P(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i) = P(a) + P(b).$$

Окончательно $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$.

- формула вероятности дизъюнкции двух произвольных высказываний

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b). \qquad (18)$$

Действительно, множества истинности **A** и **B** совместимых высказываний имеют общие точки (см. рис. 18, *а*), и в этом случае

$$\sum_{\omega_i \in A \cup B} P(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i) - \sum_{\omega_i \in A \cap B} P(\omega_i)$$

или

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b).$$

- формула вероятности отрицания высказывания

$$P(\sim a) = 1 - P(a); \qquad (19)$$

Действительно, с одной стороны, противоположные высказывания *a* и *~a* – несовместимы и, согласно (17), $P(a \vee \sim a) = P(a) + P(\sim a)$. С другой стороны, высказывание $a \vee \sim a$ – логически истинное, поэтому $P(a \vee \sim a) = 1$. Окончательно $P(a) + P(\sim a) = 1$ или

$$P(\sim a) = 1 - P(a).$$

Обобщение формулы (17) на случай трех попарно несовместимых высказываний *a, b, c* имеет вид

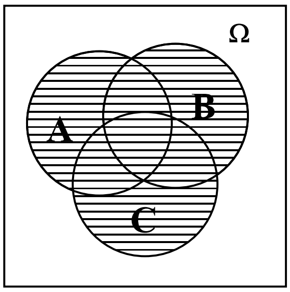
$$P(a \vee b \vee c) = P(a) + P(b) + P(c). \qquad (20)$$

Замечание. Из попарной несовместимости трех высказываний следует несовместимость всех трех; однако обратное утверждение неверно: при несовместимости *a*, *b*, *c* возможна их попарная совместимость (см. пример 6).

Обобщение формулы (18) на случай трех высказываний имеет такой вид:

$$P(a \vee b \vee c) = P(a) + P(b) + P(c) - P(a \wedge b) - P(a \wedge c) - P(b \wedge c) + P(a \wedge b \wedge c) \qquad (21)$$

B справедливости этой формулы нетрудно убедиться, используя изображенные на рис. 32 множества **A**, **B**, **C** истинности высказываний *a*, *b* и *c*, и множество **A∪B∪C** (оно заштриховано) истинности высказывания $a \vee b \vee c$.



A∪B∪C

Рис. 32

Задача 10. В группе 9 человек, из которых положительные оценки имеют:
6 человек – по социологии (= *a*),
5 – по математике (= *b*),
7 – по информатике (= *c*),
4 – по социологии и математике (= $a \wedge b$),
2 – по социологии и информатике (= $a \wedge c$),
3 – по математике и информатике (= $b \wedge c$),
один студент – по всем трем дисциплинам (= $a \wedge b \wedge c$).
Есть ли в этих сведениях ошибка?

Решение. По условию задачи высказывания *a*, *b* и *c* совместимы как попарно, так и все три. Поэтому общие точки (логические возможности) будут иметь как любая пара множеств **A**, **B**, **C** истинности этих высказываний, так и все три (см. рис. 32). *В* группе 9 человек, $P(a) = 6/9$, $P(b) = 5/9$, $P(c) = 7/9$, $P(a \wedge b) = 4/9$, $P(a \wedge c) = 2/9$, $P(b \wedge c) = 3/9$, $P(a \wedge b \wedge c) = 1/9$ и в соответствии с (21):

$$P(a \wedge b \wedge c) = \frac{6}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9} - \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Получили, что вероятность $P(a \wedge b \wedge c) > 1$, а этого быть не может. *С*ледовательно, в сведениях есть ошибка.

Задача 11. Жюри состоит из трех человек X, Y, Z. X и Y, каждый с вероятностью $p = 0{,}8$, принимают правильное решение, а Z для вынесения решения подбрасывает монету. Члены жюри действуют *независимо*. Решение принимается большинством голосов. Какова вероятность правильного решения?

Решение. Введем высказывания:

- *a* = «X примет правильное решение», $P(a) = 0{,}8$, $P(\sim a) = 0{,}2$;
- *b* = «Y примет правильное решение», $P(b) = 0{,}8$, $P(\sim b) = 0{,}2$;
- *c* = «Z примет правильное решение», $P(c) = 0{,}5$, $P(\sim c) = 0{,}5$.

Правильное решение будет принято, если и только если правильное решение будет принято какими-то двумя членами жюри или всеми тремя: правильное решение примут X, Y, но не Z; или X, Z, но не Y; или Y Z, но не X; или X, Y и Z, т. е. будет истинно высказывание:

$$(a\wedge b\wedge{\sim}c)\vee(a\wedge{\sim}b\wedge c)\vee({\sim}a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c).$$

Поскольку компоненты этой дизъюнкции п о п а р н о н е с о в м е с т и м ы, а компоненты конъюнкций, расположенных в скобках, н е з а в и с и м ы по условию задачи, то искомая вероятность

$$P((a\wedge b\wedge{\sim}c)\vee(a\wedge{\sim}b\wedge c)\vee({\sim}a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c)) =$$
$$= P(a\wedge b\wedge{\sim}c) + P(a\wedge{\sim}b\wedge c) + P({\sim}a\wedge b\wedge c) + P(a\wedge b\wedge c)) =$$
$$= P(a)P(b)P({\sim}c) + P(a)P({\sim}b)P(c) + P({\sim}a)P(b)P(c) + P(a)P(b)P(c) =$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 + 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 + 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 = 0{,}8.$$

Дерево логических возможностей с указанием вероятностей путей изображено на рис. 33; пути, ведущие к принятию положительного решения, и их вероятности выделены.

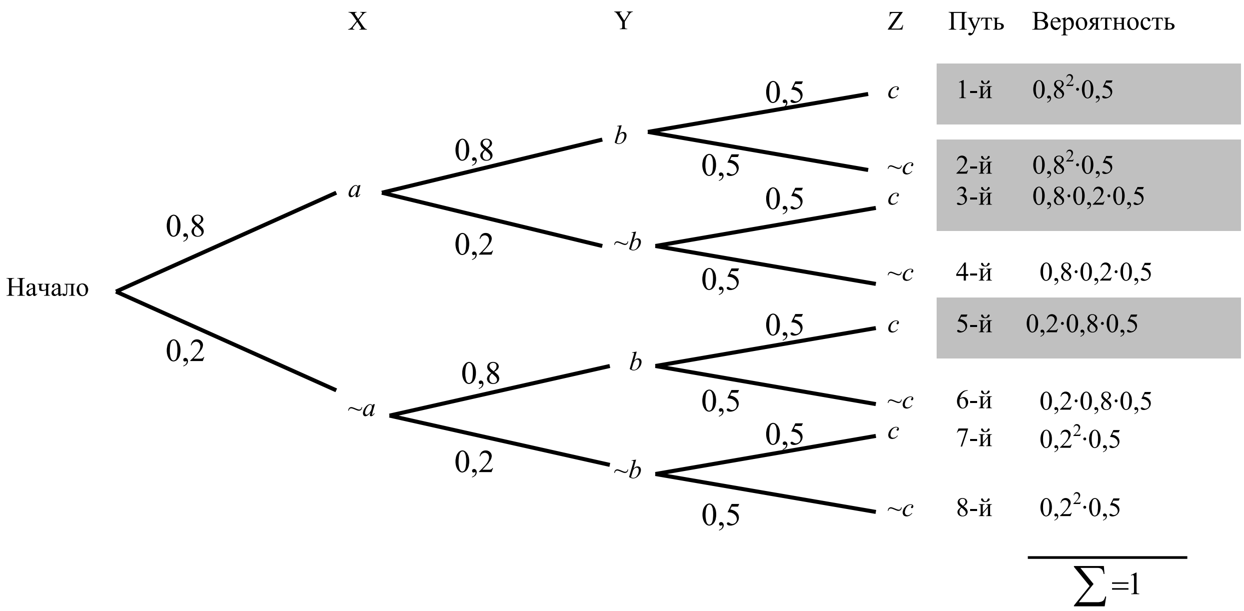


Рис. 33

Приведем (без вывода) еще ряд наиболее часто используемых формул вычисления вероятностей.

Формула полной вероятности:

$$P(a) = P(h_1)P_{h_1}(a) + P(h_2)P_{h_2}(a) + \ldots + P(h_n)P_{h_n}(a) \tag{22}$$

используется, если и только если выполняются следующие у с л о в и я:

1) высказывание a истинно лишь при истинности одного из высказываний: h_1, h_2, …, h_n, называемых *гипотезами*;

2) гипотезы h_1, h_2, …, h_n попарно несовместимы; (23)

3) дизъюнкция $h_1\vee h_2\vee\ldots\vee h_n$ – логически истинное высказывание.

Замечание. Выполнение второго и третьего условий тождественно такому требованию:

$$P(h_1) + P(h_2) + \ldots + P(h_n) = 1.$$

Множества истинности высказываний, удовлетворяющих условиям (23), для случая $n = 3$ гипотез изображены на рис. 34. *В* силу попарной несовместимости гипотез, никакая пара множеств $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ их истинности не имеет общих точек; а в силу логической истинности дизъюнкций гипотез множество истинности этой дизъюнкции $\mathbf{H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega}$, где $\mathbf{\Omega}$ – универсальное множество логических возможностей, на котором определены все четыре высказывания: a, h_1, h_2, h_3.

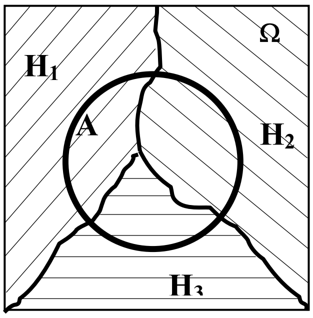


Рис. 34

Формула Байеса:

$$P_a(h_i) = \frac{P(h_i)P_{h_i}(a)}{P(a)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{24}$$

используется, если и только если в дополнение к условиям (23) выполняется у с л о в и е:

4) поступила информация о том, что высказывание a истинно. (25)

Задача 12. В пирамиде 10 винтовок, из которых четыре имеют оптический прицел. *В*ероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Решение: Пусть a = «стрелок поразит мишень из наудачу взятой винтовки», h_1 = «наудачу взятая стрелком винтовка – с оптическим прицелом», h_2 = «наудачу взятая стрелком винтовка – без оптического прицела». По условию задачи $P(h_1) = 0{,}4$, $P(h_2) = 0{,}6$, $P_{h_1}(a) = 0{,}95$, $P_{h_2}(a) = 0{,}8$. Требования (23) и (25) выполняются: a может быть истинным лишь при истинности h_1 или h_2; $P(h_1) + P(h_2) = 1$; есть информация об истинности a.

Используем формулы (22) и (24):

$$P(a) = P(h_1)P_{h_1}(a) + P(h_2)P_{h_2}(a) = 0{,}4\cdot 0{,}95 + 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}86,$$

$$P_a(h_1) = \frac{P(h_1)P_{h_1}(a)}{P(a)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}86} = \frac{19}{43},$$

$$P_a(h_2) = \frac{P(h_2)P_{h_2}(a)}{P(a)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}8}{0{,}86} = \frac{24}{43}$$

(обратим внимание на то, что $P_a(h_1) + P_a(h_2) = 1$).

Так как $P_a(h_2) > P_a(h_1)$, то более вероятно, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела.

Формула Бернулли используется в следующих условиях:

- проводится *n независимых* испытаний (независимость испытаний означает, что исход любого из них никаким путем не влияет на исходы других);
- каждое испытание имеет два исхода: один исход называют «успехом», а другой – «неудачей»;
- вероятность *p* «успеха» в отдельно взятом, или единичном, испытании постоянна и от испытания к испытанию не меняется (это условие обеспечивается проведением испытаний примерно в одинаковых, или, иначе, в типичных условиях).

(26)

Испытания, удовлетворяющие условиям (26) называются *испытаниями Бернулли*; формула же Бернулли имеет следующий вид

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{27}$$

где $P_n(m)$ – вероятность появления *m* успехов в *n* испытаниях ($m = 0, 1, \ldots, n$),

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \; –$$

число сочетаний из *n* по *m*, $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи» в единичном испытании.

Используя (27), рассчитаем вероятности того, что число успехов $m = 0, 1, 2, \ldots n$:

m	0	1	….	n	
$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	$C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1} = npq^{n-1}$	….	$C_n^n p^n q^{n-n} = p^n$	$\Sigma = 1$

(28)

Замечание. Сумма всех вероятностей – это вероятность логически истинного высказывания «при проведении *n* испытаний число успехов равно 0 или 1, или 2, …, или *n*», поэтому она равна единице.

Ряд (28) называют *рядом распределения вероятностей Бернулли* по числу успехов или *биномиальным рядом распределения.*

Число успехов m^*, которому соответствует наибольшая вероятность, называют *наивероятнейшим числом*; m^* можно найти, не составляя ряда (28), следующим образом:

- если $np+p$ – дробное число, то m^* – целое число, лежащее в интервале $(np - q, np + p)$;
- если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел будет два: $m_1^* = np - q$ и $m_1^* = np + p$ [вероятности этих чисел будут одинаковыми, $P_n(m_1^*) = P_n(m_2^*)$ и наибольшими в сравнении с другими вероятностями ряда (28)].

Представим, что проведено достаточно много серий испытаний по n испытаний в каждой серии и в каждой серии зафиксировано число успехов:

№ серии	1-я серия	2-я серия	3-я серия	…
Число испытаний в серии	n_1	n_2	n_3	…
Число успехов в серии	m_1	m_2	m_3	…

Правомочен вопрос: каково среднее число успехов в одной серии? Это число обозначим $\overline{m}$, в теории вероятностей его называют *математическим ожиданием числа успехов* и обозначают Mm. И далее, поскольку в n испытаниях успехов может быть 0, 1, 2, …, n, то правомочен вопрос: каков в среднем разброс этих чисел (конечно, с учетом вероятностей их появления) вокруг среднего числа $\overline{m}$. Характеристику этого разброса называют *средним квадратичным отклонением числа успехов* и обозначают греческой буквой σ_m – «сигма»; иногда в качестве характеристики разброса используют *дисперсию* числа успехов $Dm = \sigma_m^2$.

Для биномиального ряда распределения:

$$\overline{m}\,(\text{или } Mm) = np,\ Dm = npq,\ \sigma_m = \sqrt{npq}\,. \qquad (29)$$

Задача 13. Примерно 20% судебных дел – это дела по обвинению в краже. В порядке прокурорского надзора проверено 4 наудачу отобранных дела. а) Какова вероятность появления среди отобранных дел хотя бы одного дела о краже? б) Каково наивероятнейшее число дел о краже среди отобранных и какова вероятность этого числа? в) Каковы среднее число дел о краже и среднее квадратичное отклонение числа дел о краже среди 4 дел?

Решение. *В* условиях задачи: число испытаний $n = 4$, «успех» – наугад взятое дело – это дело о краже, вероятность успеха $p = 0{,}2$, вероятность неудачи $q = 0{,}8$.

а) Судя по вопросу, число m успехов может равняться 1, 2, 3 или 4, но никак не может быть равно нулю. Так как $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1$, то искомая вероятность $P_4(1 \leqslant m \leqslant 4) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 0{,}2^0 0{,}8^{4-0} = 1 - 0{,}8^4 =$ $= 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904$.

б) Так как $np+p = 4\cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 1$ – целое число, то наивероятнейших чисел будет два: $m_1^* = np - q = 4\cdot 0{,}2 - 0{,}8 = 0$ и $m_2^* = np + p = 1$. *В*ероятности этих чисел $P_4(0) = 0{,}4096$, $P_4(1) = C_4^1 0{,}2^1 0{,}8^3 = 0{,}4096$. Как и следовало ожидать, вероятности одинаковы, и они будут наибольшими, в чем нетрудно убедиться, составив ряд распределения (28):

m	0	1	2	3	4	
$P_4(m)$	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016	$\Sigma = 1$

в) Требуемые характеристики вычислим по формулам (29): $\overline{m} = np =$ $= 4\cdot 0{,}2 = 0{,}8$ – таково среднее число дел о краже среди 4 наудачу выбранных (если наудачу взять 20 дел, то в среднем среди них будет 4 дела о кражах), $\sigma =$ $= \sqrt{npq} = \sqrt{4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8} = 0{,}8$ – таков в среднем разброс количеств дел о краже среди 4 наудачу отобранных дел около $\overline{m} = 0{,}8$ (для 20 случайно отобранных дел разброс количества дел о краже около среднего числа, равного 4, будет 1,79).

Формула Пуассона:

$$P(m) = \frac{a^m}{m!}\mathrm{e}^{-a}, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{30}$$

где $P(m)$ – вероятность появления m успехов в n испытаниях, $a = np$, $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$ – основание системы натуральных логарифмов. Формула Пуассона дает хорошее приближение к вероятностям, рассчитанным по формуле Бернулли (27), если число испытаний n велико (порядка нескольких сотен или больше), а вероятность p успеха в единичном испытании мала (близка к нулю). В силу малости вероятности p формулу Пуассона называют также *формулой редких явлений*.

При бесконечно большом числе n испытаний *ряд распределения вероятностей Пуассона* по числу успехов или *пуассоновский ряд распределения* таков:

m	0	1	2	…	
$P(m)$	$\frac{a^0}{0!}e^{-a} = e^{-a}$	$\frac{a^1}{1!}e^{-a} = ae^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	…	$\Sigma = 1$

(31)

Обратим внимание на то, что этот ряд, в отличие от биномиального ряда (28), бесконечный, но сумма его вероятностей, как и для конечного ряда (28), равна единице.

При пуассоновском распределении:

- среднее число успехов ($\overline{m}$ или Mm) и дисперсия числа успехов (Dm или σ_m^2) равны числу a:

$$\overline{m}\ (\text{или } Mm) = Dm = a; \quad \sigma_m = \sqrt{a} \tag{32}$$

- наивероятнейшее число успехов m^* находят так: если a – дробь, то m^* – целое число из интервала $(a - 1,\ a)$; если a – целое, то наивероятнейших чисел два: $m_1^* = a - 1$ и $m_2^* = a$.

Задача 14. Примерно 0,1% судебных дел – это дела по обвинению в убийстве. Проверено 200 наудачу взятых судебных дел. Какова вероятность того, что среди них дел об убийстве будет: а) 0; 1; 2; 3; б) хотя бы одно; в) более трех.

Решение. По условию $n = 200$, $p = 0{,}001$ – есть основания использовать формулу Пуассона; $a = np = 0{,}2$.

а) Требуемые вероятности вычислим по формуле Пуассона (30) и для сопоставления те же вероятности вычислим по формуле Бернулли (27) (с точностью до 4 десятичных разрядов):

m	0	1	2	3	
$P(m) = \frac{0{,}2^m}{m!}\mathrm{e}^{-0{,}2}$	0,8187	0,1638	0,0164	0,0010	$\Sigma = 0{,}9999$
$P_{200}(m) = C_{200}^m(0{,}001)^m(0{,}999)^{200-m}$	0,8186	0,1639	0,0163	0,0011	$\Sigma = 0{,}9999$

Различий между вероятностями Пуассона и Бернулли практически нет (они будут тем меньше, чем больше n и меньше p). Итоговые суммы вероятностей не равны 1, поскольку по условию задачи, число m дел об убийстве может быть равным не только 0, 1, 2, 3, но и 4, 5, …, 200.

б) Судя по вопросу, m может быть равным или 1, или 2, …, или 200, иначе $1 \leqslant m \leqslant 200$, но не 0. Поэтому искомая вероятность

$$P_{200}(1 \leqslant m \leqslant 200) = 1 - P_{200}(m = 0) = 1 - 0{,}8187 = 0{,}1813.$$

в) $P_{200}(3\ \ m \leqslant 200) = 1 - P_{200}(0 \leqslant m \leqslant 3) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001.$

Формулу Пуассона в несколько ином виде, а именно:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \text{ где } m = 0, 1, \ldots \tag{33}$$

используют для подсчета $P_t(m)$ – вероятности того, что за промежуток времени длиной t наступит m событий *простейшего потока* – это поток однородных событий, происходящих в случайные моменты времени, обладающий тремя довольно типичными для многих ситуаций свойствами:

- одновременное наступление двух или более событий практически невозможно,
- поток установившийся, стационарный с *интенсивностью*, равной λ (интенсивность – это среднее число событий потока, происходящих в единицу времени),
- поток без последействия, т. е. на вероятность появления любого числа событий в любой промежуток времени не влияет ни число событий, ни моменты их появления вне этого промежутка.

Задача 15. При установившейся на протяжении суток криминогенной обстановке в городе в среднем за сутки происходят 15 правонарушений. Каково наивероятнейшее число правонарушений за сутки, за 1 час и каковы вероятности этих чисел. Предполагается, что поток правонарушений простейший.

Решение. По условию $\lambda = 15$(правонарушений/сутки). При $t = 1$ (сут.) наивероятнейшее число правонарушений $m_1^* = \lambda t - 1 = 14$ и $m_2^* = \lambda t = 15$. *В*ероятности этих чисел максимальны в сравнении с вероятностями любого другого количества преступлений и равны:

$$P_{1\text{ сут.}}(14) = \frac{15^{14}}{14!}\mathrm{e}^{-15} = \frac{15^{14} \cdot 15}{14! \cdot 15}\mathrm{e}^{-15} = \frac{15^{15}}{15!}\mathrm{e}^{-15} = P_{1\text{ сут.}}(15),$$

$$P_{1\text{ сут.}}(14) = P_{1\text{ сут.}}(15) = 0{,}102436.$$

При $t = 1$ ч $= 1/24$ сут. наивероятнейшее числа правонарушений – целое число из интервала

$$\left(15 \cdot \frac{1}{24} - 1,\ 15 \cdot \frac{1}{24}\right) -$$

это число $m^* = 0$. Его вероятность

$$P_{1/24} = \frac{\left(15\cdot\frac{1}{24}\right)^0}{0!}\mathrm{e}^{-15*\frac{1}{24}} = \mathrm{e}^{-0,625} = 0,535261.$$

Биномиальное (28) и пуассоновское (31) распределения довольно часто используются в решении задач правоприменительной деятельности, но, конечно, ими не ограничиваются все возможные распределения вероятностей.

Понятие случайной величины.

Случайной величиной назовем переменную X, множество значений которой известно, но неизвестно, какое одно из них обязательно появится при проведение опыта (или, иначе, при наблюдении переменной X). Например, случайной величиной является число m успехов в n испытаниях (множество значений этого числа известно – это $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, но каким именно будет число успехов при проведении опыта, состоящего в n испытаниях, сказать до проведения опыта нельзя). Случайной величиной является и число происшедших событий простейшего потока, с той лишь разницей, что множество значений этого числа будет не конечным, а бесконечным – $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Однако в обоих случаях значения величины «изолированы» друг от друга; такую величину называют *дискретной*. Если величина может принять любое значение из одного или нескольких отрезков, то ее называют *непрерывной.* Так, возраст правонарушителя в принципе может быть любой точкой, например, на отрезке [14, 80], поэтому возраст – непрерывная величина. Однако, если возраст измерять полным числом лет, то возраст – дискретная величина.

Говорят, что дискретная случайная величина X задана, если известно не только множество ее значений, но и вероятности этих значений; иначе, если известно распределение вероятностей по значениям величины X.

Ряд

$$\begin{array}{c|cccc|c} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_\upsilon & \\ \hline P & p_1 & p_2 & \ldots & p_\upsilon & \sum = 1 \end{array}, \qquad (34)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_\upsilon$ – расположенные в порядке возрастания «все» значения случайной величины X (здесь предполагается, что число этих значений конечно), а $p_1, p_2, \ldots, p_\upsilon$ – вероятности этих значений, называют *рядом распределения вероятностей* случайной величины X.

Среднее значение, или, иначе, *математическое ожидание* случайной величины X находят по формуле

$$MX = x_1p_1 + \ldots + x_\upsilon p_\upsilon; \qquad (35)$$

дисперсию случайной величины X – по одной из двух тождественных формул:

$$DX = (x_1 - MX)^2p_1 + (x_2 - MX)^2p_2 + \ldots + (x_\upsilon - MX)^2p_\upsilon, \qquad (36, а)$$

$$DX = x^2{}_1p_1 + x^2{}_2p_2 + \ldots + x^2{}_\upsilon p_\upsilon - (MX)^2; \qquad (36, б)$$

среднее квадратичное отклонение случайной величины X – характеристику среднего разброса значений случайной величины X вокруг MX по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{DX} \,. \tag{37}$$

Подставив в (35)–(37) составляющие биномиального ряда распределения (28), или пуассоновского (31), можно получить выражения (29) или (32) соответствующих характеристик: математического ожидания Mm, дисперсии Dm и среднего квадратичного отклонения σ_m числа успехов.

Типичным примером непрерывной случайной величины является *нормально распределенная случайная величина* X, вероятность попадания которой в малый интервал длиной h с центром в точке x

$$P(X \in h) = hf(x),$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-MX)^2}{\sigma_X^2}} \; –$$

функция плотности распределения «нормальных» вероятностей (ее график изображен на рис. 35), а MX и σ_X – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X.

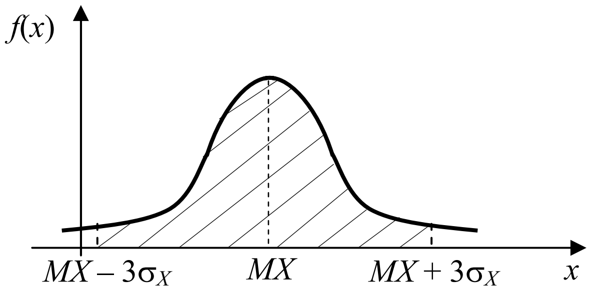


Рис. 35

Для нормально распределенной случайной величины X

$$P(|X - MX| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon / \sigma_X), \tag{38}$$

где $\Phi(\varepsilon / \sigma_X)$ – значение *функции Лапласа*

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

при $u = \varepsilon / \sigma_X$.

Таблицы значений этой функции при различных $u \geqslant 0$ имеются в любом учебнике по теории вероятностей, например, в [10, 11]. Приведем значения $\Phi(u)$ лишь при некоторых u:

u	1	1,65	1,96	2	2,58	
$\Phi(u)$	0,6826	0,9010	0,9500	0,9544	0,9902	(39)

В частности, при $\varepsilon = 3\sigma_X$ из (38) получим:

$$P(|X - MX| < 3\sigma_X) = \Phi(3\sigma_X / \sigma_X) = \Phi(3) = 0{,}9973; \qquad (40)$$

геометрически эта вероятность интерпретируется как заштрихованная на рис. 35 площадь. Соотношение (40) носит название «*правила трех сигм»* для нормально распределенной случайной величины *X*.

Более подробно с дискретными и непрерывными случайными величинами можно познакомиться в работах [10, 11].

Формула Лапласа. При большом числе *n* испытаний вероятность того или иного числа *m* ($m = 0{,}1,\ \ldots,\ n$) успехов будет малым числом. Так, при $n = 100$-кратном подбрасывании монеты наивероятнейшее число выпадений герба $m^* = np = 100\cdot 0{,}5 = 50$, а рассчитанная по формуле Бернулли (27) вероятность этого числа $P_{100}(50) \approx 0{,}08$ – и это наибольшая вероятность; вероятности других чисел будут меньше: например, вероятность появления герба $m = 40$ раз $P_{100}(40) \approx 0{,}00002$. В этом случае более ценную информацию дает знание вероятности того, что абсолютная величина отклонения числа успехов *m* в *n* испытаниях от среднего числа успехов $\overline{m} = np$ не превзойдет некоторого заранее заданного числа. Нижнюю границу для этой вероятности можно получить по формуле

$$P\left(|m - np| < u\sqrt{npq}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{u^2},$$

где *u* – любое положительное число.

Более точное значение вероятности

$$P\left(|m - np| < u\sqrt{npq}\right)$$

при большом числе *n* испытаний дает формула Лапласа:

$$P\left(|m - np| < u\sqrt{npq}\right) \approx \Phi(u). \qquad (41)$$

При $u = 3$, учитывая, что $\sigma_m = \sqrt{npq}$ [см. (29)], получим

$$P(|m - np| < 3\sigma_m) \approx 0{,}99730,$$

т. е. получение в *n* испытаниях числа успехов *m*, абсолютная величина отклонения которого от среднего числа $\overline{m} = np$ будет меньше трех средних квадратичных отклонений – $3\sigma_m$, является практически достоверным событием. Это утверждение – «*правило трех сигм»* для числа успехов *m* в большом числе испытаний *n*.

С неравенством, стоящим в скобках формулы (41), проведем такие тождественные преобразования:

$$|m - np| < u\sqrt{npq} \rightarrow \left|p - \frac{m}{n}\right| < u\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow -u\sqrt{\frac{pq}{n}} < p - \frac{m}{n} < u\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Окончательно,

$$P\left(\frac{m}{n}-u\sqrt{\frac{pq}{n}}<p<\frac{m}{n}+u\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\approx\Phi\,(u). \qquad (42)$$

Относительную долю $\hat{p}=m/n$ успешных испытаний называют *точечной оценкой* вероятности p успеха в единичном испытании, интервал

$$\left(\frac{m}{n}-u\sqrt{\frac{pq}{n}},\frac{m}{n}+u\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)- \qquad (43)$$

$\Phi(u)\cdot 100\%$-ной *интервальной оценкой* вероятности p (например, при $u = 1{,}96$ получим 95% интервальную оценку), а величину

$$\varepsilon=u\sqrt{\frac{pq}{n}}\ - \qquad (44)$$

ошибкой выборочной вероятности $\hat{p}=m/n$.

Замечание. Напомним, в (42)–(44) n должно быть достаточно большим числом. При неизвестной вероятности p полагают

$$pq\approx\ \hat{p}\hat{q}=\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

В заключение, формулы Пуассона (30) и Лапласа (41) вытекают соответственно из теоремы Пуассона и теоремы Лапласа, с точными формулировками которых можно познакомиться в работах [10, 11]. Эти теоремы, наряду с ранее упоминавшимися теоремами Бернулли и Чебышева, а так же ряд других теорем, касающихся изучения вероятностного поведения результатов большого числа n испытаний, составляют *закон больших чисел*.

Задачи для самостоятельного решения

1. Маша пришла на экзамен, зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задает три вопроса. Найти вероятности следующих событий: а) Маша ответит на все три вопроса; б) Маша ответит ровно на два вопроса; в) Маша ответит ровно на один вопрос; г) Маша ответит хотя бы на один вопрос; д) Маша не ответит ни на один вопрос.

2. В корзине три красных и семь зеленых яблок. Из корзины вынули одно яблоко и, не глядя, отложили в сторону. После этого из корзины достали еще одно яблоко, которое оказалось зеленым. Найти вероятность того, что первое яблоко, отложенное в сторону, также было зеленым.

3. Магазин получает однотипный товар от трех поставщиков: 55% товара поступает от первого поставщика, 20% от второго и 25% от третьего. Продукция, поступающая от первого поставщика, содержит 5% брака, поступающая от второго поставщика – 6% брака, а поступающая от третьего поставщика – 8% брака. Покупатель оставил в книге пожеланий покупателей жалобу о неудовлетворительном качестве приобретенного товара. Найти вероятность того, что

плохой товар, вызвавший нарекания покупателя, поступил от второго поставщика.

4. Опыт отдела маркетинга фармацевтической фирмы показывает, что после проведения рекламной кампании нового вида зубной пасты 5% мужчин и 10% женщин захотят приобрести новую пасту, а остальные будут продолжать пользоваться прежними видами зубных паст. Число мужчин и женщин в городе соотносится как 2 : 3 и все они покупают зубную пасту. Найти вероятность того, что покупатель, случайно отобранный среди купивших новый вид пасты, окажется женщиной.

5. Если проектом руководит квалифицированный менеджер, то такой проект может быть выполнен в срок с вероятностью 0,8, если же менеджер проекта недостаточно квалифицирован, то своевременное выполнение проекта возможно лишь с вероятностью 0,4. Достаточной квалификацией обладают 70% менеджеров проектов на рынке труда. Для руководства срочным проектом компания наняла первого менеджера, откликнувшегося на объявление вакансии, и заключила с ним контракт на руководство только данным проектом. Определить: а) условную вероятность того, что менеджер проекта обладает достаточной квалификацией (и его можно принять в штат компании) при условии, что работы по проекту оказались завершены в срок; б) условную вероятность того, что менеджер проекта не обладает достаточной квалификацией (и его не стоит принимать в штат) при условии, что работы по проекту не были завершены в срок.

6. Известно, что из числа зрителей определенной телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трех наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности того, что рекламные блоки смотрели 0, 1, 2 и 3 человека из группы.

7. Из 1000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Для участия в телевизионной передаче необходимо собрать группу, в которую бы вошли и сторонники, и противники данной правительственной программы. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

2.4. Выбор решения при неизвестных вероятностях

Выбрать решение в условиях известных вероятностей высказываний довольно просто. При неизвестных вероятностях, что типично для многих практических задач, выбрать решение можно лишь на основании экспериментальных данных.

Пример 16. *С*ледователь X полагает, что он, побеседовав с подследственным, с 90% гарантией может отличить виновного от невиновного. Его начальник Y считает, что X такой способностью не обладает. Кто из них прав?

Такой вопрос не возник бы, если была бы известна истинная вероятность p отличить Ивановым виновного от невиновного. Однако относительно значения этой вероятности выдвинуто две гипотезы:

- нулевая гипотеза H_0: $p = 0{,}9$ (так думает X),
- альтернативная гипотеза H_1: $p = 0{,}5$ (так думает Y)

Предлагается провести такой эксперимент. *С*ледователь беседует с $n = 10$ подследственными, причем начальнику Y известно, кто из них виновен, а кто не виновен. И если число m правильных ответов будет не меньше 8, $8 \leqslant m \leqslant 10$, то принимаем гипотезу H_0, правым считаем следователя; если $0 \leqslant m < 8$, то принимаем H_1 – прав начальник.

Поступив таким образом, можно совершить ошибку двух родов:

- будет принята гипотеза H_1, тогда как на самом деле верной является H_0 – это *ошибка первого рода*, ее вероятность обозначают α: $\alpha = P_{H_0}(H_1)$, где $P_{H_0}(H_1)$ – вероятность принять H_1, если на самом деле верна H_0; α называют *уровнем значимости;*
- будет принята гипотеза H_0, тогда как на самом деле верна H_1 – это *ошибка второго рода*, ее вероятность обозначают β: $\beta = P_{H_1}(H_0)$.

Правильное решение также может быть двух родов:

- будет принята гипотеза H_0, тогда как на самом деле она верна; вероятность такого решения $P_{H_0}(H_0) = 1 - P_{H_0}(H_1) = 1 - \alpha$;
- будет принята гипотеза H_1, тогда как на самом деле она верна; вероятность такого решения $P_{H_1}(H_1) = 1 - P_{H_1}(H_0) = 1 - \beta$

Истиная гипотеза \ Принятая гипотеза	H_0	H_1
H_0	$P_{H_0}(H_0) = 1 - \alpha$ (правильное решение)	$P_{H_0}(H_1) = \alpha$ (ошибка первого рода)
H_1	$P_{H_1}(H_0) = \beta$ (ошибка второго рода)	$P_{H_1}(H_1) = 1 - \beta$ (правильное решение)

Насколько приемлем описанный выше эксперимент для каждой из конфликтующих сторон?

Следователь X считает, что верна гипотеза H_0: $p = 0{,}9$ и он заинтересован в том, чтобы по результатам эксперимента H_0 была принята, т. е. чтобы при $n = 10$ испытаниях число успешных было не меньше 8, $8 \leqslant m \leqslant 10$. Поэтому вероятность «удовлетворения его интереса» равна:

$$P_{H_0}(H_0) = P_{10}(8 \leqslant m \leqslant 10) = C_{10}^{8}\, 0{,}9^8\, 0{,}1^2 + C_{10}^{9}\, 0{,}9^9\, 0{,}1^1 + C_{10}^{10}\, 0{,}9^{10}\, 0{,}1^0 = 0{,}93.$$

Начальник Y считает, что верна гипотеза H_1: $p = 0{,}5$ и он заинтересован в том, чтобы эта гипотеза была принята, т. е. чтобы при 10 испытаниях число успешных было меньше 8, $0 \leqslant m < 8$. Поэтому вероятность «удовлетворения его интереса» равна:

$$P_{H_1}(H_1) = P_{10}(0 \leqslant m < 8) = 1 - P(8 \leqslant m \leqslant 10) =$$

$$= 1 - (C_{10}^{8}\, 0{,}5^8\, 0{,}5^2 + C_{10}^{9}\, 0{,}5^9\, 0{,}5^1 + C_{10}^{10}\, 0{,}5^{10}\, 0{,}5^0) = 0{,}945.$$

Вероятности для X и для Y примерно одинаково высоки, поэтому они оба согласятся разрешить существующие между ними разногласия с помощью описанного выше эксперимента. При таких высоких вероятностях правильных решений вероятности ошибочных решений невысоки: вероятность ошибки первого рода равна

$$\alpha = P_{H_0}(H_1) = 1 - P_{H_0}(H_0) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07,$$

а вероятность ошибки второго рода

$$\beta = P_{H_1}(H_0) = 1 - \mathrm{P}_{H_1}(H_1) = 1 - 0{,}945 = 0{,}055.$$

Рассмотрим еще одну процедуру выбора решений при неизвестных вероятностях на основе результатов достаточно большого числа испытаний.

Истинная вероятность p успешности испытания неизвестна. Однако интуиция подсказывает, что, скорее всего, p равно числу p_0. Принять гипотезу H_0: $p = p_0$ или нет? Для получения ответа на этот вопрос в «стандартных» схемах проверки гипотез такого типа требуется:

- во-первых, провести n испытаний Бернулли, зафиксировать число m успешных и найти их относительную долю $\hat{p} = m / n$;
- во-вторых, сформулировать, исходя из содержания задачи, альтернативную гипотезу H_1 (H_1: $p \neq p_0$ или H_1: $p < p_0$, или H_1: $p > p_0$);
- в-третьих, задать числовое значение вероятности α ошибки первого рода, иначе уровня значимости; обычно для α используются значения: 0,1; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

П р и н ц и п п р о в е р к и г и п о т е з ы H_0 такой: если происходит то, что при справедливости H_0 происходить не должно, то H_0 отвергают (принимают H_1); в противном случае H_0 принимают.

Рассмотрим алгоритмы проверки гипотезы H_0: $p = p_0$ для трех видов альтернативной гипотезы. При этом будем считать, что n достаточно велико.

- **Первый случай,** H_0: $p = p_0$, H_1: $p \neq p_0$.

Если предполагаемое значение p_0 вероятности p не попадает внутрь интервальной оценки (43) вероятности, чего не должно происходить при справедливости H_0, т. е. если

$$p_0 \notin \left(\frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \right), \qquad (45, a)$$

то H_0 отклоняют (принимают H_1), если

$$p_0 \in \left(\frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \right), \qquad (45, б)$$

то H_0 принимают. Здесь $q_0 = 1 - p_0$, u – число, при котором функция Лапласа [(см. (39)] $\Phi(u) = 1 - \alpha$.

- **Второй случай,** H_0: $p = p_0$, H_1: $p > p_0$.

Если

$$p_0 < \frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \qquad (46, a)$$

то H_0 отклоняют (принимают H_1); если

$$p_0 > \frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \qquad (46, б)$$

то H_0 принимают. Здесь u – число, при котором $\Phi(u) = 1 - 2\alpha$.

- **Третий случай,** H_0: $p = p_0$, H_1: $p < p_0$.

Если

$$p_0 > \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \qquad (47, a)$$

то H_0 отклоняют (принимают H_1); если

$$p_0 < \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \qquad (47, б)$$

то H_0 принимают. Здесь u – число, при котором $\Phi(u) = 1 - 2\alpha$.

Рассмотренные алгоритмы позволяют, при заданной вероятности α ошибки первого рода, получить наименьшую вероятность β ошибки второго рода. Принимая гипотезу H_0, следует понимать, что это вовсе не означает, что H_0 является единственно подходящей гипотезой: просто гипотеза H_0 не противоречит результатам испытаний; однако, таким же свойством наряду с H_0 могут обладать и другие гипотезы.

Задача 16. Городская статистика раскрываемости преступлений утверждает, что раскрывается примерно 4 из каждых 10 преступлений. УВД одного из районов утверждает, что оно за последний месяц раскрыло 49 преступлений из 100. Случайны результаты УВД, или они свидетельствуют о высоком профессионализме его работников. Принять $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Пусть p – вероятность раскрытия преступления районным УВД; ее истинное значение неизвестно. Известно лишь, что из $n = 100$ преступлений УВД раскрыло $m = 49$, т. е. $\hat{p} = m/n = 0{,}49$. Судя по городской статистике, вероятность p оценивается числом $p_0 = 0{,}4$, а судя по результатам работы УВД, $p > 0{,}4$. Поэтому примем H_0: $p = 0{,}4$, а H_1: $p > 0{,}4$ – это второй случай. По условию $\alpha = 0{,}05$. Найдем u, при котором $\Phi(u) = 1 - 2\alpha = 1 - 2\cdot 0{,}05 = 0{,}90$; из (39) находим $u = 1{,}65$. Далее,

$$\frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = 0{,}49 - 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{100}} = 0{,}409.$$

Так как $p_0 = 0{,}4 < 0{,}409$, то в соответствии с (46) принимаем гипотезу H_1, согласно которой вероятность раскрытия преступления районным УВД больше, чем вероятность в целом по городу – это говорит о высоком профессионализме его работников.

Допустим, что вопрос задачи звучит так: случайно или нет отличие результатов УВД от городских? По-прежнему примем H_0: $p = 0{,}4$, но H_1: $p \neq 0{,}4$ –это первый случай. При $\alpha = 0{,}05$ значение $\Phi(u) = 1 - \alpha = 0{,}95$ и $u = 1{,}96$, интервал

$$\left(\frac{m}{n} - u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \frac{m}{n} + u\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

будет таким: (0,394; 0,586). Так как $p_0 = 0{,}4 \in (0{,}394;\ 0{,}586)$, то согласно (45) гипотезу H_0: $p = 0{,}4$ принимаем; считаем, что вероятность раскрытия преступления районным УВД такая же, как и в целом по городу. Кажущаяся противоречивость этого и ранее полученного выводов объясняется различием альтернативных гипотез: здесь H_1: $p \neq 0{,}4$, а ранее H_1: $p > 0{,}4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры ситуаций, когда требуется принять решение, какая из двух гипотез верна.

2. Продюсер некоторой телепередачи утверждает, что она должна привлечь внимание, по крайней мере, трети телезрителей. Из 64 опрошенных только 16 заявили о своем намерении посмотреть эту передачу. Оценить утверждение продюсера на 5%-ном уровне значимости.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Человеческая деятельность связана с принятием множества решений по способам достижения поставленных целей. При принятии решений приходится учитывать много факторов: отметим среди таких факторов, в первую очередь, ограниченность ресурсов, неопределенность внешних условий, присутствие конкурирующих сторон, которые стремятся достичь своих целей, не всегда совпадающих с нашими.

В этой главе обсуждаются вопросы математической теории оптимизации и исследования операций, которая предлагает мощный аппарат для принятия сложных решений.

Этот аппарат был развит лишь во второй половине XX в. в связи с его крайней актуальностью для решения экономических задач.

3.1. Оптимизационные задачи в экономике

В современном мире никуда не деться от экономических задач, а как известно, экономика занимается изучением того, как в обществе распределяются ограниченные ресурсы.

Как правило, у экономической системы (семьи, фирмы, государства) есть некоторая цель, но на пути к достижению этой цели стоят ограничения по количеству используемых ресурсов.

Рассмотрим пример **задачи планирования производства**.

Задача 17. Предприятие производит продукцию двух видов (А и В), используя при изготовлении этой продукции ресурсы трех видов (первого, второго и третьего). Чтобы произвести одну единицу продукции А, нужно затратить по 1 единице первого и второго ресурсов и 2 единицы третьего ресурса. Для производства единицы продукции В требуется 2 единицы первого ресурса и 1 единица второго ресурса. Запасы ресурсов у предприятия ограничены: на складах есть 90 единиц первого ресурса, 50 единиц второго и 80 единиц третьего ресурса.

Рыночная цена продукции А составляет 800 руб. а цена продукции В равна 1000 руб. Сколько продукции произвести, чтобы получить наибольшую выручку?

Решение. Пусть предприятие планирует произвести x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В, тогда выручка предприятия будет, очевидно, равна

$$z = 800x_1 + 1000x_2.$$

Относительно величин x_1 и x_2 можно сказать следующее. Во-первых, они должны быть неотрицательными – отрицательный план производства продукции не имеет экономического смысла.

Во вторых, общие расходы ресурсов при производстве x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В не должны превысить запасы этих ресурсов.

Вычислим суммарный расход первого ресурса. На производство единицы продукции А тратится 1 единица первого ресурса, а всего продукции А производится x_1 единиц, значит, на производство всей продукции А будет затрачено $1 \cdot x_1 = x_1$ единиц первого ресурса. Аналогично, на производство единицы продукции В тратится 3 единицы первого ресурса, а всего продукции В производится x_2 единиц, значит, на производство всей продукции В будет затрачено $3x_2$ единиц первого ресурса. Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (и А, и В) составит $x_1 + 3x_2$ единиц. А в запасе есть всего 90 единиц этого ресурса. Значит, должно выполняться ограничение: $x_1 + 3x_2 \leqslant 90$. Добавляя аналогичные ограничения по второму и третьему ресурсам, приходим окончательно к следующей задаче: Требуется найти такой план производства (т. е. числа x_1 и x_2), чтобы выполнение этого плана обеспечивало предприятию наибольшую выручку:

$$z = 800x_1 + 1000x_2$$

при ограничениях по ресурсам:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 90, \\ x_1 + x_2 \leqslant 50, \\ 2x_1 \leqslant 80, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Подчеркнем, что каждое из этих неравенств соответствует определенному высказыванию:

- неравенство $x_1 + 3x_2 \leqslant 90$ – высказыванию «*расход первого ресурса на производство x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В не должен превысить запаса первого ресурса* (= *a*)»;
- неравенство $x_1 + x_2 \leqslant 50$ – высказыванию «*расход второго ресурса на производство x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В не должен превысить запаса второго ресурса* (= *b*)»;
- неравенство $2x_1 \leqslant 80$ – высказыванию «*расход третьего ресурса на производство x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции В не должен превысить запаса третьего ресурса* (= *c*)»;
- неравенство $x_1 \geqslant 0$ – высказыванию «*план производства продукции А не может быть отрицательным* (= *d*)»;
- неравенство $x_2 \geqslant 0$ – высказыванию «*план производства продукции В не может быть отрицательным* (= *e*)».

В зависимости от конкретных значений x_1 и x_2 каждое из высказываний *a*, *b*, *c*, *d*, *e* может быть логически истинным или логически ложным. План производства (x_1, x_2) можно выполнить только в том случае, если истинно высказывание $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e$. Построим множество истинности этого высказывания.

Уравнение $x_1 + 3x_2 = 90$ определяет множество точек плоскости, лежащих на некоторой прямой. Чтобы эту прямую построить, достаточно вспомнить, что любая прямая полностью определяется любыми своими двумя различными точками. Подставим в данное уравнение $x_1 = 0$, получим, что $0 + 3x_2 = 90$, откуда $x_2 = 30$. Итак, получили первую точку: $A(x_1 = 0,\ x_2 = 30)$. Если подставить в данное уравнение $x_2 = 0$, то получим: $x_1 + 3 \cdot 0 = 90$ или просто $x_1 = 90$. Получили вторую точку $B(x_1 = 90,\ x_2 = 0)$. Построим эту прямую: на рис. 36 она обозначена римской цифрой I.

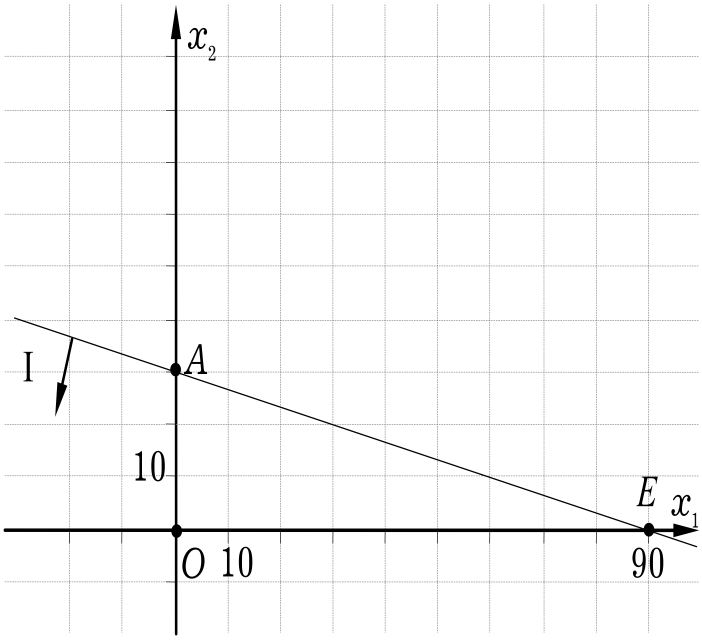


Рис. 36

Эта прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости, в одной из плоскостей выполняется неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$, а в другой – неравенство $x_1 + 3x_2 > 90$. Проверим, какое из этих двух неравенств выполняется в полуплоскости, которая лежит ниже и левее только что построенной прямой. Подставим в неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$ координаты точки $O(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$: $0 + 3 \cdot 0 = 0 < 90$ – значит, и для всех остальных точек, которые лежат ниже и левее прямой $x_1 + 3x_2 = 90$, выполняется неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$.

Таким образом, множество истинности высказывания *a*, соответствующего неравенству $x_1 + 3x_2 \leqslant 90$, представляет собой множество точек, лежащих на построенной прямой, а также левее и ниже нее. Обозначим на рис. 36 стрелкой ту полуплоскость, где выполняется данное неравенство.

Поступим таким же образом с остальными неравенствами: отметим на плоскости множества точек, которые этим неравенствам удовлетворяют (рис. 37).

Пересечение этих множеств (полуплоскостей) образует пятиугольник *OABCD*, заштрихованный на рис. 37. Этот пятиугольник и есть множество истинности высказывания $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e$.

Таким образом, любой план производства, соответствующий некоторой точке из заштрихованного пятиугольника, можно выполнить, такие планы называются *допустимыми* и мы замечаем, что, вообще говоря, их очень много. Как из них выбрать *оптимальный*, т. е. приносящий н а и б о л ь ш у ю выручку $z = 800x_1 + 1000x_2$?

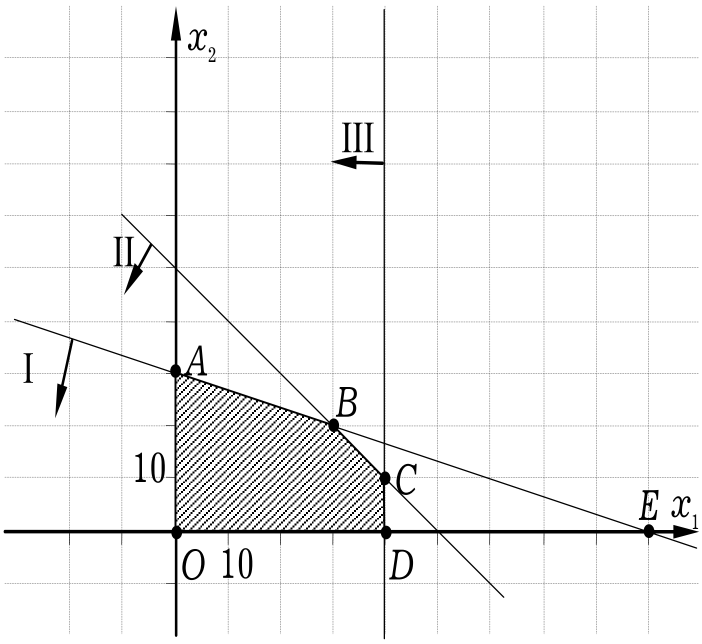


Рис. 37

Оказывается, что если оптимальный план существует, то он обязательно будет лежать в одной из у г л о в ы х т о ч е к множества допустимых планов, т. е. в одной из вершин *OABCD*. Координаты точки *A* мы знаем. Найдем координаты других вершин, например, точки *C*.

Эта точка представляет собой пересечение прямых, которые задаются вторым из неравенств и третьим, т. е. в этой точке

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50, \\ 2x_1 = 80. \end{cases}$$

Из уравнения $2x_1 = 80$ получаем $x_1 = 40$. Подставим $x_1 = 40$ в уравнение $x_1 + x_2 = 50$ и получим, что $x_2 = 10$. Таким образом точка *C* имеет координаты $C(x_1 = 40,\ x_2 = 10)$. Аналогично получаем координаты всех оставшихся вершин пятиугольника *OABCD*.

Итак, оптимальное решение обязательно находится в одной из угловых точек:

- $O(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$, в этой точке выручка $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 0$;
- $A(x_1 = 0,\ x_2 = 30)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 30 = 30\,000$;
- $B(x_1 = 30,\ x_2 = 20)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 20 = 44\,000$;
- $C(x_1 = 40,\ x_2 = 10)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 10 = 42\,000$;
- $D(x_1 = 40,\ x_2 = 0)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 0 = 32\,000$.

Видим, что наибольшую выручку (44 000 руб.) обеспечит план $B(x_1 = 30,\ x_2 = 20)$, По которому нужно произвести 30 единиц продукции А и 20 единиц продукции В.

Данную задачу мы смогли решить графическим способом, поскольку рассматриваемое предприятие выпускает всего два наименования продукции. Ассортимент продукции, выпускаемой реальными предприятиями гораздо шире, и для оптимизации деятельности таких предприятий графическим методом не обойтись.

Люди научились решать подобные задачи (которые называются задачами л и н е й н о г о п р о г р а м м и р о в а н и я) только в середине XX в., за разработку метода решения задач линейного программирования академик Л. В. Канторович (Л. В. Канторович – советский математик, 1912–1986) получил Нобелевскую премию в области экономики.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры ситуаций поиска максимума или минимума какой-либо величины в условиях ограничений.

2. Решите задачу:

$$3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 \leqslant 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

3. Чтобы подарить Маше подарок, Петя решил экономить на еде и питаться только хлебом и колбасой. Батон хлеба стоит 10 руб. и содержит 20 г. белков, 100 г. жиров и 200 г. углеводов; килограмм колбасы стоит 150 руб. и содержит 200 г. белков, 200 г. жиров и 100 г. углеводов. Петины потребности в питательных веществах такие: ему нужно не меньше 100 г белков, 100 г жиров и 400 г углеводов в сутки. Поставьте задачу линейного программирования для определения набора продуктов, который обеспечивал бы Петины потребности в питательных веществах и имел бы наименьшую стоимость.

Замечание. Конечно, мы не рекомендуем такое питание на практике. Выдержать несколько дней такого рациона можно, но представьте, что будет, если целый год питаться только хлебом и колбасой?

3.2. Динамическая задача распределения инвестиций

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Специфика метода динамического программирования состоит в том, что для отыскания оптимального управления планируемая операция разделяется на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования операции становится многошаговым и развивается последовательно, от этапа к этапу, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

Знакомство с методом динамического программирования проще всего начать с рассмотрения нелинейной задачи распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения. Для определенности можно считать, что речь идет о распределении капитальных вложений.

Задача 18. Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n = 4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. ($b = 700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме x млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(x)$ млн. руб. в год. Значения функций $f_j(x)$ приведены в следующей таблице.

x	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(x)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_2(x)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_3(x)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(x)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе.

Решение. Если бы в объединение входили всего два предприятия, то задача была бы совсем простой – существует всего восемь способов распределения 700 млн. руб. между двумя предприятиями:

Инвестиции в первое предприятие	Инвестиции во второе предприятие	Прирост ежегодной прибыли на первом предприятии	Прирост ежегодной прибыли на втором предприятии	Прирост ежегодной прибыли на обоих предприятиях
0	700	0	98	0 + 98 = 98
100	600	20	90	20 + 90 = 110
200	**500**	**34**	**78**	**34 + 78 = 112**
300	400	46	62	46 + 62 = 108
400	300	53	45	53 + 45 = 98
500	200	55	29	55 + 29 =84
600	100	60	18	60 + 18 = 78
700	0	60	0	60 + 0 = 0

Оптимальный вариант распределения 700 млн. руб. между двумя предприятиями выделен в таблице серым.

Таким образом, задача для двух предприятий решается очень просто. Но у нас не два предприятия, а четыре!

Воспользуемся методом динамического программирования и разобьем задачу на шаги. Вначале исследуем задачу для первых двух предприятий и рассмотрим «объединенное первое со вторым» предприятие; на следующем шаге исследуем задачу для двух предприятий: объединенного первого со вторым и третьего и рассмотрим «объединенное первое со вторым и с третьим» предприятие и т. д.

Перейдем к практическим расчетам, после которых теоретическое объяснение станет проще.

Обозначим $F_i(x)$ максимально возможный прирост прибыли на первых i предприятиях вместе, если на них в сумме выделено x млн. руб. При этом $x_i^*(x)$ будет означать сумму, достающуюся i-му предприятию. Очевидно, $F_1(x) = f_1(x)$. Определим $F_2(x)$.

В следующей таблице каждая северо-восточная диагональ отвечает определенным суммарным инвестициям в первое и второе предприятия. Например, если на первые два предприятия выделена сумма 0 млн. руб., то есть единственный способ разделить эту сумму между предприятиями: первому предприятию выделить 0 млн. руб. (и тогда прирост прибыли на первом предприятии будет равен 0 млн. руб.) и второму предприятию выделить 0 млн. руб. (и прирост прибыли на втором предприятии также будет равен 0 млн. руб.). Значит, $F_2(0) = 0$, $x_2^*(0) = 0$.

Далее, если на первые два предприятия выделена сумма 100 млн. руб., то есть два способа разделить эту сумму между предприятиями:

- первому предприятию выделить 100 млн. руб. (и тогда прирост прибыли на первом предприятии будет равен 20 млн. руб.), а второму предприятию выделить 0 млн. руб. (и прирост прибыли на втором предприятии также будет равен 0 млн. руб.). Значит, в этом случае суммарный прирост прибыли на двух предприятиях будет 20 + 0 = 20 млн. руб.;
- первому предприятию выделить 0 млн. руб. (и тогда прирост прибыли на первом предприятии будет равен 0 млн. руб.), а второму предприятию выделить 100 млн. руб. (и прирост прибыли на втором предприятии будет равен 18 млн. руб.). Значит, в этом случае суммарный прирост прибыли на двух предприятиях будет 0 + 18 = 18 млн. руб.

Таким образом, можно обеспечить максимальный суммарный прирост прибыли на двух предприятиях $F_2(100) = 20$, для этого второму предприятию необходимо выделить $x_2^*(100) = 0$.

Итак, в этой вспомогательной таблице мы значения $f_2(x)$ складываем со значениями $F_1(x - x_2) = f_1(x - x_2)$ и на каждой северо-восточной диагонали находим наибольшее число, которое выделяем жирным и указываем соответствующее значение $x_2^*(x)$.

x_2	$x-x_2$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$f_2(x_2)$ \ $F_1(x-x_2)$	0	20	34	46	53	55	60	60
0	0	0	**20**	34	46	53	55	60	60
100	18	18	**38**	**52**	64	71	73	78	
200	29	29	49	63	75	82	84		
300	45	45	**65**	79	91	98			
400	62	62	**82**	96	108				
500	78	78	**98**	**112**					
600	90	90	110						
700	98	98							.

После вспомогательной заполняем основную таблицу для $F_2(x)$ и $x_2^*(x)$.

x	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_2(x)$	0	20	38	52	65	82	98	112
$x_2^*(x)$	0	0	100	100	300	400	500	500

Продолжая процесс, табулируем функции $F_3(x), x_3^*(x)$ и т. д.

x_3	$x-x_3$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$f_3(x_3)$ \ $F_2(x-x_3)$	0	20	38	52	65	82	98	112
0	0	0	20	38	52	65	82	98	112
100	25	**25**	**45**	**63**	77	90	107	123	
200	41	41	61	**79**	93	106	123		
300	52	52	72	94	112	126			
400	74	74	**94**	**112**	**126**				
500	82	82	102	120					
600	88	88	106						
700	90	90							

x	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_3(x)$	0	25	45	63	79	94	112	126
$x_3^*(x)$	0	100	100	100	200	400	400	400

x_4	$x-x_4$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$f_4(x_4)$ \ $F_3(x-x_4)$	0	25	45	63	79	94	112	126
0	0								126
100	30							142	
200	52						146		
300	76					**155**			
400	90				153				
500	104			149					
600	116		141						
700	125	125							

В последней таблице заполняем только одну диагональ для значения $x = 700$. Наибольшее число на этой диагонали

$$z^* = 155 \text{ млн. руб.},$$

причем четвертому предприятию должно быть выделено

$$x_4^* = x_4^*(700) = 300 \text{ млн. руб.}$$

На долю остальных трех предприятий остается 400 млн. руб. Из табл. 3.6.5 видно, что третьему предприятию должно быть выделено

$$x_3^* = x_3^*(700 - x_4^*) = x_3^*(400) = 200 \text{ млн. руб.}$$

Продолжая обратный процесс, находим

$$x_2^* = x_2^*(700 - x_4^* - x_3^*) = x_2^*(200) = 100 \text{ млн. руб.}$$

На долю первого предприятия остается

$$x_1^* = 700 - x_4^* - x_3^* - x_2^* = 100 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капитальных вложений по предприятиям:

$$x_1^* = 100,\ x_2^* = 100,\ x_3^* = 200,\ x_4^* = 300.$$

Оно обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост прибыли 155 млн. руб.

Задачи для самостоятельного решения

1. В чем состоит идея метода динамического программирования?
2. Выполните контрольное задание № 1.

3.3. Принятие решений в условиях неопределенности

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами $i = 1, 2, \ldots, m$. Ситуация является *полностью неопределенной*, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если будет принято i-е решение, а состояние внешней среды соответствует j-й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход q_{ij}.

Элементы q_{ij} представим в виде таблицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей последствий* (от реализации возможных решений). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям лица, принимающего решение, а столбцы – возможным состояниям внешней среды.

Пример 17. Сидя в отправляющемся на курорт поезде, перед самым отправлением Петя вдруг вспомнил, что, кажется, забыл выключить дома утюг. Можно еще успеть сойти с поезда и исправить ошибку, но тогда пропадет путевка (100 000 руб.). Если же уехать, утюг, если он действительно включен, может стать причиной пожара, и тогда придется ремонтировать квартиру (1 500 000 руб.). Петя не уверен, включен утюг или выключен.

У Пети есть две стратегии: поехать отдыхать или вернуться домой. У внешней среды также есть два состояния: утюг выключен либо утюг включен.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{утюг выключен} & \text{утюг включен} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1\,500\,000 \\ -100\,000 & -100\,000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{поехать отдыхать} \\ \text{вернуться} \end{array}.$$

В **ситуации с полной неопределенностью** могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера относительно того, какое решение нужно принять. Эти рекомендации не обязательно будут приняты. Многое будет зависеть, например, от склонности к риску лица, принимающего решение. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы знали, что осуществляется j-е состояние внешней среды, то выбрали бы наилучшее решение, т. е. приносящее наибольший доход

$$q_j = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{kj}.$$

Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т. е. если мы примем i-е решение, а во внешней среде реализуется j-е состояние, то мы будем с о ж а л е т ь о недополученном доходе в размере

$$r_{ij} = q_j - q_{ij} = \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} - q_{ij}$$

(по сравнению с тем, как если бы мы знали точно, что реализуется j-е состояние внешней среды, и выбрали бы решение, приносящее наибольший доход $q_j = \max\limits_{i=1,2,\dots,m} q_{ij}$). Таблица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей сожалений*.

Составим матрицу сожалений в условиях примера 17. Максимум по первому столбцу равен

$$q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0,$$

по второму –

$$q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = -100\,000,$$

поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1\,400\,000 \\ 100\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Н е о п р е д е л е н н о с т ь – более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные е д и н и ч н ы е случайные явления связаны с неопределенностью, а м а с с о в ы е случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации. Существуют следующие п р а в и л а – рекомендации по принятию решений в таких ситуациях.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация, наихудшая с нашей точки зрения (т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min\limits_{j=1,2,\dots,n} q_{ij}$) и выберем решение i_0 с наибольшим a_i.

Минимальные элементы строк матрицы последствий в примере 17 $a_1 = -1\,500\,000$, $a_2 = -100\,000$. Теперь из двух чисел: (–1 500 000), (–100 000) находим наибольшее. Это (–100 000). Значит, правило Вальда рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Правило Сэвиджа (правило минимальных сожалений). При применении этого правила анализируется матрица сожалений **R**. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений $b_i = \max\limits_{j=1,2,\dots,n} r_{ij}$, и выберем решение i_0 с наименьшим b_i.

Максимальные элементы строк матрицы сожалений в примере 17 $b_1 =$ $= 1\,400\,000$, $b_2 = 100\,000$. Из чисел 1 400 000, 100 000 находим наименьшее. Это 100 000. Значит, правило Сэвиджа также, как и правило Вальда, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Предположим, что в рассмотренной схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется **частичной неопределенностью**. При принятии решений в таких ситуациях можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации ожидаемого дохода. Доход, получаемый при принятии i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} Q_i & q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

Ожидаемый доход при принятии i-го решения оценивается математическим ожиданием MQ_i соответствующей случайной величины Q_i. *Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход.*

Правило минимизации ожидаемых сожалений. Сожаления при реализации i-го решения представляются случайной величиной R_i с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} R_i & r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

Ожидаемые сожаления оценивается математическим ожиданием MR_i соответствующей случайной величины R_i. *Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления.*

Задача 19. Владелец груза должен выбрать одну из двух альтернатив: страховать груз или не страховать. Риск заключается в том, что с вероятностью 0,1 возможна катастрофа, в результате которой груз будет утрачен. Если груз застрахован, то в случае его утраты владелец теряет стоимость груза (95 000 руб.), но получает компенсацию 100 000 руб., если же катастрофы не произошло, он теряет 5000 руб, потраченные на страховой полис. Если груз не застрахован, в случае катастрофы теряется его стоимость, при благополучном же исходе владелец не несет никаких расходов. Какое решение принять?

Решение. У владельца груза есть две стратегии: страховать груз или не страховать его. У внешней среды также есть два состояния: катастрофа произойдет либо не произойдет.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -5000 \\ -95\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вероятности состояний внешней среды известны ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}9$), поэтому ряды распределения дохода при выборе первой и второй стратегии таковы:

$$\begin{array}{c|cc} Q_1 & 0 & -5000 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} Q_2 & -95\,000 & 0 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}.$$

При этом

$$MQ_1 = 0 \cdot 0{,}1 + (-5000) \cdot 0{,}9 = -4500,$$

аналогично

$$MQ_2 = -9500.$$

Таким образом, правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять первое решение, т. е. застраховать груз.

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен $q_1 = \max\limits_{i=1,2} q_{i1} = 0$, по второму – $q_2 = \max\limits_{i=1,2} q_{i2} = 0$, поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 5000 \\ 95\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ожидаемые сожаления при указанных выше вероятностях. Получаем $\mathbf{M}R_1 = 4500$, $\mathbf{M}R_2 = 9500$. Минимальные ожидаемые сожаления равны 4500, они соответствуют первому решению – застраховать груз.

Задача 20. Исследуем ситуацию принятия решений в условиях неопределенности в случае, когда матрица последствий

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу сожалений. Максимальные доходы в зависимости от внешних условий таковы:

$$q_1 = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{k1} = 8, \qquad q_2 = 5, \qquad q_3 = 8, \qquad q_4 = 12$$

(это максимальные элементы столбцов матрицы $\mathbf{Q}$), поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии i-го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min_j q_{ij}$, и выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0}. Имеем:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 1.$$

Из этих чисел 2, 2, 3, 1 находим максимальное: это 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений $b_i = \max_j r_{ij}.$, и выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Имеем:

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 7.$$

Из этих чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное. Это 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять третье решение.

Если известны вероятности состояний внешней среды:

$$1/2, \quad 1/6, \quad 1/6, \quad 1/6,$$

то правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$MQ_1 = 23/6, \quad MQ_2 = 25/6, \quad MQ_3 = 7 \quad MQ_4 = 17/6.$$

Максимальный ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$MR_1 = 20/6, \quad MR_2 = 4, \quad MR_3 = 7/6, \quad MR_4 = 32/6,$$

т. е. опять третье решение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры ситуаций принятия решений в условиях неопределенности из Вашего опыта.
2. Выполните контрольное задание № 2.

3.4. Матричные игры

В жизни часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие несовпадающие цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются *конфликтными*. Приведем несколько примеров конфликтных ситуаций: борьба фирм за рынок сбыта, аукцион, спортивные состязания, военные операции, парламентские выборы (при наличии нескольких кандидатов), карточная игра.

Рассмотрим конфликт двух участников с противоположными интересами. Математической моделью такого конфликта является **игра с нулевой суммой**. Участники игры называются *игроками*. *Стратегией* игрока называется осознанный выбор одного из множества возможных вариантов его действий. Будем рассматривать конечные игры, в которых множества стратегий игроков конечны; стратегии первого игрока пронумеруем от 1 до m, а стратегии второго игрока – от 1 до n.

Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок – свою j-ю стратегию, то результатом такого совместного выбора будет *платеж* a_{ij} второго игрока первому (это не обязательно денежная сумма, а любая оценка последствий выбора игроками своих стратегий). Таким образом, игра с нулевой суммой однозначно определяется таблицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *платежной матрицей*. Строки этой матрицы соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго игрока. Конечные игры с нулевой суммой называются *матричными*, так как целиком определяются своими платежными матрицами.

Игра происходит *партиями*. Партия игры состоит в том, что игроки одновременно называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы Π (по своему выбору), а второй – некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору). После этого происходит «расплата». Пусть, например, первый игрок назвал номер i, а второй – j. Тогда второй игрок платит первому сумму a_{ij} (не обязательно выраженную в денежных единицах). На этом партия игры заканчивается. Если $a_{ij} > 0$, то это означает, что при выборе первым игроком i-й стратегии, а вторым – j-й стратегии выигрывает первый игрок, если же $a_{ij} < 0$, то это значит, что при данном выборе стратегий выигрывает второй игрок. Цель каждого игрока – выиграть как можно большую сумму в результате большого числа партий.

Стратегия называется *чистой*, если выбор игрока неизменен от партии к партии. У первого игрока, очевидно, есть m чистых стратегий, а у второго – n.

При анализе игр противник считается сильным, т. е. разумным.

Рассмотрим описанную конфликтную ситуацию с точки зрения первого игрока. Если мы выбираем свою i-ю стратегию (строку матрицы **П**), то второй игрок, будучи разумным, выберет такую стратегию, чтобы обеспечить себе наибольший выигрыш (а нам, соответственно, наименьший), т. е. он выберет такой столбец матрицы **П**, в котором платеж a_{ij} (второго игрока первому) минимален. Переберем все наши стратегии $i = 1, 2, \ldots, m$ и выберем такую из них, при которой второй игрок, действуя максимально разумно, заплатит нам наибольшую сумму. Эта величина (обозначим ее α) называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ей стратегия первого игрока – *максиминной*. Аналогично (но уже с точки зрения второго игрока) определяется *верхняя цена игры* (β) и соответствующая ей *минимаксная стратегия* второго игрока. Подчеркнем, что по своему определению нижняя цена игры α представляет собой минимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т. е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший α), а верхняя цена – величину, противоположную максимальному гарантированному проигрышу второго игрока [т. е. применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше, чем β, или, по-другому, выиграет не меньше чем ($-\beta$)].

В общем случае имеет место неравенство $\alpha \leqslant \beta$, если же $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет *седловую точку*, общее значение α и β называется при этом *ценой игры* и обозначается $\nu = \alpha = \beta$. При этом стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее ν, а второму игроку – гарантированный проигрыш не более ($-\nu$).

Задача 21. В платежной матрице

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

указано, какую долю рынка получит наше предприятие, если оно будет действовать согласно каждой из возможных трех стратегий, а основной конкурент – согласно каждой из своих возможных трех стратегий.

Решение. Данная игра имеет седловую точку. Действительно, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max\{0,1;\, 0,3;\, 0,1\} = 0,3$$

(соответствует второй стратегии первого игрока), а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min\{0,5;\, 0,3;\, 0,4\} = 0,3$$

(соответствует второй стратегии второго), поэтому игроки, действуя каждый по своей второй стратегии, могут гарантировать себе: первый – выигрыш не менее

$\nu = \alpha = \beta = 0{,}3 = 30\%$ рынка, а второй – что первый игрок выиграет не более $\nu = 30\%$ рынка. Таким образом, оптимальная чистая стратегия первого игрока – вторая, второго игрока – вторая, а цена игры равна $\nu = 0{,}3$.

Смешанной стратегией первого игрока называется набор чисел p_1, p_2, …, p_m, где все $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. При этом p_i – вероятность, с которой первый игрок выбирает свою i-ю стратегию. Аналогично определяется смешанная стратегия второго игрока. Чистая стратегия также подпадает под определение смешанной – если все вероятности равны нулю, кроме одной, равной единице.

Рассмотрим примеры анализа игр.

Задача 22. Правила игры таковы. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб., по своему выбору, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб.

Решение. Платежная матрица, очевидно, имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего проверим, нет ли в игре седловой точки. Действительно, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-1, -5\} = -1,$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{3, 3\} = 3,$$

т. е. $\alpha \neq \beta$, и седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет. Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью p, а вторую стратегию – соответственно с вероятностью $(1 - p)$, т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией $(p, 1 - p)$.

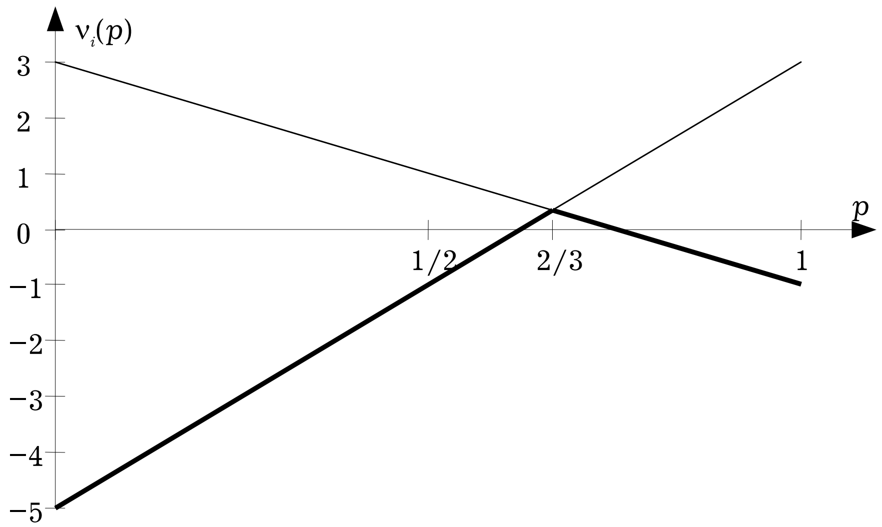
Обозначим $\nu_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае

$$\nu_1(p) = (-1)p + 3(1 - p),$$

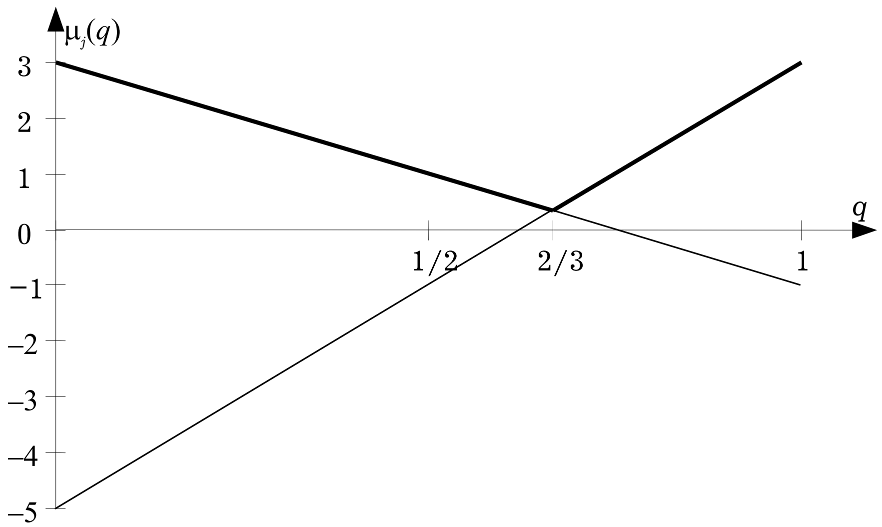
$$\nu_2(p) = 3p + (-5)(1 - p).$$

Построим графики этих функций на рис. 38, *а*.

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш: $\nu(p) = \min\{\nu_1(p), \nu_2(p)\}$ (эта функция отмечена на рис. 38, *а* жирной линией). Иными словами, второй игрок в любом случае заставит первого выиграть как можно меньше, т. е. в рассматриваемой игре при $p \in [0; p^*)$ второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $\nu_2(p)$, при $p \in (p^*; 1]$ второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $\nu_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует $\nu = \max\limits_{p\in[0;1]} \nu(p)$, т. е. $p = p^*$. Число ν называется при этом ценой игры.



а)



б)

Рис. 38

В нашем случае $p^* = 2/3$, т. е. оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия (2/3, 1/3), которая определяется из условия $\nu_1(p) = \nu_2(p)$, при этом цена игры равна $\nu = \nu_1(2/3) = \nu_2(2/3) = 1/3$.

Пусть он выбирает первую стратегию с вероятностью q, а вторую – с вероятностью $1 - q$.

Тогда выигрыш второго игрока равен $\mu_1(q) = -q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q) = 3q - 5(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию (рис. 38, *б*). Значение q определяется из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$, оно равно $q = 2/3$.

Поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна $(2/3,\ 1/3)$.

Задача 23. Решить игру с платежной матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Платежная матрица данной игры имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, имеет ли данная игра седловую точку. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max\{-2, -4\} = -2,$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{2,\ 3,\ 4,\ 1\} = 1,$$

т. е. $\alpha \neq \beta$, значит, седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет. Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью p, а вторую стратегию – соответственно с вероятностью $(1-p)$, т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией $(p,\ 1-p)$.

Обозначим $\nu_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае

$$\nu_1(p) = (-2)p + 2(1-p),\ \ \nu_2(p) = 3p + (-4)(1-p),$$
$$\nu_3(p) = 4p + (-3)(1-p),\ \ \nu_4(p) = p + (-1)(1-p).$$

Графики этих функций построены на рис. 39. Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш: $\nu(p) = \min\{\nu_1(p), \nu_2(p), \nu_3(p), \nu_4(p)\}$ (эта функция отмечена на рис. 39 жирной линией). Иными словами, при $p \in [0; p^*)$ второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $\nu_2(p)$; при $p \in (p^*; 1]$ второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $\nu_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует $\nu = \max_{p\in[0;1]} \nu(p)$. В нашем случае оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия $(6/11, 5/11)$ [она определяется из условия $\nu_1(p) = \nu_2(p)$], при этом цена игры равна $\nu = \nu_1(6/11) = \nu_2(6/11) = -2/11$.

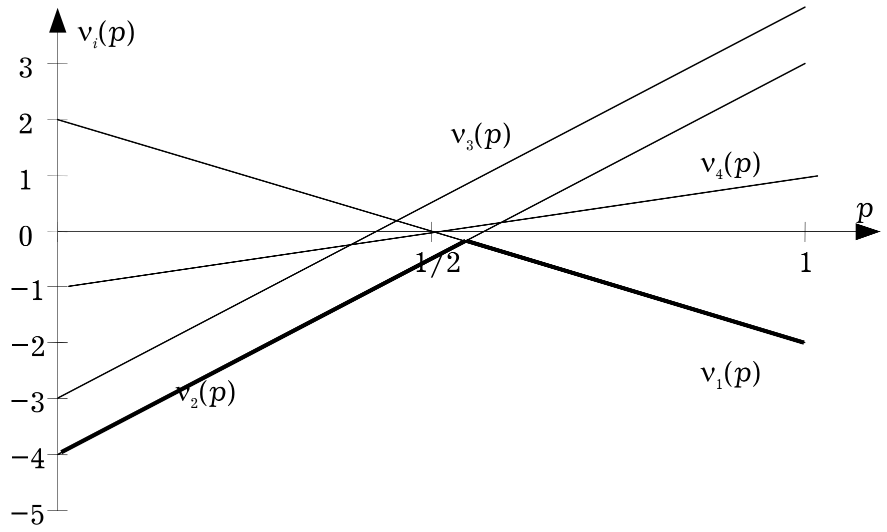


Рис. 39

Отметим, что второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока имеет вид $(q, 1 - q, 0, 0)$.

Тогда выигрыш второго игрока равен $\mu_1(q) = -2q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q) = 2q - 4(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию. Значение q определяется из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$, оно равно $q = 7/11$.

Итак, оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна $(7/11, 4/11, 0, 0)$.

В общем случае любая матричная игра с произвольным числом стратегий может быть сведена к задаче линейного программирования.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти решение матричной игры с платежной матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Приведите примеры конфликтных ситуаций из Вашего опыта, постройте соответствующие платежные матрицы.

ГЛАВА 4. ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Любые финансовые решения характеризуются тем, что доходы и расходы разнесены во времени и, как правило, не могут быть точно предсказаны теми, кто эти решения принимает. Поэтому при принятии финансовых решений необходимо учитывать два важнейших фактора – время и риск.

При проведении любой финансовой операции обязательно должно быть определено в р е м я ее совершения: ведь деньги, полученные сегодня, уже можно непосредственно использовать, тогда как ту же самую денежную сумму, полученную через определенный срок, можно будет использовать только по истечении этого срока, поэтому стоимость денег изменяется во времени – денежные суммы, поступающие в будущем, являются менее ценными, чем аналогичные суммы, поступающие в более ранние сроки.

Любая операция, протекающая во времени, сопряжена с р и с к о м, который заключается в том, что вполне возможно несоответствие между теми результатами, которых мы ожидаем от осуществления операции, и теми результатами, которые произойдут на самом деле.

Такие вопросы изучает ф и н а н с о в а я м а т е м а т и к а.

4.1. Ценность денег во времени

Основным институтом, обслуживающим финансовые рынки, являются банки. Одной из основных банковских операций является обслуживание *банковских счетов*: в определенные моменты времени банк обязуется добавлять к денежной сумме, лежащей на банковском счете, некоторый п р о ц е н т. Проценты могут быть простыми или сложными и начисляться n раз в год либо непрерывно.

Пусть в начальный момент времени на банковском счете лежит сумма B_0, и на эту сумму в конце каждого года начисляется процент i (т. е. доля от п е р в о н а ч а л ь н о й суммы B_0), тогда в конце первого года сумма на счете составит

$$B_1 = B_0 + B_0 i = B_0(1 + i),$$

в конце второго года –

$$B_2 = B_0(1 + i) + B_0 i = B_0(1 + 2i),$$

в конце t-го года (t – целое) –

$$B_k = B_0(1 + ti).$$

Такая схема называется **схемой простых процентов**.

Исторически такая схема была самой первой, но она допускает простую возможность для владельца банковского счета заработать больше, чем предлагает банк: например, за два года можно увеличить сумму не до $B_0(1 + 2i)$, а до $B_0(1 + i)^2 = B_0(1 + 2i + i^2) > B_0(1 + 2i)$, а за t лет (t – целое) не до $B_0(1 + ti)$, а до $B_0(1 + i)^t > B_0(1 + ti)$, для этого нужно в конце каждого года снимать со счета всю сумму, включая только что начисленные проценты, и тут же открывать новый счет и класть на него всю эту сумму!

Банки, конкурирующие между собой, естественно, предоставили вкладчикам возможность проводить такую операцию «переоткрытия счета» автоматически; такая схема называется **схемой сложных процентов** и предполагает начисление процента не на первоначальную сумму B_0, а на сумму, лежащую на счете после последнего начисления процентов, таким образом, через (целое число) t лет при использовании схемы сложных процентов на счете будет лежать сумма

$$B_k = B_0(1 + i)^t.$$

В конкурентной борьбе за вкладчиков банки предлагали все новые и новые возможности, например, начисление процентов не в конце года, а n раз в год. При этом, прежде всего, необходимо как-то сравнивать условия, предлагаемые различными банками, и для этого договорились всегда называть клиентам *проценты годовых* – процентную ставку i, выплачиваемую за год. Если за год выплачивается процент i, то за n-ю часть года в случае п р о с т ы х   п р о ц е н т о в, очевидно, будет выплачиваться процент $i_n = i/n$, и через t лет (т. е. через $[nt]$ начислений процентов) на счете будет лежать сумма

$$B_t = B_t\left(1 + [nt]\frac{i}{n}\right)$$

(здесь число t может быть уже как целым, так и дробным; квадратными скобками $[x]$ обозначена *целая часть* числа x – наименьшее целое число, не превосходящее x).

Рассчитаем процентную ставку i_n, выплачиваемую за n-ю часть года в случае сложных процентов. За год сумма B_0 увеличивается до $B_0(1 + i)$, с другой стороны, если n раз за этот год начислялся процент i_n по схеме сложных процентов, то к концу года сумма B_0 должна превратиться в $B_0(1 + i_n)^n$. Таким образом, заключаем, что

$$B_0(1 + i) = B_0(1 + i_n)^n$$

или

$$1 + i = (1 + i_n)^n,$$

откуда

$$i_n = (1 + i)^{1/n} - 1.$$

Рис. 39, на котором представлены графики функций $v_t^{(\text{прост.})} = (1 + ti)$ и $v_t^{(\text{непр.})} = (1 + i)^t$, дает возможность убедиться в том, что при $t < 1$ простые проценты растут быстрее, чем сложные и непрерывные, а при $t > 1$ – медленнее.

Если сумма B_t, лежащая на банковском счете в момент времени t, отрицательна (при этом говорят, что на счете образовалась *к о р о т к а я   позиция*), подразумевается, что банк кредитует вкладчика на сумму $|B_t|$, взимая за это тот же самый процент i, который начисляется на счета с положительной суммой (с *длинной позицией*). Очевидно, описанные модели начисления простых и сложных процентов описывают и случай короткой, и случай длинной позиции на банковском счете.

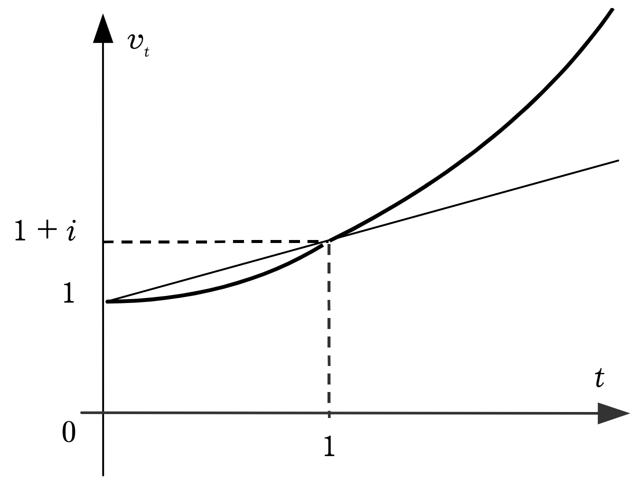


Рис. 39

Задача 24. Через сколько лет удвоится сумма, положенная в банк под $i = 10\%$ годовых, если начисления на банковский счет производятся по схеме: а) простых процентов; б) сложных процентов?

Решение. Через t лет исходная сумма B_0 в случае простых процентов превратится в $B_t = B_0(1 + [t]i)$, а в случае сложных процентов – в $B_t = = B_0(1 + i)^{[t]}$. Чтобы ответить на вопрос, необходимо решить неравенства:

а) $B_0(1 + [t]i) \geqslant 2B_0$; б) $B_0(1 + i)^{[t]} \geqslant 2B_0$

или

а) $1 + [t]i \geqslant 2$; б) $(1 + i)^{[t]} \geqslant 2$,

откуда получаем:

а) $[t] \geqslant \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$; б) $[t] \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1} = \dfrac{0{,}693}{0{,}095} \approx 7{,}29$.

Таким образом, в случае простых процентов сумма удвоится через 10 лет, а в случае сложных процентов – через 8 лет.

Заметим, что в случае непрерывных процентов сумма удвоится за 7,29 лет, т. е. приблизительно за 7 лет и 3,5 мес.

Задача 25. В день рождения сына родители положили на его банковский счет 50 000 руб. Какая сумма будет на счете к восемнадцатилетию сына, если банк начисляет сложные проценты по ставке $i = 10\%$?

Решение. По формуле сложных процентов получаем: $B_{18} = = 50\,000(1 + 0{,}1)^{18} = 50\,000 \cdot 5{,}5599173 = 277\,995{,}87$ руб. = 277 995 руб. 87 коп.

Многие банки в современной России привлекают заемщиков, пользуясь их недостаточной финансовой грамотностью. Это иллюстрирует следующая задача.

Задача 26. Потребитель взял в кредит 1 000 000 руб. и должен вернуть через полгода эту сумму и 20% от нее (за пользование кредитом). Какую ставку сложных годовых процентов взимает данный банк?

Решение. Имеем: $1 + i = (1 + i_2)^2$, где i – годовая процентная ставка, а $i_2 = 20\% = 0{,}2$ – ставка, выплачиваемая за полгода. Отсюда $i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1 + 0{,}2)^2 - 1 = 0{,}44$. Таким образом, если заемщик выбирает между банком, который взимает 16% годовых и требует гарантий поручителей или оставления залога, и данным банком, то плата за отсутствие гарантий составит 44% – 16% = = 28% годовых (от 1 000 000 руб. это составит 280 000 руб. – значительную сумму)!

Предположим, что мы должны выплатить в момент $t > 0$ в будущем некоторую сумму B_t, и у нас есть возможность воспользоваться банковским счетом, по которому начисляется i процентов годовых. Какую сумму B_0 можно положить на счет сегодня (в нулевой момент времени), чтобы к моменту t иметь на счете в точности требуемую сумму?

Очевидно, суммы B_0 и B_t связаны формулами простых или сложных процентов. Для этих двух случаев получаем, соответственно,

Таким образом, ценность денег постоянно меняется во времени; 1 000 000 руб., выплаченный (не важно, нам или нами) сегодня – это совсем не то же самое, что тот же 1 000 000 руб., выплаченный через 10 лет. Сегодня этой суммой можно воспользоваться (хотя бы для получения процентного дохода от вложения на банковский счет), а десятилетний срок ожидания довольно-таки долог. Если мы отложим использование данной суммы на 10 лет, и на этот срок положим ее в банк (который, для определенности, платит 10% годовых), то через 10 лет у нас будет не 1 000 000 руб., а $1\,000\,000(1 + 0{,}10)^{10} = 2\,593\,742$ руб. 46 коп. – более чем в 2,5 раза больше!

Поэтому сравнивать, складывать и производить любые другие операции над денежными суммами можно только в том случае, когда эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени. При этом нужные операции необходимо производить не над рассматриваемыми денежными суммами, а над их современными эквивалентами.

В реальных условиях обычно используются схемы сложных или непрерывных процентов; при этом сумма B_t $(t > 0)$ имеет в момент времени $t_0 = 0$ ценность B_0, определяемую соответствующей из формул, обведенных фигурной скобкой. Если $t < 0$, то эти формулы приведут просто к сумме B_0, накопленной за срок $|t| = -t$. Итак, вне зависимости от знака t ценность в настоящий момент времени суммы B_t, выплачиваемой в момент времени t, определяется данными формулами. Эта ценность B_0 денежной суммы B_t в настоящий момент времени называется *приведенной* (или *современной*) *ценностью* суммы B_t. Приведенная стоимость единичной суммы обозначается v_t; в случае сложных процентов

$$v_t = (1+i)^{-\left([t]+\frac{[n\{t\}]}{n}\right)}.$$

Величина

$$v = (1 + i)^{-1}$$

называется *коэффициентом дисконтирования.*

Задача 27. Что предпочтительнее: получить 10 000 через два года или 12 000 через три года, если банк начисляет сложные проценты по ставке $i = 10\%$ годовых?

Решение. Современная ценность первой суммы равна $\frac{10\,000}{(1+0{,}1)^2} =$ =8264 руб. 46 коп., современная ценность второй суммы равна $\frac{12\,000}{(1+0{,}1)^3} =$ =9015 руб. 78 коп., поэтому второй вариант оказывается предпочтительнее первого

Задачи для самостоятельного решения

1. Потребитель взял в кредит 1 000 000 руб. под 21% годовых на полгода. Какую сумму он должен вернуть?

2. Что предпочтительнее: получить 100 000 через десять лет или 90 000 через восемь лет, если банк начисляет сложные проценты по ставке $i = 10\%$ годовых?

4.2. Потоки платежей

Потоком платежей называется последовательность

$$\left(t_0; B_{t_0}\right), \left(t_1; B_{t_1}\right), \left(t_2; B_{t_2}\right), \ldots, \left(t_n; B_{t_n}\right), \ldots,$$

где t_k – моменты времени, B_{t_k} – платежи, происходящие в соответствующие моменты t_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$; поток платежей может быть к о н е ч н ы м (если число n платежей конечно) или б е с к о н е ч н ы м (в противном случае).

Потоки платежей удобно изображать графически, при этом положительные величины платежей, соответствующие денежным п о с т у п л е н и я м, изображаются стрелками, направленными вверх, а отрицательные величины платежей, соответствующие денежным в ы п л а т а м, – стрелками, направленными вниз (рис. 40).

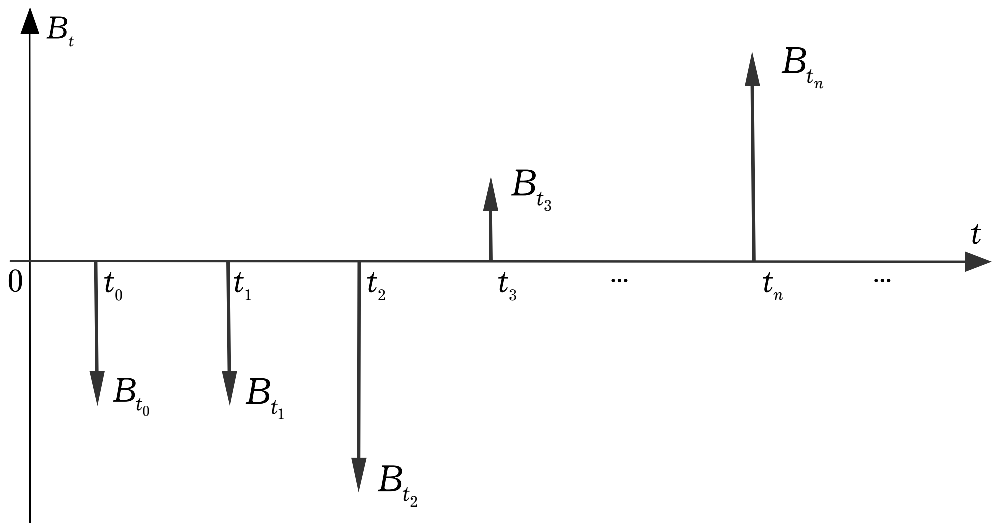


Рис. 40

Пример 18. Предположим, что мы должны вернуть два долга: 14 000 руб. через год и 6000 руб. через два года и хотим погасить свою задолженность досрочно, сегодня. Какую сумму мы должны выплатить, если ставка банковского процента равна $i = 10\%$?

Поток платежей, соответствующий условиям данного примера, изобразим на рис. 41.

Предположим, что кредитор предлагает нам просто осуществить сегодня платеж, равный суммарному долгу: $B_1 + B_2 = -14\,000 + (-6000) = -20\,000$ руб. Если бы мы сегодня поместили эту сумму $x = 20\,000$ руб. в банк, то через год она превратилась бы в $x(1 + i) = 20\,000(1 + 0{,}1) = 22\,000$ руб. Из этой суммы мы бы выплатили первый долг 10 000 руб., а оставшиеся $22\,000 - 10\,000 = 12\,000$ руб. оставили бы на банковском счете, тогда еще через год на счете будет $12\,000(1 + 0{,}1) = 13\,200$ руб., из которых мы заплатим долг 6000 руб., при этом у нас на счете останется $13\,200 - 6000 = 7\,200$ руб. Видно, что согласившись выплатить просто сумму долгов, мы существенно переплатили бы!

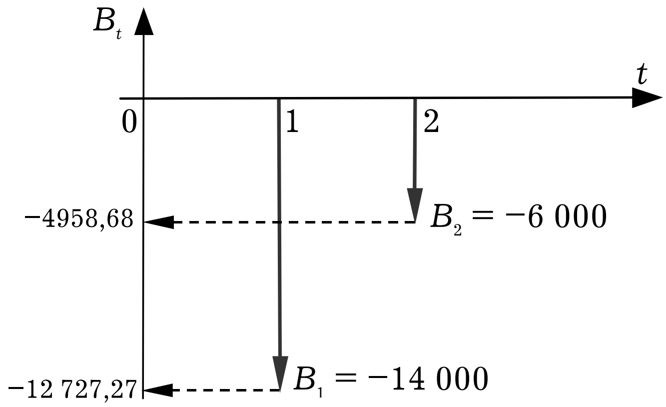


Рис. 41

Найдем теперь справедливый размер x нашей сегодняшней выплаты. Через год сумма x превратится в $x(1 + i)$, и из этой суммы мы выплатим первый долг $B_1 = -14\ 000$ руб. Остаток $x(1 + i) + B_1$ еще через год превратится в $(x(1 + i) + B_1)(1 + i) = x(1 + i)^2 + B_1(1 + i)$, из которых мы выплатим второй долг $B_2 = -6000$ руб., после чего на счете останется $x(1 + i)^2 + + B_1(1 + i) + B_2$. Если этот остаток будет положителен, то такая операция несправедлива по отношению к должнику, а если он будет отрицателен, то по отношению к кредитору. Таким образом, справедливая сумма x должна определяться из условия $x(1 + i)^2 + B_1(1 + i) + B_2 = 0$, что дает

$$x = -(B_1(1 + i)^{-1} + B_2(1 + i)^{-2}).$$

В нашем примере

$$x = -\left(\frac{B_1}{1+i} + \frac{B_2}{(1+i)^2}\right) = -\left(\frac{-14\ 000}{1+0,1} + \frac{-6000}{(1+0,1)^2}\right) = \frac{14\ 000}{1,1} + \frac{6000}{1,21} =$$
$$= 12\ 727,27 + 4958,68 = 17\ 685,95 \text{ руб.} = 17\ 685 \text{ руб. } 95 \text{ коп.};$$

при этом первое слагаемое 12 727 руб. 27 коп. – это абсолютная величина современной ценности первого долга, а 4958 руб. 68 коп. – абсолютная величина современной ценности второго долга.

Пример 18 демонстрирует, что для того, чтобы оценить современную стоимость потока платежей, необходимо все эти платежи привести по формуле к начальному моменту времени, после чего сложить полученные приведенные стоимости платежей. Можно обобщить этот результат и рассматривать ценность потока платежей не только в настоящий момент времени, но и в любой другой момент T: *ценностью потока платежей в момент времени T* называется сумма платежей, дисконтированных (приведенных) к этому моменту:

$$B(T) = \sum_k B_{t_k}(1+i)^{T-t_k},$$

при этом величина

$$\mathbf{NPV} = B(0) = \sum_k B_{t_k}(1+i)^{-t_k} \qquad (48)$$

называется *современной ценностью потока платежей*, а величина

$$\mathbf{NFV} = B(t_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}(1+i)^{t_n - t_k}$$

называется *накопленной ценностью потока платежей к моменту* t_n или его *чистым накопленным доходом к моменту* t_n (Net Future Value); обычно рассматривают накопленную стоимость потока платежей к моменту последнего платежа.

Рентой называется право на получение одинакового платежа C с одинаковой периодичностью; иными словами, рента – это поток одинаковых платежей с одинаковыми промежутками между платежами. *Ограниченной рентой* или *аннуитетом* называется рента, состоящая из конечного числа n одинаковых платежей C, выплачиваемых с одинаковой периодичностью; если платежи ренты никогда не заканчиваются, то такая рента называется *вечной*. Если платежи ренты производятся строго в конце года, такая рента называется *годовой*, иначе – *общей*. Если платежи производятся в конце каждого периода, то такая рента называется *запаздывающей*, а если в начале каждого периода – то *упреждающей*.

Рассмотрим ограниченную запаздывающую годовую ренту. Пусть i – годовая процентная ставка. Поток платежей, соответствующий этой ренте, представлен на рис. 42.

Современная стоимость такого потока платежей по формуле (48) равна

$$\mathbf{NPV} = B(0) = \sum_{k=1}^{n} B_k(1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{n}\left(C(1+i)^{-k}\right) = C\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} =$$
$$= C\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right)$$

или, вспомнив, что такое коэффициент дисконтирования v,

$$\mathbf{NPV} = C(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n).$$

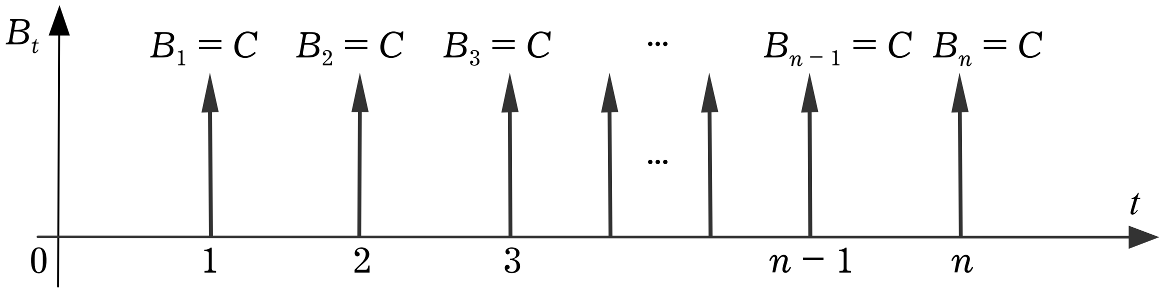


Рис. 42

В скобках стоит сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = v$ и знаменателем $q = v$, эта сумма равна

$$v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n = S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} =$$

$$= \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{1/v-1} = \frac{1-v^n}{(1+i)-1} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

поэтому

$$\mathbf{NPV} = \frac{C(1-(1+i)^{-n})}{i}.$$

Задача 28. Банк выдал потребительский кредит в сумме 50 000 руб. на полгода под $i = 21\%$ годовых, причем погашаться кредит должен одинаковыми выплатами в конце каждого месяца. Каким должен быть размер этой выплаты?

Решение. Поток платежей клиента банку представляет собой ограниченную запаздывающую ренту, состоящую из $n = 6$ платежей в сумме C каждый, причем платежи производятся в конце каждого месяца. Процентная ставка, взимаемая за один месяц, равна

$$i_{12} = (1 + 0{,}21)^{1/12} - 1 = 1{,}016,$$

а современная стоимость данной ренты по формулам равна

$$\mathbf{NPV} = C\frac{1-(1+i_{12})^{-6}}{i_{12}},$$

откуда

$$C = \frac{\mathbf{NPV} \cdot i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-6}}.$$

Но современная стоимость данного потока платежей должна быть равна сумме, взятой в долг, т. е.

$$\mathbf{NPV} = 50\ 000.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$C = \frac{\mathbf{NPV} \cdot i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-6}} = \frac{50\,000 \cdot 0{,}016}{1-1{,}016^{-6}} = 1761{,}23 \text{ руб.}$$

Итак, искомый ежемесячный платеж равен $C = 1761$ руб. 23 коп.

Задачи для самостоятельного решения

1. Банк выдал потребительский кредит в сумме 100 000 руб. на 10 лет под $i = 10\%$ годовых, причем погашаться кредит должен одинаковыми выплатами в конце каждого года. Каким должен быть размер этой выплаты?

2. Как можно использовать формулы для запаздывающих рент при анализе упреждающих рент?

4.3. Оптимальность инвестиционных операций

Обозначим буквой E некоторую обобщенную характеристику произвольной инвестиционной операции, которую назовем *эффективностью* операции (в качестве E можно взять доход, доходность в процентах от вложенной суммы, доходность в процентах годовых, внутреннюю норму доходности и т. п.). Часто невозможно заранее точно предсказать эффективность той или иной операции, и такие операции рассматривают как случайные величины. При этом в качестве *ожидаемой эффективности* такой инвестиционной операции используют математическое ожидание $\mathbf{M}E$ случайной величины E.

Под *риском* инвестиционных операций мы понимаем отклонение реальных значений эффективности инвестиционной операции от прогнозируемой эффективности (как в меньшую сторону, так и в бóльшую).

Если E – случайная эффективность инвестиционной операции, и в качестве ожидаемой эффективности операции мы выбрали математическое ожидание ME случайной величины E, то в качестве измерителя *риска* операции естественно взять среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_E = \sqrt{DE}$$

(здесь DE – дисперсия случайной величины E).

Знание только математических ожиданий и средних квадратичных отклонений случайных величин довольно-таки важно при анализе группы случайных величин, оно помогает выбрать из множества случайных величин оптимальные по Парето, отбросив заведомо «плохие».

Пусть на финансовом рынке существует возможность осуществить несколько инвестиционных операций, ожидаемые эффективности и риски которых известны и равны соответственно ME_1, ME_2, …, ME_n и σ_1, σ_2, …, σ_n. Говорят, что i-я операция *доминирует* j-ю, если

$$\begin{cases} ME_i \geqslant ME_j, \\ \sigma_i < \sigma_j \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ME_i > ME_j, \\ \sigma_i \leqslant \sigma_j. \end{cases}$$

Операция называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

Задача 29. Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_1, E_2, E_3, E_4 с рядами распределения

E_1	2	5	8	4
p	1/6	1/2	1/6	1/6

,

E_2	2	3	4	12
p	1/2	1/6	1/6	1/6

,

E_3	3	5	8	10
p	1/6	1/6	1/2	1/6

,

E_4	1	2	4	8
p	1/2	1/6	1/6	1/6

.

Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

Решение. Ожидаемые эффективности и риски равны соответственно $ME_1 = 4{,}81$, $\sigma_1 = 1{,}77$, $ME_2 = 4{,}16$, $\sigma_2 = 3{,}57$, $ME_3 = 7{,}00$, $\sigma_3 = 2{,}30$, $ME_4 = 2{,}81$, $\sigma_4 = 2{,}54$. Нанесем точки (ME_i; σ_i) на единый график (рис. 43). i-я операция доминирует j-ю, если точка, соответствующая i-й операции, находится на графике правее и ниже точки, соответствующей j-й операции.

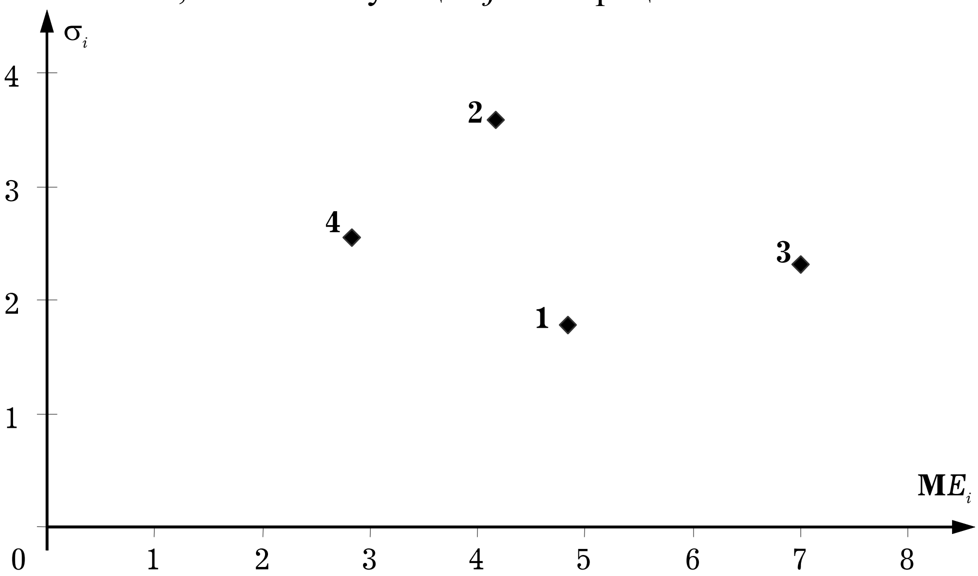


Рис. 43

Видно, что первая операция доминирует вторую и четвертую, третья операция также доминирует вторую и четвертую. При этом первая операция не доминирует третью, а третья не доминирует первую. Первая и третья операции, таким образом, оптимальны по Парето.

Отметим, что операции, оптимальные по Парето, не обязательно являются «самыми лучшими» (и даже просто «хорошими») – эти операции н е являются худшими. Выбор операций среди оптимальных по Парето осуществляется на основе склонности лица, принимающего соответствующее решение, к риску.

В некоторых ситуациях предпочтительной оказывается операция, в которой ожидаемая эффективность вообще отрицательна. Например, если перед нами стоит выбор из двух операций:

- потерять 1 руб.;
- с вероятностью 0,5 получить 1 000 000 руб. и с вероятностью 0,5 потерять 100 000 руб.,

то обе эти операции окажутся оптимальными по Парето ($ME_1 = -1$, $\sigma_1 = 0$, $ME_2 = 550\,000$, $\sigma_2 = 450\,000$), но, скорее всего, мы склонимся к выбору первой операции, несмотря на то, что ожидаемый доход по ней составляет отрицательное число (–1 руб.), тогда как ожидаемый доход от исполнения второй операции составляет 550 000 руб. – слишком велик риск у второй операции, слишком велика вероятность потерь.

Задачи для самостоятельного решения

1. Приведите примеры ситуаций из Вашего опыта, в которых полезно использование концепции оптимальности по Парето.

2. Решите контрольное задание № 3.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Организация выполнения контрольных заданий

Для активизации самостоятельной работы студентов и усиления связи изучаемого материала с практической деятельностью по дисциплине «Математика» предусмотрено выполнение контрольных заданий.

В процессе работы над контрольным заданием студент активно закрепляет и углубляет теоретические знания, полученные на лекциях и практических занятиях.

Студент должен выполнить **3** задачи контрольного задания. Условия задач приведены далее, а конкретные числовые данные для каждого варианта – в приложении. Номер варианта выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента.

При выполнении контрольного задания следует строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольное задание выполняется в рабочей тетради на специально отведенных страницах.
2. В работу должны быть включены все требуемые задачи строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.
3. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.
4. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

Контрольное задание сдается преподавателю для проверки. При указании рецензента работы на ее незачет и требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений.

Содержание контрольного задания

1. Динамическая задача распределения инвестиций. Производственное объединение состоит из четырех предприятий. Общая сумма капитальных вложений равна 700 тыс. руб., выделяемые предприятиям суммы кратны 100 тыс. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме x тыс. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(x)$ млн. руб. в год. Значения функций $f_j(x)$ известны и для каждого варианта компактно записаны в прил. 1 в следующем виде.

$$
\begin{matrix}
f_1(0) & f_1(100) & f_1(200) & f_1(300) & f_1(400) & f_1(500) & f_1(600) & f_1(700)\\
f_2(0) & f_2(100) & f_2(200) & f_2(300) & f_2(400) & f_2(500) & f_2(600) & f_2(700)\\
f_3(0) & f_3(100) & f_3(200) & f_3(300) & f_3(400) & f_3(500) & f_3(600) & f_3(700)\\
f_4(0) & f_4(100) & f_4(200) & f_4(300) & f_4(400) & f_4(500) & f_4(600) & f_4(700)
\end{matrix}
$$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе.

2. Принятие решений в условиях неопределенности. Возможные значения курса базовой валюты в течение ближайшего года представлены четырьмя интервалами. Банк рассматривает четыре инвестиционных проекта, каждый из которых связан с международным бизнесом. Матрицы последствий от принятия банком i-го инвестиционного проекта при условии, что курс валюты окажется в j-м интервале, приведены в прил. 2. Там же приведены прогнозируемые экспертами вероятности возможных интервалов курса базовой валюты. Требуется построить матрицу сожалений, найти решения, рекомендуемые правилами Вальда, Сэвиджа, максимального ожидаемого дохода и минимальных ожидаемых сожалений, а также определить проекты, оптимальные по Парето.

3. Оптимальность по Парето. Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_1, E_2, E_3, E_4 с рядами распределения, приведенными для каждого варианта в прил. 3. Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андриашин С. Х., Казанцев С. С., Калинина В. Н. и др.* Информатика и математика для юристов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
2. *Богатов Д. В., Богатов Ф. Г., Минаев В. А.* Информатика и математика для юристов. – М.: МЮИ МВД РФ, 1998.
3. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.
4. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М.: Высшая школа, 2001.
5. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2000.
6. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.
7. *Грес П. В.* Математика для гуманитариев. – М.: Логос, 2004.
8. *Ефремкина О. В., Копылов В. А., Миронова Ю. Н. и др.* Сборник методических материалов по курсам «Математики и информатика», «Правовая информатика». – М.: МГЮА, 1999.
9. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход. – М.: Дело, 2002.
10. *Калинина В. Н., Панкин В. Ф.* Математическая статистика. – М.: Дрофа, 2004.
11. *Карандаев И. С., Малыхин В. И., Соловьев В. И.* Прикладная математика. – М.: ИНФРА-М, 2002.
12. *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. – М.: Мир, 1965.
13. *Колемаев В. А., Калинина В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ИНФРА-М, 2001.
14. *Колемаев В. А., Малыхин В. И., Бодров А. П. и др.* Математические методы принятия решений в экономике. – М.: Финстатинформ, 1999.
15. *Колмогоров А.Н.* Математика в ее историческом развитии. М.: Наука,1991.
16. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
17. *Максименко В. С., Паниотто В. И* Зачем социологу математика. – Киев: Радяньска школа, 1988.
18. *Мангейм Д. Б., Рич Р. К.* Политология: Методы исследования. – М.: Весь Мир, 1999.
19. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.
20. *Пухначев Ю. В., Попов Ю. П.* Математика без формул. – М.: Знание, 1978.
21. *Реньи А.* Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.
22. *Соловьев В. И.* Математические методы управления рисками. – М.: ГУУ, 2003.
23. *Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М.* Математика: Учебный курс для юристов. – М.: Юрайт, 2000.
24. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Статистический анализ данных на компьютере. – М.: ИНФРА-М, 1998.
25. *Фридман Л. М.* Учитесь учиться математике. – М.: Просвещение, 1985.
26. *Шикин Е. В., Шикина Г. Е.* Гуманитариям о математике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

Приложение 1

Исходные данные для динамической задачи распределения инвестиций

Вариант 1

x	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(x)$	0	20	44	55	63	67	70	70
$f_2(x)$	0	18	29	49	72	87	100	108
$f_3(x)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(x)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Вариант 2.

0	15	24	30	36	40	43	45
0	18	26	34	39	42	44	46
0	16	27	37	44	48	50	56
0	10	17	23	29	34	38	41

Вариант 3.

0	42	58	71	80	89	95	100
0	30	49	63	68	69	65	60
0	22	37	49	59	68	76	82
0	50	68	82	92	100	107	112

Вариант 4.

0	37	64	87	105	120	134	145
0	48	75	98	120	132	144	156
0	85	100	111	118	124	129	132
0	47	70	80	86	91	94	98

Вариант 5.

0	10	20	30	38	43	49	52
0	13	25	37	47	55	61	66
0	6	13	20	27	33	38	41
0	24	36	42	46	48	48	49

Вариант 6.

0	3	5	7	8	9	10	10
0	5	8	10	12	13	14	15
0	8	13	17	20	23	25	27
0	6	10	13	15	16	16	16

Вариант 7.

0	5	10	14	17	19	21	22
0	8	13	18	21	23	21	17
0	10	16	21	24	27	29	30
0	11	19	26	30	33	35	36

Вариант 8.

0	28	45	65	78	90	102	113
0	25	41	55	65	75	80	85
0	15	25	40	50	62	73	82
0	20	33	42	48	53	56	58

Вариант 9.

0	28	42	51	57	61	64	66
0	20	27	30	31	32	32	33
0	8	26	37	47	53	58	61
0	5	20	29	36	41	45	47

Вариант 0.

0	5	10	14	17	19	21	22
0	20	34	45	50	48	40	40
0	15	24	30	38	46	52	53
0	26	30	35	40	45	48	50

Приложение 2

Исходные данные для задачи принятия решений в условиях неопределенности

Последствия от реализации проектов

1.	0	2	4	16	**7.**	2	4	6	18
2.	0	4	6	12	**8.**	2	6	8	14
3.	0	1	2	8	**9.**	2	3	4	10
4.	0	4	6	10	1**0.**	2	6	8	2
5.	0	1	5	14	**11.**	2	4	6	18
6.	0	8	16	20	**12.**	2	12	18	22

Вероятности интервалов курса валюты

1.	1/2	1/4	1/8	1/8	**6.**	1/2	1/4	1/8	1/8
2.	1/4	1/4	1/3	1/6	**7.**	1/4	1/4	1/3	1/6
3.	1/3	1/3	1/6	1/6	**8.**	1/3	1/3	1/6	1/6
4.	1/5	1/5	1/5	2/5	**9.**	1/5	1/5	1/5	2/5
5.	1/5	2/5	1/5	1/5	**0.**	1/5	2/5	1/5	1/5

В варианте с номером n необходимо выбрать проекты с номерами n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ из числа приведенных выше, после этого нужно выбрать набор вероятностей интервалов курса валюты.

Приложение 3

Исходные данные для задачи оптимизации по Парето

1. (0, 1/2) (2, 1/4) (4, 1/8) (16, 1/8)
2. (0, 1/4) (4, 1/4) (6, 1/3) (12, 1/6)
3. (0, 1/3) (1, 1/3) (2, 1/6) (8, 1/6)
4. (0, 1/5) (4, 1/5) (6, 1/5) (10, 2/5)
5. (0, 1/5) (1, 2/5) (5, 1/5) (14, 1/5)
6. (0, 1/2) (8, 1/8) (16, 1/8) (20, 1/4)
6. (2, 1/2) (4, 1/4) (6, 1/8) (18, 1/8)
8. (2, 1/4) (6, 1/4) (8, 1/3) (14, 1/6)
9. (2, 1/3) (3, 1/3) (4, 1/6) (10, 1/6)
1**0.** (2, 1/5) (6, 1/5) (8, 1/5) (12, 2/5)
11. (2, 1/5) (4, 2/5) (6, 1/5) (18, 1/5)
12. (2, 1/2) (12, 1/8) (18, 1/8) (22, 1/4)

В варианте с номером n необходимо выбрать операции с номерами n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ из числа приведенных выше (для каждой операции компактно записан ряд ее распределения: первое число в скобках означает возможное значение эффективности операции, а второе – вероятность соответствующего значения). Например, первая операция имеет эффективность, описываемую таким рядом распределения:

$$\begin{array}{c|cccc} E_1 & 0 & 2 & 4 & 16 \\ \hline p & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{array}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие **3**
Введение **4**
Глава 1. Основы математической логики и теории множеств **7**
1.1. Связки и таблицы истинности 7
1.2. Логические возможности.
Логически истинные и логически ложные высказывания 15
1.3. Отношения следования, эквивалентности и несовместимости 24
1.4. Аргументы правильные и ложные 29
1.5. Множества и операции над ними.
Соотношения между множествами и высказываниями 33
Глава 2. Вероятности высказываний и проверка гипотез **43**
2.1. Приписывание вероятностей случайным событиям
(вероятностным высказываниям) 44
2.2. Правила и формулы комбинаторики при вычислении вероятностей 50
2.3. Вычисление вероятностей составных высказываний 60
2.4. Выбор решения при неизвестных вероятностях 79
Глава 3. Методы принятия решений **85**
3.1. Оптимизационные задачи в экономике 85
3.2. Динамическая задача распределения инвестиций 93
3.3. Принятие решений в условиях неопределенности 97
3.4. Матричные игры 104
Глава 4. Основы финансовой математики **111**
4.1. Ценность денег во времени 111
4.2. Потоки платежей 117
4.3. Оптимальность инвестиционных операций 123
Контрольные задания **126**
Литература **128**
Приложения 129