

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ**

**ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

*Иванов К.Ф., Сурков С.В.*

## **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ  
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

**ЧАСТЬ 1**

**ОДЕССА ОГПУ 1995**

УДК 62-82(075)

Иванов К.Ф., Сурков С.В. Механика жидкости и газа. Конспект лекций для студентов механических и энергетических специальностей. Часть 1. - Одесса: ОГПУ, 1995. - 119 с.

Рецензенты:

ISBN 5-7763-1624-3

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ

*В науке нет другого способа приобретения, как в поте лица: ни порывы, ни фантазии, ни стремление всем сердцем не заменяет труда.*

*А.И.Герцен*

Изучение механики жидкости и газа, понимание сущности рассматриваемых физических явлений и процессов тесно связано с усвоением достаточно развитого математического аппарата, которым эта наука оперирует. Принципиально гидромеханика может излагаться как на базе векторного, так и координатного методов. Вопрос о том, какому из них отдать предпочтение, с давних пор служил источником дискуссий. Так, например, известный физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) считал, что «векторы сберегают мел и расходуют мозг». Противником использования аппарата векторного анализа являлся и академик А.Н.Крылов, приводивший достаточно веские аргументы против его применения. Тем не менее векторное построение курса находит широчайшее применение. Одной из причин этого является общая тенденция к сокращению времени, отводимого на изучение дисциплины. В настоящем пособии не отдается решающее предпочтение ни одному из этих методов, они используются по мере необходимости с учетом конкретной ситуации и стремления наиболее простым и доступным способом донести до изучающего содержание вопроса.

Ниже приводятся некоторые, необходимые для понимания дальнейшего, сведения из векторного анализа и теория поля, в основном известные студентам из курса математики. Разумеется, что в рамках пособия они не могут претендовать на достаточную глубину и широту и носят рецептурный характер. Желаящим основательно углубить свои знания в этой области можно рекомендовать книгу: Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов. М.:Высшая школа, 1976. - 389с.

Одной из важнейших особенностей механики жидкости является то, что в основу ее положена так называемая модель сплошной среды. Как известно, для описания среды, состоящей из большого числа молекул в сравнительно малом объеме (жидкости и газы) в физике широко используются два пути: феноменологический и статистический (иногда их называют корпускулярной и континуальной моделями).

Феноменологический путь изучения основывается на простейших допущениях. Оставляя в стороне вопрос о строении вещества, он наделяет его такими свойствами, которые наилучшим образом устанавливают соответствие между наблюдаемыми явлениями и их описанием.

При таком подходе жидкости (газы) рассматриваются как непрерывная среда, способная делиться до бесконечности. Другими словами, жидкость (газ) представляется состоящими из достаточно малых частиц непрерывным образом заполняющих пространство. Эта среда обладает свойством инерции и наделена различными физическими свойствами. В соответствии с такой моделью все параметры жидкости (плотность, вязкость и др.) изменяются непрерывно от точки к точке, что позволяет при анализе движения среды применять математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления хорошо разработанный для непрерывных функций.

Понятие о частицах жидкости, которым широко оперирует механика жидкости и газа, неразрывно связано с понятием о физически бесконечно малом объеме. Это объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами объекта, но он содержит в себе настолько много молекул, что его средние характеристики (например, плотность) становятся устойчивыми по отношению к изменению объема. Поэтому, например, фраза «объем стягивается в точку» означает, что он стремится не к нулю, а к физически бесконечно малому объему. Следует твердо усвоить, что все законы механики жидкости справедливы до тех пор, пока справедлива модель сплошной среды. Количественно это можно оценить по величине числа Кнудсена, представляющего отношение длины свободного пробега молекул  $l$  к характерному размеру течения  $L$ , т.е.

$$Kn = \frac{l}{L} \quad (1.1)$$

Принято считать, что законы механики жидкости справедливы, если  $Kn < 0,01$ .

### **1.1. Векторы и операции над ними.**

Полем какой-либо величины называется пространство, в каждой точке которого эта величина вполне определена. Если эта величина скаляр, т.е. характеризуется одним числом, то поле называют скалярным (поле плотности, поле температуры).

Векторным называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства величиной и направлением. К этому следует лишь

добавить, что неизменным условием, связанным с векторными величинами, является то, что они должны складываться по правилу параллелограмма. Поэтому, например, поток автомашин, движущихся по улице и характеризующийся как величиной, так и направлением не является вектором.

Единичные векторы (орты) в декартовой системе координат будем обозначать  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Тогда вектор  $\mathbf{u}$  может быть представлен как

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_x u_x + \mathbf{e}_y u_y + \mathbf{e}_z u_z \quad (1.2)$$

где  $u_x, u_y, u_z$  - проекции (компоненты) вектора на соответствующие оси координат.

**Скалярное произведение двух векторов** дает скалярную величину

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами.

Ясно, что скалярное произведение обращается в нуль, если векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  взаимно перпендикулярны.

### 1. Векторное произведение двух векторов.

В противоположность скалярному произведению, здесь первое слово указывает на то, что результат действия есть вектор. Векторное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Раскрывая определитель по общим правилам, получаем:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_x (u_y v_z - u_z v_y) - \mathbf{e}_y (u_x v_z - u_z v_x) + \mathbf{e}_z (u_x v_y - u_y v_x) \quad (1.5)$$

### 1.2. Операции первого порядка (дифференциальные характеристики поля).

В теории поля рассматриваются три так называемые операции первого порядка. Эти операции позволяют, выполнив определенные математические действия превратить

- скалярную величину в векторную;
- векторную величину в скалярную;
- векторную - в другую векторную;

Эти операции соответственно называются: градиент, дивергенция и ротор (вихрь). Рассмотрим каждую из них.

Градиент какой-то скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  есть вектор, образующийся в результате выполнения следующих действий:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.6)$$

Физически градиент есть вектор, в направлении которого функция в данной точке поля изменяется с максимальной скоростью.

Дивергенцией вектора  $\dot{u}$  называется выражение вида

$$\operatorname{div} \dot{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.7)$$

Следовательно, любое векторное поле дает некоторое скалярное поле, а именно поле своей дивергенции (расходимости). Если  $\operatorname{div} \dot{u} = 0$ , то поле называют соленоидальным.

Вихрь поля (ротатор) - это вектор, образующийся при выполнении операции

$$\operatorname{rot} \dot{u} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1.8)$$

Если  $\operatorname{rot} \dot{u} = 0$ , то поле называют безвихревым.

Каждая из трех операций имеет гидродинамическую интерпретацию, которая приводится в соответствующих разделах курса.

### 1.3. Операции второго порядка.

Операции  $\operatorname{grad} \varphi$ ,  $\operatorname{div} \dot{u}$ ,  $\operatorname{rot} \dot{u}$ , переводящие скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор порождают пять операций второго порядка:

- превращение скалярной величины в векторную  
 $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{u})$ ;
- превращение векторной величины в скалярную  
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$ ;  
 $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \dot{u})$ ;
- превращение одной векторной величины в другую  
 $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)$ ;  
 $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \dot{u})$ .

В теории поля показывается, что два из этих пяти соотношений тождественно равны нулю:  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \dot{u}) \equiv 0$  и  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0$ . Операция  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$  носит название оператора Лапласа для скалярного поля и имеет вид

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.9)$$

## 1.4. Интегральные соотношения теории поля.

### 1.4.1. Поток векторного поля.

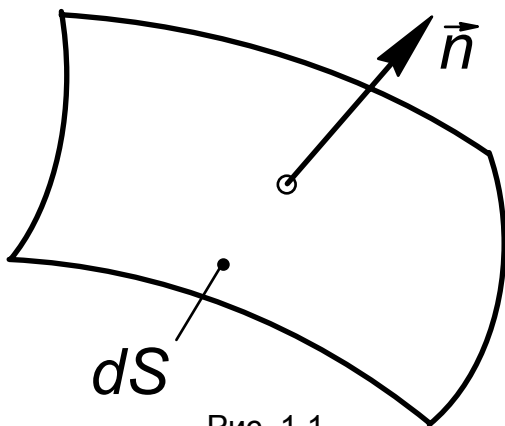


Рис. 1.1

Пусть  $dS$  (рис. 1.1) - элемент поверхности, а  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный по внешней нормали. Поток векторного поля (например,  $\vec{u}$ ) называют поверхностный интеграл вида

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.10)$$

Если рассматривается векторное поле ротора ( $\text{rot } \vec{u}$ ), то поток этого поля представляется как

$$\iint_S (\text{rot } \vec{u}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.11)$$

### 1.4.2. Циркуляция вектора поля.

Пусть рассматривается векторное поле какой-то величины  $\vec{u}$ . Циркуляцией вектора  $\vec{u}$  вдоль контура  $L$  называют криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (1.12)$$

Иногда этот интеграл интерпретируется как «работа» векторного поля вдоль контура  $L$ . Если циркуляция векторного поля вдоль замкнутого пути (контура) равна нулю, то поле называют потенциальным.

### 1.4.3. Формула Стокса.

Эта формула позволяет преобразовать криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую, т.е.

$$\oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\text{rot } \vec{u}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.13)$$

т.е. циркуляция вектора поля вдоль контура равна потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром.

### 1.4.4. Формула Гаусса-Остроградского.

Это соотношение, часто называемое преобразованием Гаусса-Остроградского, связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{u} dV \quad (1.15)$$

Формула показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В механике жидкости широко используется формула, являющаяся следствием формулы Гаусса-Остроградского для скалярного поля

$$\iint_S \varphi \vec{n} dS = \iiint_V \text{grad } \varphi dV \quad (1.16)$$

где  $\varphi$  - какая-то скалярная функция.

## 2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ.

*Сначала это покажется сложным, но сначала все сложно.*

*Мусаши.*

Физические свойства и параметры, характеризующие жидкость, достаточно полно изучаются в курсе физики. Поэтому в настоящем пособии рассматриваются лишь те из них, которые непосредственно связаны с явлениями и процессами, типичными для гидромеханики.

### 2.1. Плотность.

Под средней плотностью, либо, что то же, плотностью физически бесконечно малого объема, понимают частное от деления его массы на объем, т.е.

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (2.1)$$

Плотность выражается в  $\text{кг/м}^3$ .

В литературе часто оперируют понятием удельного веса, т.е. частного от деления веса частицы на ее объем

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{gM}{V} \quad (2.2)$$

Как следует из (2.2), удельный вес выражается в  $\text{Н/м}^3$ . Заменяя в (2.2)  $M/V$  его значением из (2.1), получаем связь между плотностью и удельным весом:

$$\gamma = \rho g \quad (2.3)$$

Таким образом, в международной системе (СИ) плотность воды при  $t = 4^\circ \text{C}$   $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , а ее удельный вес  $\gamma = 9800 \text{ Н/м}^3$ .

### 2.2. Вязкость.

Под вязкостью понимают свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению ее частиц. Физической причиной вязкости является молекулярное взаимодействие. Вследствие различия в молекулярной структуре капельных жидкостей и газов различна и природа их вязкостей. В жидкостях вязкость есть проявление сил сцепления между молекулами, в газах она результат взаимодействия, обусловленный хаотическим движением молекул. Поэтому при повышении температуры в



газах вязкость увеличивается за счет более интенсивного движения молекул. Наоборот, в капельных жидкостях повышение температуры приводит к снижению вязкости, т.к. происходит увеличение среднего расстояния между молекулами.

Равновесное состояние вещества характеризуется распределением его параметров в пространстве. Если за счет какого-либо воздействия окажется, что в каком-то месте пространства возникла неравновесность, то в веществе начинает происходить механический или тепловой обмен, который стремится сгладить неравномерность. В общем случае этот обмен называют процессом переноса. В различных явлениях можно наблюдать процессы переноса энергии, массы (вещества) и количества движения. Как будет показано ниже, вязкость обусловлена процессом переноса количества движения.

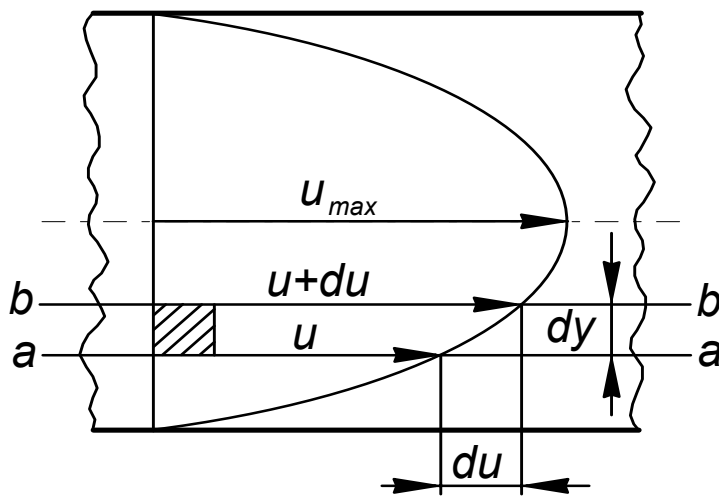


Рис. 2.1

Для уяснения того, как проявляются силы вязкости, рассмотрим течение жидкости в круглой трубе. Будем считать, что векторы скоростей частиц параллельны оси  $x$ . Забегая вперед, отметим, что такое течение существует в природе и носит название ламинарного.

Пользуясь чисто интуитивными представлениями, установим вид распределения скоростей в поперечном сечении потока. Сразу же отметим, что

графическое изображение распределения скоростей в поперечном сечении называют эпюрой скоростей (либо полем скоростей). Очевидно, что скорости частиц, находящихся на стенках трубы, равны нулю и возрастают по мере приближения к оси (на оси  $u = u_{max}$ ) как это показано на рис. 2.1.

Рассмотрим два слоя жидкости ( $a-a$  и  $b-b$ ), расположенные на расстоянии  $dy$ . Пусть слой  $a-a$  движется со скоростью  $u$ , тогда, как следует из эпюры, слой  $b-b$  имеет скорость  $u+du$ . Таким образом, на верхней и нижней гранях прямоугольной жидкой частицы, расположенной между слоями, скорости различны, что в соответствии с законами механики должно привести к ее деформации. Заметим, что такое движение в гидромеханике называют простым сдвигом, либо течением чистого сдвига.

Взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения. При этом знак этой составляющей, т.е. ее направление, таково, что оно соответствует уменьшению разности скоростей по обе стороны рассматриваемого

элемента. Величина силы трения, возникающая между слоями движущейся жидкости, определяется по формуле, предложенной Ньютоном и подтвержденной многочисленными и тщательно поставленными опытами нашего соотечественника профессора Н.П.Петрова. Эта формула имеет вид:

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{du}{dy} S \quad (2.4)$$

где  $S$  - площадь поверхности соприкасающихся слоев;

$\mu$  - динамическая вязкость, зависящая от физической природы жидкости, ее агрегатного состояния и температуры, и практически не зависящая от давления. Динамическая вязкость выражается в Па·с.

В технических приложениях часто используется не динамическая, а кинематическая вязкость, представляющая собой отношение

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5)$$

Кинематическая вязкость выражается в м<sup>2</sup>/с.

Величина  $\frac{du}{dy}$  характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней, либо, если говорить об эпюре - темп изменения скорости. Иногда эту величину называют поперечным градиентом скорости.

Разделим правую и левую части (2.4) на  $S$ . Отношение  $F_{\text{тр}} / S$  есть не что иное, как касательное напряжение  $\tau$ , т.е.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.6)$$

Таким образом, можно сказать, что вязкость жидкости - это способность ее оказывать сопротивление касательным напряжениям.

Из (2.6) можно сделать еще один важный вывод. Если жидкость находится в состоянии покоя, то  $u = 0$  и, следовательно,  $\tau = 0$ , т.е. в покоящейся жидкости силы вязкости не проявляются. Это согласуется и с обычными житейскими представлениями. Действительно, для того, чтобы ответить на вопрос о том, является ли вязкой среда, налитая в сосуд, например, стакан, стоящий на столе, необходимо либо попытаться перелить ее в другой сосуд, либо, обмакнув в нее какой-то предмет, посмотреть как она стекает с него. Смысл этих действий в том, что мы интуитивно чувствуем, что требуется наблюдать движение этой среды.

Выше было высказано предположение, что вязкость обусловлена переносом количества движения. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим формулу Ньютона с позиций физических величин, входящих в нее

$$[\tau] \rightarrow \text{Па} \rightarrow \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

В числителе количество движения, т.е.  $\tau$  это количество движения, переносимое через единицу поверхности в единицу времени.

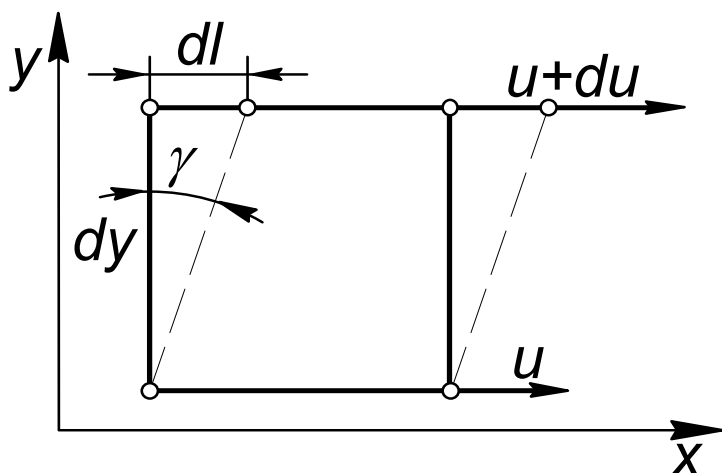


Рис. 2.2

И, наконец, установим физический смысл поперечного градиента скорости, для чего рассмотрим жидкую частицу, показанную на рис. 2.2. Вследствие разности скоростей на верхней и нижней гранях, первоначально прямоугольная частица будет деформироваться и превращаться в параллелограмм.

Отрезок  $dl$  характеризует величину деформации за время  $dt$ ,

т.е.  $dl = du \cdot dt$ , тогда  $\frac{du}{dy} = \frac{dl}{dt \cdot dy}$ , но  $\frac{dl}{dy} = \text{tg } \gamma$ , тогда  $\frac{du}{dy} = \frac{\text{tg } \gamma}{dt}$ .

Следовательно, поперечный градиент скорости представляет собой скорость относительной деформации сдвига. Таким образом, касательное напряжение в жидкости линейно зависит от скорости относительной деформации. В этом принципиальное отличие жидкости от твердого тела, в котором касательные напряжения зависят от величины деформации, а не от ее скорости.

Жидкости, удовлетворяющие (2.6) называются ньютоновскими, а не подчиняющиеся этой формуле — неньютоновскими. К числу последних относятся растворы полимеров и др.

### 2.3. Классификация сил.

Как и в механике твердого тела, в гидромеханике силы классифицируются по разным признакам: внутренние и внешние, сосредоточенные и распределенные.

Очевидно, что в механике жидкости могут рассматриваться лишь распределенные силы, не вызывающие деформации жидкого тела. При этом они должны быть внешними по отношению к объекту. Перевод внутренних сил в категорию внешних производится известным методом (метод сечений, либо метод «замораживания»), суть которого сводится к тому, что в среде выделяется («замораживается») замкнутый объем, внешняя среда мысленно отбрасывается и ее действие заменяется действием распределенных сил. Важнейшей особенностью гидромеханики как науки является то, что в ней, помимо приведенной выше классификации, силы разделяются на массовые и поверхностные.

### 2.3.1. Массовые силы.

Массовыми называют силы, величина которых пропорциональна массе рассматриваемого объема. Важнейшей особенностью является то, что они действуют на все частицы жидкости. В общем случае это силы, подчиняющиеся второму закону Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ . В проекциях на декартовы оси координат можно записать:  $F_x = ma_x$ ;  $F_y = ma_y$ ;

$F_z = ma_z$ . В гидромеханике вместо  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  принято писать  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Поделив обе части записанных выражений на массу, получим  $\frac{F_x}{m} = X$ ;

$$\frac{F_y}{m} = Y; \frac{F_z}{m} = Z.$$

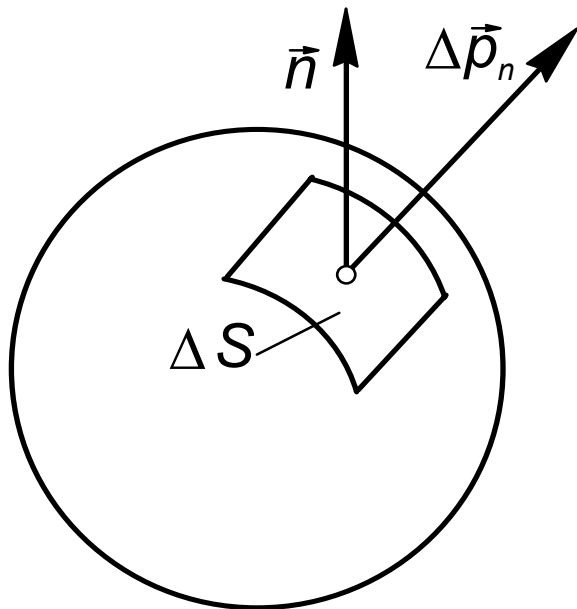
Таким образом,  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  есть проекции единичных массовых сил на соответствующие координатные оси, иногда их называют напряжениями массовых сил. Если в жидкости выделить элементарный объем  $dV$ , то его масса -  $\rho dV$ . В общем случае массовая сила, действующая на этот объем  $\rho \vec{F} dV$ , а главный вектор массовых сил, действующих на весь объем, представляется как

$$\iiint_V \rho \vec{F} dV \quad (2.7)$$

### 2.3.2. Поверхностные силы.

В отличие от массовых, поверхностные силы действуют лишь на частицы, находящиеся на поверхности жидкого объема.

Выделим на поверхности жидкого объема элементарную площадку  $\Delta S$ , ориентация этой площадки в пространстве задается внешней нормалью  $\vec{n}$ . Обозначим через  $\Delta \vec{p}_n$  поверхностную силу, приложенную к площадке  $\Delta S$ . Предел отношения  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta S} = \vec{p}_n$  называют напряжением поверхностной силы.



Таким образом, первое, что необходимо усвоить при рассмотрении этого вопроса - это то, что под действием внешних сил в жидкости возникают напряжения. И второе по порядку, но не менее важное по существу. В общем случае  $\dot{p}_n$  не является обычным вектором. Его величина зависит от ориентации площадки в пространстве. Это означает, что если через данную точку пространства провести одинаковые по величине, но различно ориентированные площадки, то действующие на них напряжения

поверхностных сил будут различны.

Физическая величина, характеризующая в данной точке вектором  $\dot{p}_n$ , принимающим бесконечное множество значений в зависимости от ориентации площадки, называется тензором напряжений.

Таким образом, на площадку  $dS$  действует поверхностная сила  $\dot{p}_n dS$ , а на всю поверхность, ограничивающую объем  $V$

$$\iint_S \dot{p}_n dS \quad (2.8)$$

Проекция  $\dot{p}_n$  на направление нормали называется нормальным напряжением, а проекция на площадку действия - касательным напряжением.

### 2.3.3. Тензор напряжения.

Для уяснения дальнейшего необходимо подробнее рассмотреть вектор  $\dot{p}_n$ .

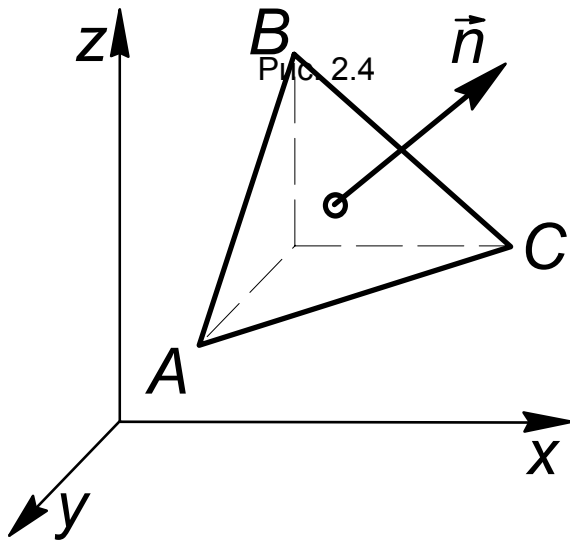
В движущейся среде мысленно выделим частицу в форме жидкого тетраэдра. Пусть  $\dot{n}$  - внешняя нормаль к четвертой (наклонной) грани тетраэдра, а площадь этой грани  $dS$  (см. рис. 2.4).

Площади других граней - соответственно  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$ , т.к. их можно рассматривать как проекции грани  $ABC$  на координатные оси. Следовательно,  $dS_x = dS \cos(\dot{n}, \dot{x}) = n_x dS$ , где  $n_x$  обозначает направляющий косинус. Аналогично,  $dS_y = n_y dS$ ,  $dS_z = n_z dS$ .

Обозначим объем тетраэдра  $dV$ , тогда действующая на него массовая сила  $\rho \dot{F} dV$ , а массовая сила инерции  $\rho \dot{a} dV$ , где  $\dot{a}$  вектор ускорения жидкого тетраэдра. Поверхностная сила, действующая на наклонную грань -  $\dot{p}_n dS$ . Для трех других граней можем записать:

$$-\dot{p}_x dS_x = -\dot{p}_x n_x dS$$

$$-\dot{p}_y dS_y = -\dot{p}_y n_y dS$$



$$-\dot{p}_z dS_z = -\dot{p}_z n_z dS$$

Знаки минус, т.к. векторы  $\dot{p}_x$ ,  $\dot{p}_y$  и  $\dot{p}_z$  направлены в стороны, противоположные координатным осям.

Запишем уравнение движения тетраэдра, которое в соответствии с общими законами механики должно иметь вид:

Масса · ускорение = (резльтирующая массовых сил) +  
+ (резльтирующая поверхностных сил).

Имеем:

$$\rho \dot{a} dV = \rho \dot{F} dV + \dot{p}_n dS - \dot{p}_x n_x dS - \dot{p}_y n_y dS - \dot{p}_z n_z dS$$

Слагаемые  $\rho \dot{a} dV$  и  $\rho \dot{F} dV$  есть величины третьего порядка малости, а остальные - второго, поэтому ими можно пренебречь, что дает

$$\dot{p}_n = n_x \dot{p}_x + n_y \dot{p}_y + n_z \dot{p}_z \quad (2.9)$$

Из этого равенства следует, что напряжение  $\dot{p}_n$  при произвольной ориентации нормали  $\dot{n}$  может быть определено, если известны

напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Проекции векторов  $\dot{p}_x$ ,  $\dot{p}_y$  и  $\dot{p}_z$  на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначаются:

$$\begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix}$$

Первый подстрочный индекс указывает ось, перпендикулярную

ориентации площадки, второй ось, на которую спроектировано напряжение.

Для уяснения ориентации рассмотрим параллелепипед, выделенный в движущейся жидкости и показанный на рис. 2.5. Из рисунка, в частности, видно, что напряжения с одинаковыми индексами являются нормальными, а с разными - касательными. В проекциях на декартовы оси координат выражение (2.9) может быть записано как

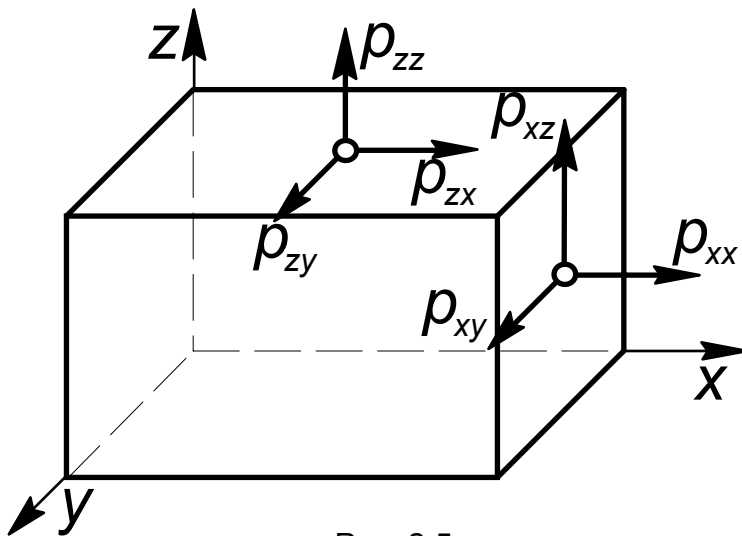


Рис. 2.5

$$\begin{aligned}
\rho_{nx} &= n_x \rho_{xx} + n_y \rho_{yx} + n_z \rho_{zx} \\
\rho_{ny} &= n_x \rho_{xy} + n_y \rho_{yy} + n_z \rho_{zy} \\
\rho_{nz} &= n_x \rho_{xz} + n_y \rho_{yz} + n_z \rho_{zz}
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

Совокупность этих девяти составляющих компонентов напряжения образует тензор напряжения. В матричной форме он записывается в следующем виде:

$$\Pi = \begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{yx} & \rho_{zx} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{zy} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{vmatrix}$$

В тензорном анализе доказывается, что тензор напряжений является симметричным. Это означает, что величины, расположенные симметрично главной диагонали, равны ( $\rho_{yx} = \rho_{xy}$ ;  $\rho_{xz} = \rho_{zx}$ ;  $\rho_{zy} = \rho_{yz}$ ). Следовательно, для определения тензора напряжений достаточно знать не девять, а шесть скалярных величин.

Следует учесть одно обстоятельство. Векторы напряжений  $\dot{\rho}_x$ ,  $\dot{\rho}_y$ ,  $\dot{\rho}_z$  в соотношении (2.9), носящем имя Коши, и приложенные к координатным площадкам, не имеют объективного физического смысла, т.к. зависят от выбора системы координат. Поэтому такие величины причисляются к так называемым «квазивекторам», хотя к ним и можно применять все операции, применимые к физическим векторам.

К понятию тензора можно подойти и другим путем, который, возможно, покажется более простым. Поэтому целесообразно хотя бы кратко остановиться на нем. Для наглядности тензор можно представить как какой-то оператор, с помощью которого можно преобразовывать векторы в векторы. Упрощая и сводя математический аппарат к механическому, оператор можно представить как какую-то «машину», которая по определенным правилам перерабатывает вводимые в нее векторы. Зная принцип работы этой «машины», можем знать и вектор, который появляется на выходе. Можно записать

$$\dot{a} = \dot{A} \cdot \dot{B}$$

где  $\dot{a}$  - входной вектор;

$\dot{B}$  - выходной вектор;

$\dot{A}$  - оператор, который и называют тензором.

Существенное ограничение заключается в том, что оператор должен быть линейным. Определить тензор - это значит задать правила, по которым работает оператор. Для интересующихся таким подходом можно рекомендовать книгу Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. - М.: Мир, 1978.-307с.

И в заключение еще несколько замечаний. Выше уже отмечалось, что одно из фундаментальных свойств жидкости ее вязкость не проявляется, если она находится в состоянии равновесия, т.е. в этом случае касательные компоненты тензора равны нулю и действуют лишь

нормальные  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ , ориентированные по внешним нормальям (см. рис. 2.5). При этом ясно, что они являются растягивающими напряжениями. Как показывает опыт, в отличие от твердого тела, которое может воспринимать как растягивающие (положительные нормальные напряжения), так и сжимающие (отрицательные нормальные напряжения) напряжения без разрыва сплошности, жидкое тело способно воспринимать лишь сжимающие усилия. Можно показать, что при отсутствии касательных напряжений  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$ , из чего следует, что нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки. Величины, численно равные нормальным напряжениям, но взятые с противоположным знаком, в гидромеханике называют давлениями, либо более полно гидростатическими давлениями. Гидростатическое давление обозначают буквой  $p$ , т.е.

$$p = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}$$

Таким образом, гидростатическое давление, являясь скалярной величиной (как компонента тензора) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

Теоретическое изучение движения жидкости связано с так называемой моделью идеальной жидкости. В этой модели жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемая среда, неспособная сопротивляться разрывающим усилиям и обладающая абсолютной подвижностью, т.е. лишенная вязкости. Последнее исключает возникновение в ней касательных напряжений.

#### 2.3.4. Уравнение движения в напряжениях.

Получим наиболее общее уравнение, связывающее поверхностные и массовые силы так называемое уравнение движения в напряжениях. Для вывода уравнения проанализируем движение жидкой частицы, масса которой  $\rho dV$  и поверхность  $dS$ . Аналогично тому, как это было сделано для тетраэдра, можем записать уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\dot{u}}{dt} dV = \rho \overset{r}{F} dV + \overset{r}{p}_n dS \quad (2.11)$$

Для всего движущегося объема ( $V$ ), поверхность которого  $S$ , имеем

$$\iiint_V \rho \frac{d\dot{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \overset{r}{F} dV + \iint_S \overset{r}{p}_n dS \quad (2.12)$$

Преобразуем поверхностный интеграл в правой части в объемный с учетом того, что, как было показано, тензор напряжений имеет вид

$$\overset{r}{p}_n = n_x \overset{r}{p}_x + n_y \overset{r}{p}_y + n_z \overset{r}{p}_z$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  - направляющие косинусы.

Воспользуемся известными из векторного анализа и справедливыми для любых векторов формулами:



$$\iint_S n_x \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV \quad \iint_S n_y \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV; \quad (2.13)$$

$$\iint_S n_z \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV$$

Применяя эти формулы к тензору  $\vec{p}_n$ , получаем:

$$\iint_S \vec{p}_n dS = \iiint_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \quad (2.14)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем:

$$\iiint_V \left[ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0$$

Но так как  $dV \neq 0$ , а объем  $V$  выбран произвольно, то

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \quad (2.15)$$

Это и есть уравнение движения в напряжениях.

В проекциях на декартовы оси координат можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Эта система включает в качестве неизвестных девять величин: три проекции скорости и шесть проекций напряжений. Проекции единичных массовых сил, как правило, известны из постановки задачи.

### 3. ГИДРОСТАТИКА.

*Идите, идите вперед, уверенность  
придет к вам позже.*

*Д'Аламбер.*

Гидростатика занимается изучением жидкости, находящейся в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем понимают состояние, при котором отсутствуют перемещения частиц относительно друг друга.

В основу гидростатики положены две теоремы: равенство нулю суммы всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу жидкости и,

как следствие, равенство нулю суммы моментов этих сил относительно какой-то оси. Однако, несмотря на простоту принципов, гидростатика приводит к важным результатам и выводам.

### 3.1. Уравнение равновесия жидкости.

Уравнения равновесия жидкости могут быть получены из уравнений движения в напряжениях (2.16), если положить в них  $u_x = u_y = u_z = 0$ . Кроме того, как было показано, в покоящейся жидкости касательные напряжения не проявляются, т.е. все производные по  $t$  равны нулю. И, наконец, нормальные напряжения заменяем давлением, что дает

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В векторной форме эта система может быть записана в форме

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) носят название системы дифференциальных уравнений Эйлера для гидростатики. Эта система уравнений показывает, что существует непосредственная связь между величиной гидростатического давления в точке и ее координатами. Эта связь может быть раскрыта, если проинтегрировать (3.1).

На жидкое тело могут действовать силы, имеющие различную физическую природу. Поэтому правомерна такая постановка вопроса: всегда ли под действием приложенных сил жидкость может находиться в состоянии равновесия? Для ответа на этот вопрос необходимо выполнить некоторые преобразования системы дифференциальных уравнений (3.1).

### 3.2. Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.

Умножим каждое из уравнений, входящих в (3.1) на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  соответственно и просуммируем их, что даст

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0 \quad (3.3)$$

Выражение, стоящее в скобках во втором члене уравнения, есть не что иное, как полный дифференциал давления -  $dp$ , поэтому можем записать

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (3.4)$$

Это уравнение называют основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме. В левой части его - полный дифференциал,

поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Следовательно, силы и плотность должны быть такими функциями  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , чтобы они обращали правую часть (3.4) в полный дифференциал. Если этого не происходит, то равновесие жидкости невозможно. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть (3.4) является полным дифференциалом какой-то функции  $\Phi$ .

Считая плотность постоянной ( $\rho = \text{const}$ ), можем записать

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \quad (3.5)$$

Из теоретической механики известно, что скалярное произведение силы на элементарное перемещение частицы называют элементарной работой, т.е.

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (3.6)$$

Силы, работа которых не зависит от пути движения, а только от начального и конечного положений, называют потенциальными. При этом для того, чтобы работа силы не зависела от пути движения, необходимо и достаточно, чтобы выражение для элементарной работы, т.е. (3.6), было полным дифференциалом некоторой скалярной функции  $P$ , называемой силовой. Взятая с противоположным знаком, она называется потенциалом. Таким образом, рассмотренную выше функцию можно назвать силовой функцией, а (3.4) представить как

$$dp = \rho d\Phi \quad (3.7)$$

Из чего следует, что несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием сил, имеющих потенциал.

### 3.3. Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления.

Поверхности, в каждой точке которых  $\Phi = \text{const}$ , называют эквипотенциальными. Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т.е. поверхность, в каждой точке которой  $p = \text{const}$ . В этом случае  $dp = 0$  и (3.4) принимает вид

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

Но плотность  $\rho \neq 0$ , и, следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) называют уравнением поверхности равного давления. Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то  $X = Y = 0$ ;  $Z = -g$  (знак минус, т.к. сила тяжести ориентирована в сторону, противоположную оси  $z$ );  $-gdz = 0$  и  $z = \text{const}$ , т.е. в покоей жидкости любая горизонтальная плоскость есть поверхность равного давления.

### 3.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Закон Паскаля. Гидростатический закон распределения давления.

Проинтегрируем основное уравнение гидростатики (3.4) в предположении, что  $\rho = \text{const}$  (жидкость несжимаема) и считая, что из массовых сил действует только сила тяжести. Как показано выше, в этом случае  $X = Y = 0$ ,  $Z = -g$ , т.е.  $dp = -\rho g dz$ , и после интегрирования

$$p = -\rho g z + C \quad (3.9)$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Для ее нахождения используем следующее граничное условие (см. рис. 3.1): при  $z = z_0$   $p = p_0$ . Из (3.9) следует, что

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

И после подстановки

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) \quad (3.10)$$

Как видно из рис. 3.1, разность  $(z_0 - z)$  - глубина погружения рассматриваемой частицы, которую будем обозначать буквой  $h$ , т.е.

$$p = p_0 + \rho g h$$

Полученное уравнение выражает известный из курса физики закон Паскаля: давление, приложенное к свободной поверхности, передается во все точки без изменения.

Поскольку любое правильное физическое уравнение должно быть размерностно однородным, то ясно, что член  $\rho g h$  должен выражаться в единицах давления, т.е. в паскалях (Па - Н/м<sup>2</sup>). Эту величину называют избыточным давлением. Она может быть как положительной, так и отрицательной. Такая трактовка приводит нас к понятию абсолютного давления, которое в соответствии с (3.11) может быть представлено как сумма барометрического (атмосферного) давления и избыточного, т.е.

$$p_{\text{абс.}} = p_{\text{ат.}} \pm p_{\text{изб.}} \quad (3.12)$$

Отрицательное избыточное давление называют вакуумом.

Вернемся вновь к уравнению (3.10). После деления обеих его частей на  $\rho g$  получаем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \quad (3.13)$$

В таком виде все его члены выражаются в единицах длины и носят название напоров. Величина  $z$  характеризует положение жидкой частицы над произвольно выбираемой горизонтальной плоскостью отсчета, т.е.  $z$  -

это геометрический напор;  $\frac{p}{\rho g}$  - пьезометрический напор. Сумму этих

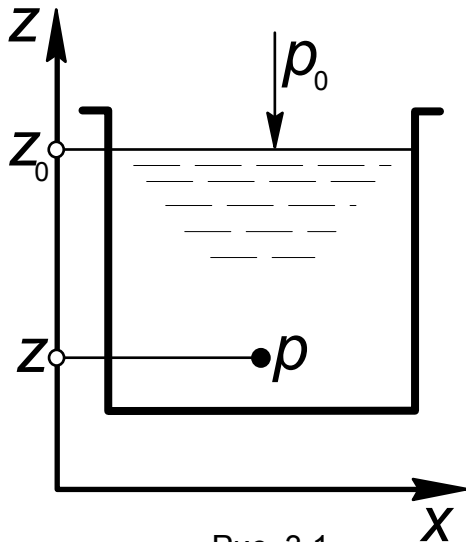


Рис. 3.1

величин  $z + \frac{p}{\rho g}$  называют гидростатическим напором. Чтобы уяснить физический смысл этих величин, рассмотрим простую схему, показанную на рис. 3.2.

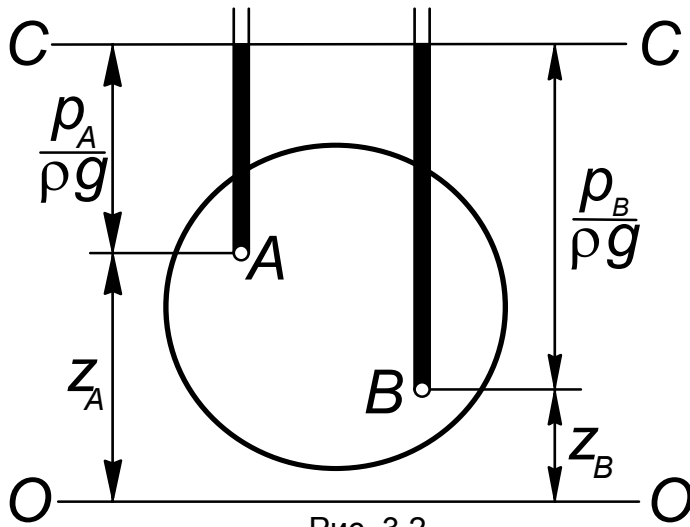


Рис. 3.2

Представим герметично закрытый сосуд, заполненный жидкостью, находящейся под давлением. Выберем в этом сосуде две произвольно расположенные точки  $A$  и  $B$  и, опять-таки произвольно, горизонтальную плоскость  $O-O$ , которую назовем плоскостью отсчета.

Координаты частиц, расположенных в точках  $A$  и  $B$  будут  $z_A$  и  $z_B$ . В соответствии со сказанным выше, величины  $z_A$  и

$z_B$  выражают геометрический напор. Введем теперь через крышку сосуда в точки  $A$  и  $B$  сообщенные с атмосферой стеклянные трубки. Эти трубки называют пьезометрами. Поскольку по условию жидкость находится под давлением, то она начнет подниматься по пьезометрам. Не представляет труда и ответ на вопрос о том, когда прекратится подъем. Очевидно, что это произойдет в тот момент, когда высота столба жидкости уравнивает давление в рассматриваемой точке. Это и есть пьезометрическая высота, либо пьезометрический напор.

Соотношение (3.13) справедливо для любых произвольно выбранных частиц покоящейся жидкости, поэтому в общем виде его можно записать как  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$ , т.е. для любых точек жидкости

гидростатический напор одинаков. Следовательно, уровни в пьезометрах установятся на одной и той же высоте (плоскость  $C-C$  на рис. 3.2). Уравнение (3.13) выражает так называемый гидростатический закон распределения давления.

### 3.5. Определение силы давления жидкости на поверхности тел.

Задача сводится к нахождению силы давления жидкости на поверхности стенок, ограничивающих ее.

Рассмотрим криволинейную поверхность  $AB$  произвольной формы, площадь которой  $S$  (рис. 3.3). Выделим на ней элементарную площадку  $dS$ , пусть  $\vec{n}$  - орт внешней нормали. Сила, действующая на эту площадку

$$d\vec{F} = p \vec{n} dS$$

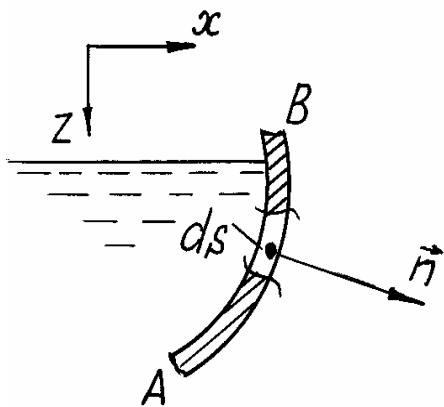


Рис. 3.3

где  $p$  - гидростатическое давление в центре площадки. Обычно в технических приложениях интерес представляет лишь сила, возникающая от избыточного давления. Имея в виду, что  $p = \rho gh$ , получаем

$$d\vec{F} = \rho gh \vec{n} dS \quad (3.14)$$

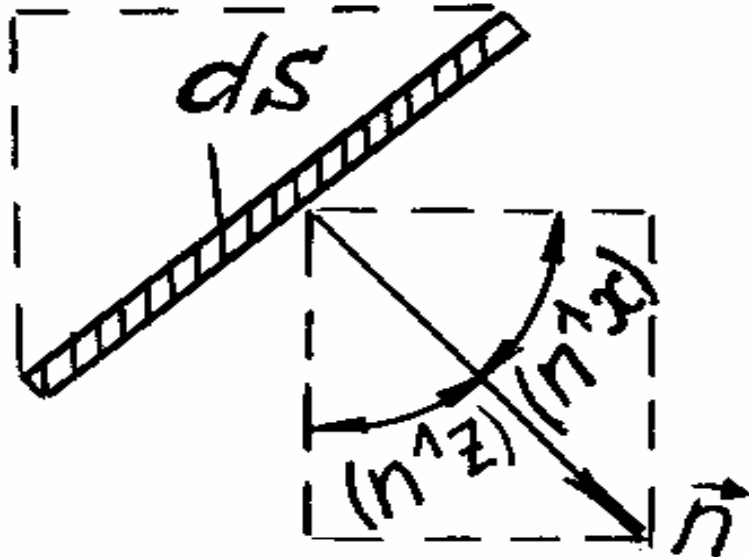
На всю площадь действует сила

$$\vec{F} = \iint_S \rho gh \vec{n} dS \quad (3.15)$$

Запишем это выражение в проекциях на оси координат, что дает

$$F_x = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{x}) dS \quad (3.16)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{z}) dS \quad (3.17)$$



Для удобства изобразим отдельно элементарную площадку (см. рис. 3.4). Из рисунка следует, что

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}) = dS_v$$

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}) = dS_h$$

где  $dS_v$  - вертикальная, и  $dS_h$  - горизонтальная проекции  $dS$ . Таким образом

$$F_x = \rho g \iint_S h \cdot dS_v \quad (3.18)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cdot dS_h \quad (3.19)$$

Рис. 3.4

Рассмотрим горизонтальную составляющую.

Из механики известно, что интеграл (3.18) есть статический момент площади, равный произведению  $h_{ц.м.} S_в$ , где  $h_{ц.м.}$  - координата центра тяжести вертикальной проекции.

Следовательно,

$$F_x = \rho g h_{ц.м.} S_в \quad (3.20)$$

т.е. горизонтальная составляющая равна произведению вертикальной проекции стенки на гидростатическое давление в центре тяжести этой проекции.

Определим теперь вертикальную составляющую силы, для чего воспользуемся следствием из формулы Гаусса-Остроградского (см. ф-лу 1.16)

$$\iint_S p \vec{n} dS = \iiint_V \text{grad } p dV$$

Из уравнения равновесия (3.2) имеем  $\rho \vec{F} = \text{grad } p$ , т.е.

$$\iiint_V \text{grad } p dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV$$

Вертикальная проекция единичной массовой силы  $\vec{F} = Z = g$  (знак плюс, т.к. в данном случае ось  $Z$  ориентирована вниз).

Следовательно,

$$F_z = \iiint_V \rho g dV = \rho g \iiint_V dV = \rho g V \quad (3.21)$$

$V$  носит название объема тела давления. Таким образом, вертикальная составляющая равна весу жидкости, заключенному в объеме

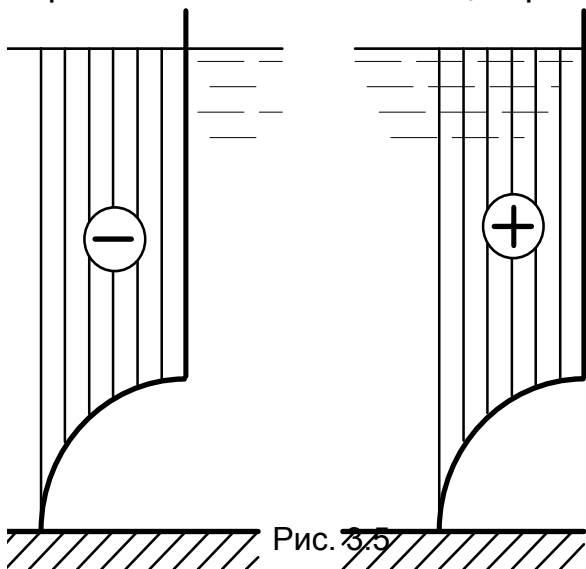


Рис. 3.5

тела давления. Для нахождения этого объема следует использовать формальное правило: тело давления - это объем, образованный криволинейной стенкой, ее проекцией на свободную поверхность (либо на продолжение свободной поверхности) и вертикальными проектирующими плоскостями. На рис. 3.5 показаны примеры определения тел давлений для двух случаев.

Как следует из рисунка, тело давления может быть как положительным, так и отрицательным (фиктивным).

### 3.5.1. Плоская поверхность.

Этот случай можно рассматривать как частный предыдущего, но можно получить и более удобное соотношение. Действительно, общее выражение для силы давления имеет вид (3.15), но так как поверхность

плоская, то ориентация нормали для всех ее точек остается одинаковой, и, следовательно,

$$\dot{F} = \rho g h_{ц.м.} S \quad (3.22)$$

Из формулы (3.22) следует, что  $\dot{F}$  направлена по нормали к стенке, поэтому можно записать

$$F = \rho g h_{ц.м.} S \quad (3.23)$$

Следовательно, сила давления на плоскую поверхность равна произведению ее площади на гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности. Следует отметить, что задачи, связанные с определением сил давления на поверхности, играют исключительно важную роль в гидротехнической практике. Применительно к энергетике и машиностроению круг этих задач заметно сужается и ограничивается, главным образом, расчетом болтовых соединений люков различных резервуаров, находящихся под давлением.



## 4. КИНЕМАТИКА.

*Приобретение любого познания всегда полезно для ума, ибо он сможет впоследствии отвергнуть бесполезное и сохранить хорошее. Ведь ни одну вещь нельзя ни любить, ни ненавидеть, если сначала ее не познать.*

*Леонардо да Винчи.*

Кинематика занимается изучением движения жидкости, не интересуясь причинами, которые его вызвали. По образному выражению Н.Е.Жуковского, кинематика изучает «геометрию движения». Принципиально можно пойти двумя путями. По первому из них изучается движение каждой отдельной жидкой частицы. Чтобы выделить ее, в начальный момент времени  $t_0$  отмечают ее координаты  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$ . Движение считается определенным, если в каждый момент времени для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т.е. известны параметрические уравнения траекторий всех частиц. Этот путь предложен Лагранжем. По методу Эйлера изучается изменение скорости и других параметров в точках пространства  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

В настоящем пособии используется главным образом метод Эйлера. Для желающих глубже разобраться в этом вопросе можно рекомендовать книгу: Федяевский К.К., Войткунский, Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. - М.: Судостроение, 1968. - 567 с.

### 4.1. Установившееся и неуставившееся движения жидкости.

Установившемся (стационарным) называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени, т.е.

$$\dot{u} = f(x, y, z); \quad p = f(x, y, z); \quad \rho = f(x, y, z) \quad (4.1)$$

Если это условие не соблюдается и параметры в точке меняются с течением времени

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(x, y, z, t); \\ p &= f(x, y, z, t); \\ \rho &= f(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

движение называют неуставившимся (нестационарным).

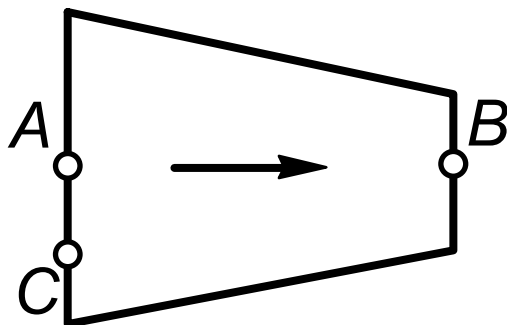


Рис. 4.1

В этих формулировках следует обратить внимание на то, что речь идет о параметрах в точке. Чтобы уяснить это, рассмотрим канал, показанный на рис. 4.1. В гидромеханике такие каналы, в которых площадь сечения уменьшается по ходу потока, называют конфузорами. Исходя из чисто интуитивных представлений ясно, что

скорость течения по ходу канала будет возрастать. Возникает вопрос, может ли быть установившееся движение в таком канале. Очевидно, может, если параметры в точках  $A$  и  $B$  не будут изменяться с течением времени. Определение вида движения не требует, чтобы параметры в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  были одинаковы.

#### 4.2. Уравнение неразрывности (сплошности).

Уравнение неразрывности либо сплошности выражает один из фундаментальных законов природы - закон сохранения массы применительно к жидкой среде.

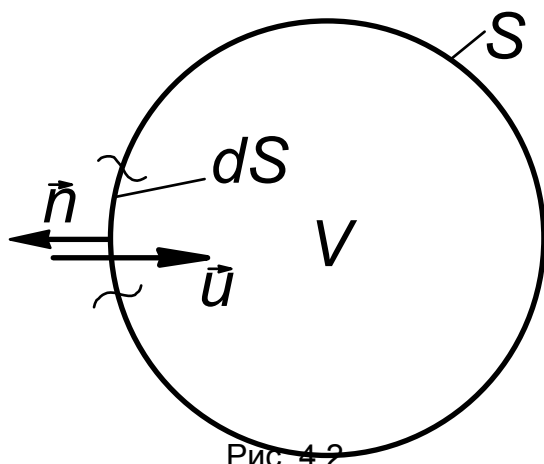


Рис. 4.2

Рассмотрим объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 4.2). Выделим элемент поверхности  $dS$ . Пусть  $\vec{n}$  - орт внешней нормали, а  $\vec{u}$  - вектор скорости. Через выделенный элемент  $dS$  в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости

$$-\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS.$$

(знак минус, т.к. направления  $\vec{u}$  и  $\vec{n}$  противоположны). Секундная масса, проникающая в объем через всю поверхность,

$$-\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS.$$

С другой стороны, приток жидкости в объем приводит к изменению ее массы. При этом, поскольку выделенный объем является постоянным, то изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Скорость изменения массы можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV,$$

либо с учетом того, что  $V = \text{const}$ , можно записать

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т.е.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Применяя преобразование Гаусса-Остроградского, получим:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iiint_V \text{div}(\rho \vec{u}) dV, \text{ либо}$$

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0.$$

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (4.3)$$

Это и есть уравнение неразрывности. Поскольку при выводе его не делалось никаких ограничений, то оно справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение (4.3) относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.4)$$

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то

$$\operatorname{div} \dot{u} = 0 \quad (4.5)$$

Либо в проекциях на декартовы оси координат (см. формулу 1.7)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

Установим физический смысл этого соотношения. Частные производные  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  характеризуют скорость относительного удлинения (укорочения) жидкой частицы. Если этот процесс происходит одновременно вдоль всех координатных осей, то он приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Ясно, что если частица удлиняется вдоль осей  $X$  и  $Y$ , то она должна укорачиваться относительно оси  $Z$ . Другими словами, хотя бы одна из производных, входящих в (4.6), должна быть отрицательна, т.к. в противном случае соотношение не может быть равным нулю.

Как уже отмечалось в 1.1, поле, в котором  $\operatorname{div} \dot{u} = 0$ , носит название соленоидального.

### 4.3. Линии тока и траектории.

Линией тока называется кривая, обладающая тем свойством, что в данный момент времени векторы скоростей в любой ее точке совпадают по направлению с касательными.

В векторной форме это условие может быть записано как  $\dot{u} \times d\vec{S} = 0$ , т.е. векторное произведение должно быть равно нулю. Это, как известно (см. формулу 1.4), может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \dot{e}_x & \dot{e}_y & \dot{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение линии тока в виде

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (4.8)$$

Под траекторией понимается след, оставленный движущейся частицей в пространстве. Дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt \quad (4.9)$$

Из сопоставления (4.8) и (4.9) следует, что в общем случае, т.е. при неустановившемся движении, линии тока и траектории не совпадают.

#### 4.4. Трубка тока (поверхность тока)

В движущейся жидкости наметим бесконечно малый замкнутый контур, и через все точки его периметра проведем линии тока (рис. 4.3).

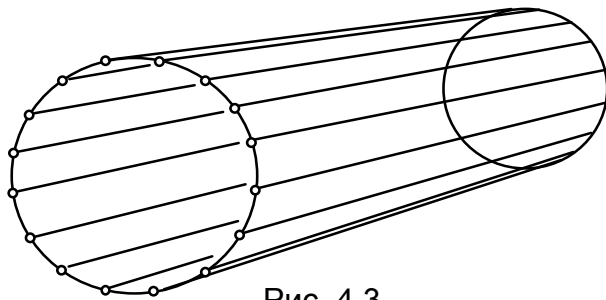


Рис. 4.3

Образованная таким образом поверхность носит название трубки либо поверхности тока. Ясно также, что поскольку контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, то какая-то часть ее должна находиться и внутри поверхности тока.

#### 4.5. Струйная модель потока.

Струйная модель потока введена в рассмотрение Л.Эйлером. Основу этой модели составляет понятие о струйке (либо элементарной струйке), под которой понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока. Если вспомнить, что границами боковой поверхности трубки тока являются линии тока, т.е. линии, к которым касателен вектор скорости частиц, которые в данный момент времени находятся в ней, то ясно, что ни одна частица не может проникнуть извне в струйку, либо, наоборот, выйти из нее через боковую поверхность. Действительно, вектор скорости частицы, пытающейся, например, проникнуть в струйку извне, должен быть ориентирован к ее границе под каким-то углом, а на самой границе - линии тока - касателен (рис. 4.4).

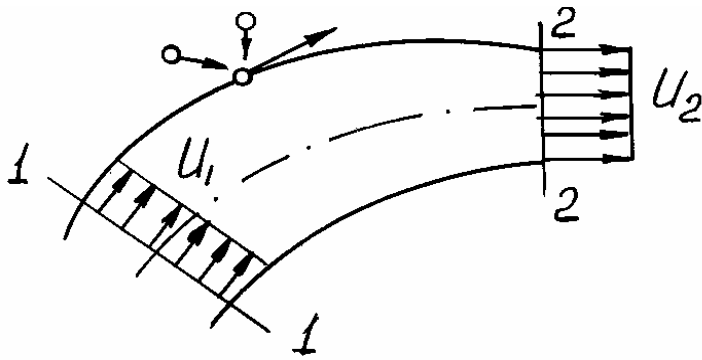


Рис. 4.4

Из сказанного следует, что струйка ведет себя как трубка с непроницаемыми стенками.

Поперечное сечение струйки мало, поэтому можно допустить, что в пределах сечения все частицы движутся с одинаковыми скоростями либо, что то же, эпюра скоростей в сечении представляет собой

цилиндр для трехмерной струйки либо прямоугольник - для плоской (двумерной).

На рис. 4.4 показаны эпюры для двух произвольно выбранных сечений плоской струйки. Заметим лишь, что равномерность распределения скоростей в сечении, т.е. движение всех частиц, находящихся в нем, с одной и той же скоростью, вовсе не означает, что в другом сечении эти скорости должны быть такими же, т.е., не обязательно, чтобы  $u_1 = u_2$  (см. рис. 4.4).

Совокупность струек, заполняющих поперечное сечение канала конечных размеров, образует поток. Если представить, что соломинка для коктейля - это струйка, то пучок таких соломинок - поток.

#### 4.6. Уравнение неразрывности для струйки.

Первое свойство струйки, говорящее о том, что боковая поверхность непроницаема для частиц, по существу выражает закон сохранения секундной массы. Действительно, если через сечение 1-1 в единицу времени вошла масса  $dm_1$ , то за то же время через сечение 2-2 должна выйти масса  $dm_2$ , равная  $dm_1$ . Массу жидкости, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени называют элементарным массовым расходом и обозначают  $dQ_m$ .

Легко убедиться в том, что  $dQ_m = \rho u dA$ , где  $dA$  - площадь поперечного сечения струйки. Действительно, выражая параметры, входящие в это соотношение через единицы физических величин, получаем

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \frac{\text{м}}{\text{с}} \text{м}^2 \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

Из сказанного выше следует, что

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 \quad (4.10)$$

Это и есть уравнение неразрывности для струйки. Если жидкость несжимаема, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то  $\rho_1 = \rho_2$  и

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 \quad (4.11)$$

При этом произведение  $u dA$  выражает элементарный объемный расход -  $dQ$ .

## 4.7. Ускорение жидкой частицы.

Запишем выражение для проекции ускорения жидкой частицы на какую-либо координатную ось, например,  $x$ . Имеем

$$a_x = \frac{du_x}{dt}$$

Для нахождения этой величины следует учесть, что проекция скорости  $u_x$  (как и две другие проекции) является функцией координат  $x, y, z$ , которые, в свою очередь, в общем случае зависят от времени  $t$ . Представим величину  $du_x$  в виде полного дифференциала

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Разделим обе части на  $dt$ . Имея в виду, что  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = u_y$  и  $\frac{dz}{dt} = u_z$ , получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (4.12)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других компонент.

Выражение (4.12) носит название полной либо субстанциональной производной. Установим смысл величин, входящих в нее. Производная  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$  - проекция локального ускорения, которое характеризует изменение

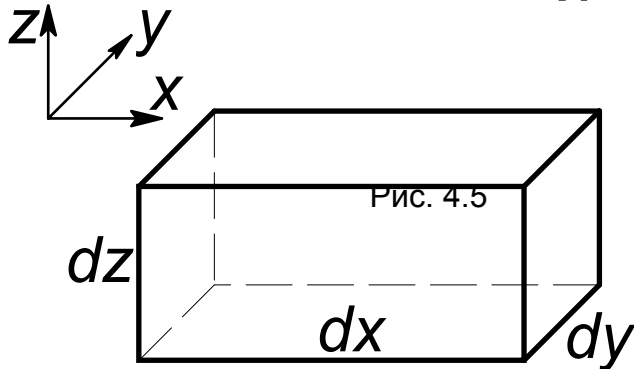
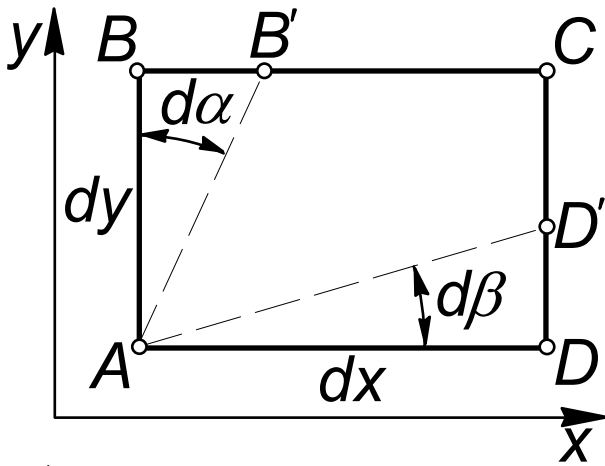
скорости во времени в данной точке пространства. Локальное ускорение обусловлено нестационарностью процесса. Из чего следует, что если движение стационарное (установившееся), то локальное ускорение

отсутствует, т.е.  $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$ . Три остальных члена (4.12) - проекции

конвективного ускорения, которое возникает при переходе частицы от одной точки пространства к другой, оно обусловлено неравномерностью скоростного поля, т.е. неравномерным распределением скоростей.

## 4.8. Анализ движения жидкой частицы.

Движение жидкой частицы является более сложным, чем движение твердого тела, которое, как известно из механики, может быть поступательным и вращательным. Особенностью жидкости и ее частиц, как уже неоднократно отмечалось, является легкая деформируемость. Поэтому помимо поступательного и вращательного, жидкая частица может участвовать и в деформационном движении. Это положение и составляет суть так называемой первой теоремы Гельмгольца, к рассмотрению которой мы и приступаем. Оценивая значение работы Г. Гельмгольца, основоположник отечественной аэродинамики Н.Е. Жуковский писал, что «современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу». Важнейшим достоинством приводимых ниже выкладок и



рассуждений является то, что они раскрывают физический смысл и вносят ясность в ряд казалось бы совершенно абстрактных понятий. Выкладки эти достаточно просты, но требуют внимания. Поэтому нужно запастись определенной долей терпения и помнить, что достигаемое понимание сути явлений безусловно оправдывает эти затраты труда.

Рассмотрим жидкую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.5). Длина его ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Деформация такой жидкой частицы может быть как линейной (ребра удлиняются и укорачиваются), так и угловой (грани скашиваются). Удобней рассмотреть каждый из этих видов отдельно. Начнем с

угловых деформаций.

#### 4.8.1. Угловые деформации.

Из рис. 4.5 следует, что угловая деформация (скашивание) может возникнуть из-за разности скоростей, перпендикулярных ребрам (частично этот вопрос уже обсуждался в разделе 2.2). Для упрощения целесообразно ограничиться лишь одной гранью, показанной на рис. 4.6.

Пусть компоненты скорости в точке  $A$  равны  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Найдем скорости в точке  $B$ , считая, что движение установившееся и, следовательно, все производные по  $t$  равны нулю. Приращение компоненты скорости при переходе из одной точки пространства в другую можно представить как  $u+du$ . Так для проекции  $u_x$  можем записать  $u_x + du_x$ , где

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (4.13)$$

Аналогичные выражения можно записать и для других проекций.

Рис. 4.6

Рассмотрим приращение  $u_x$  при переходе от точки  $A$  к точке  $B$ . В

этом случае  $dx = dz = 0$ , т.е.

$$u_{x(B)} = u_{x(A)} + du_x = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

Предположим, что за время  $dt$  за счет разности скоростей в точках  $A$  и  $B$  ребро займет положение  $AB'$ .

Аналогично рассуждая относительно скорости  $u_y$  в точках  $A$  и  $D$  получим:

Точка  $A$ :  $u_y$  (по условию)

Точка  $D$ :  $u_{y(D)} = u_{y(A)} + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$

За счет разности этих скоростей точка  $D$  займет позицию  $D'$ . Таким образом

$$u_{x(B)} - u_{x(A)} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

$$u_{y(D)} - u_{y(A)} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$$

Путь, проходимый точкой  $B$  за время  $dt$  в положение  $B'$ , определяет величину скашивания, которую можно найти как

$$BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$$

Угловая деформация характеризуется тангенсом угла  $d\alpha$ . При этом

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt \approx d\alpha$$

(имея в виду, что  $AB = dy$ ).

Вследствие малости угла  $d\alpha$  можно считать, что  $\operatorname{tg}(d\alpha) \approx d\alpha$ .

Аналогично,

$$\operatorname{tg}(d\beta) = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt \approx d\beta$$

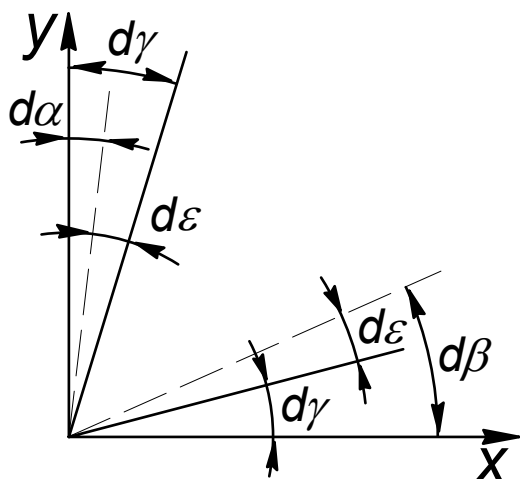
Полное скашивание первоначально прямого угла  $A$  определяется как сумма

$$d\alpha + d\beta = \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt \quad (4.14)$$



Рис. 4.7

Здесь следует обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство: рассматриваемое перемещение ребер вызвано не только деформацией, но и вращением частицы. Действительно, если бы грань только деформировалась без вращения, то ребра повернулись бы на одинаковый угол навстречу друг другу. Наоборот, если бы происходило только вращение, то ребра поворачивались бы на одинаковый угол в направлении вращения. Следовательно, в общем случае движение элемента можно рассматривать как сумму деформационного и вращательного движений, и таким образом



определить  $d\alpha$  и  $d\beta$ . Рассмотрим деформацию прямого угла  $A$ , считая, что вращение происходит против часовой стрелки. Чисто деформационное движение будем характеризовать углами  $d\gamma$ , а чисто вращательное -  $d\varepsilon$ .

Из рис. 4.7 следует, что

$$d\alpha = d\gamma - d\varepsilon$$

$$d\beta = d\gamma + d\varepsilon$$

либо  $d\alpha + d\beta = 2d\gamma$ ,

откуда

$$d\gamma = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) \quad (4.15)$$

Вычитая, получим

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}(d\beta - d\alpha) \quad (4.16)$$

Таким образом, деформация характеризуется полусуммой углов, а вращение - полуразностью. Имея в виду (4.14), можем записать:

$$d\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt \quad (4.17)$$

Скорость угловой деформации, происходящей вокруг оси  $Z$

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (4.18)$$

И по аналогии

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (4.19)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (4.20)$$

Выражение  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$  есть угловая скорость вращения жидкой частицы. Проекция угловых скоростей

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (4.21)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (4.22)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (4.23)$$

Соотношения (4.21-4.23) играют исключительно важную роль в механике жидкости. Они устанавливают связь между угловой и поступательной скоростями жидкой частицы. Вопрос о знаках чисто условный. В гидромеханике поворот против часовой стрелки считается положительным, по часовой - отрицательным.

В векторной форме выражение для угловой скорости может быть записано как

$$\dot{\omega} = \dot{e}_x \omega_x + \dot{e}_y \omega_y + \dot{e}_z \omega_z \quad (4.24)$$

Заменяя  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  их выражениями по (4.21-4.23) получаем:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \dot{e}_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \dot{e}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \dot{e}_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] \quad (4.25)$$

Сопоставляя выражение в квадратных скобках с формулой (1.8) видим их полную идентичность, поэтому можем записать:

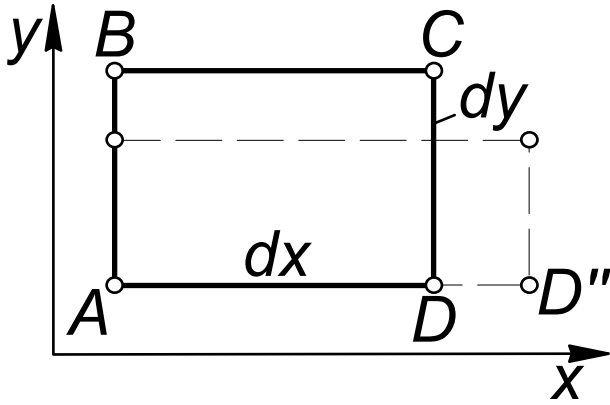
$$\dot{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \dot{u} \quad (4.26)$$

либо

$$\text{rot } \dot{u} = 2 \dot{\omega} \quad (4.27)$$

Формула (4.27) раскрывает гидромеханический смысл вихря (ротора) векторного поля. Если  $\dot{u}$  характеризует поле мгновенных скоростей, то векторное поле  $\text{rot } \dot{u}$  представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц жидкости этого поля.

Рис. 4.8



#### 4.8.2. Линейные деформации.

Очевидно, что линейные деформации частицы (рис. 4.8) могут возникнуть в результате различия в скоростях, совпадающих с направлением ребер. Как и ранее, компоненты скорости в точке  $A$  -  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ .

Вдоль оси  $X$ :

Точка  $A$ :  $u_{x(A)}$

Точка  $D$ :  $u_{x(D)} = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$

Разность скоростей, вызывающая удлинение ребра  $AD$ :  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ .

Удлинение частицы  $DD''$  за время  $dt$

$$DD'' = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt \quad (4.28)$$

Относительное удлинение

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x \quad (4.29)$$

Скорость относительного удлинения

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (4.30)$$

Аналогично для других осей

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если процесс происходит одновременно вдоль всех осей, то это приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Таким образом, объемная деформация сводится к изменению первоначального объема параллелепипеда  $dV = dx dy dz$  на величину  $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$  за счет растяжения либо сжатия ребер. При этом  $\delta V_x = DD'' dy dz$ , и с

учетом (4.28)  $\delta V_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dV dt$ . Аналогично  $\delta V_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dV dt$  и

$\delta V_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dV dt$ . Таким образом

$$\delta V = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt$$

Скоростью относительной объемной деформации назовем отношение изменения объема к его первоначальному объему и скорости деформации, т.е.

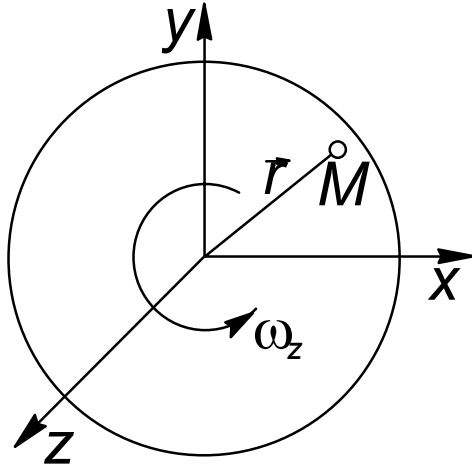
Рис. 4.10

Рис. 4.9

$$\frac{\delta V}{dV dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{u}$$

Если  $\operatorname{div} \dot{\vec{u}} = 0$ , то это означает, что  $\delta V = 0$ , т.е. деформация жидкой частицы происходит без изменения ее объема. В этом и заключается гидромеханический смысл равенства нулю дивергенции.

Полученную выше связь между поступательной и вращательной скоростями жидкой частицы можно получить и более коротким путем, представляющим определенный интерес. Разные подходы к одному и тому же вопросу способствуют углубленному пониманию. Поэтому рассмотрим этот путь.



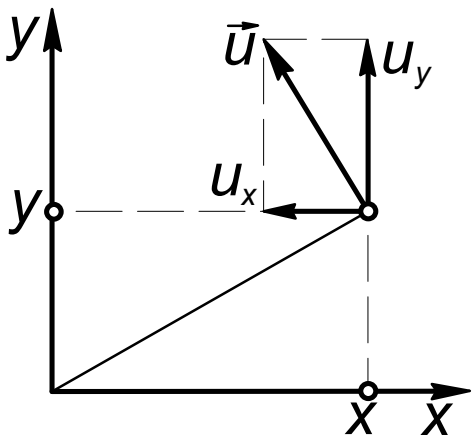
Пусть жидкая частица вращается вокруг оси Z с угловой скоростью  $\omega_z$ .

Запишем выражение для ротора в проекциях на оси координат (см. формулу 1.8). Имеем:

$$\operatorname{rot}_x \vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}_y \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$



Рассмотрим точку M на жидкой частице (рис. 4.10).

Линейная скорость этой частицы  $\dot{\vec{u}} = \dot{\omega}_z \times \vec{r}$ . Запишем выражения для проекций скоростей на оси координат:

$$u_x = -\omega_z y;$$

$$u_y = \omega_z x;$$

$$u_z = 0$$

Откуда находим  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \omega_z$ ;  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega_z$ .

Таким образом

$$\operatorname{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$$

Аналогично для двух других компонент

$$\operatorname{rot}_x \vec{u} = 2\omega_x; \operatorname{rot}_y \vec{u} = 2\omega_y$$

Либо в векторной форме

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}$$

что полностью совпадает с (4.26).

Движение, при котором  $\text{rot } \dot{u} \neq 0$  называют вихревым, при  $\text{rot } \dot{u} = 0$  - безвихревым либо потенциальным. Из чего следует, что если течение вихревое, то движение жидких частиц происходит с вращением.

## 5. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Вихревое движение широко распространено как в природе, так и в разного рода технических устройствах. Поэтому изучение его закономерностей представляет несомненный практический интерес. Вращательное движение жидких частиц характеризуется вихрем скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \quad (5.1)$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (5.2)$$

Движение, при котором величина вихря скорости не равна нулю, т.е.  $\text{rot } \dot{u} \neq 0$ , называют вихревым. При условии  $\text{rot } \dot{u} = 0$  движение безвихревое либо потенциальное.

### 5.1. Кинематика вихревого движения.

Кинематические понятия для вихревого движения можно получить по аналогии с общими понятиями кинематики. В основу кинематики вихревого движения положено представление о вихревой линии, которое аналогично понятию линии тока. Вихревой называется линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор вихря скорости совпадает с касательной (рис. 5.1). Другими словами, вихревая линия это мгновенная ось вращения частиц жидкости, которые в данный момент времени расположены на ней. По аналогии с дифференциальным уравнением линии тока можно записать

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (5.3)$$

Вихревая трубка аналог трубки (поверхности) тока. Это поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура. Вихревая нить аналог струйки это жидкость, заключенная в вихревой трубке. Если вихревая трубка имеет конечные размеры, то частицы, заполняющие ее и находящиеся во вращательном движении, образуют вихревой шнур.

## 5.2. Интенсивность вихря.

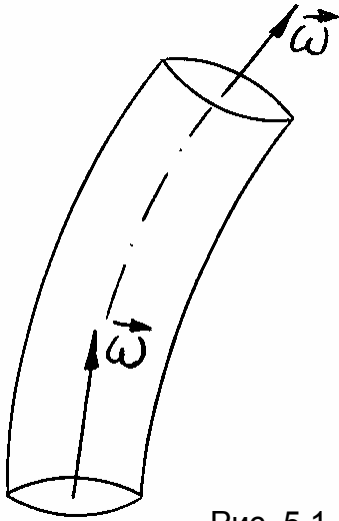


Рис. 5.1

Понятие интенсивности вихря достаточно абстрактно и вводится чисто математически. Напомним, что потоком векторного поля называют интеграл вида

$$\iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad (5.4)$$

Поскольку вихрь скорости (ротор) есть вектор, то вместо  $\vec{u}$  можно подставить  $\text{rot } \vec{u}$ , что и приводит нас к понятию интенсивности вихря, т.е.

интенсивность вихря это поток вектора вихря

$$i = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad (5.5)$$

Можно использовать и другую форму записи:  $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \text{rot}_n \vec{u}$ ;

$$i = \iint_A \text{rot}_n \vec{u} dA \quad (5.6)$$

Имея в виду, что  $\text{rot } \vec{u} = 2\vec{\omega}$ , можем записать

$$i = 2 \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (5.7)$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему. Имеем:

$$i = 2 \iint_A \omega_n dA = 2 \iiint_V \text{div } \vec{\omega} dV = 2 \iiint_V \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV.$$

Раскроем выражение, стоящее под знаком интеграла, имея в виду, что проекции вектора вихря имеют вид:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

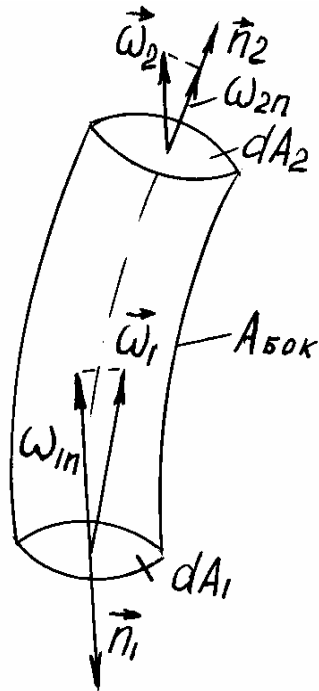
Имеем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right) = 0.$$

Следовательно, можно записать

$$\iint_A \omega_n dA = 0 \quad (5.8)$$

Рис. 5.2



Заметим, что это выражение по структуре напоминает уравнение неразрывности.

Применим (5.8) к вихревому шнуру (рис. 5.2). На боковой поверхности  $\omega_n \equiv 0$ , так как  $\omega$  направлен по касательной к поверхности. Поэтому можем записать

$$-\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0;$$

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2.$$

Если допустить, что в пределах сечения  $\omega_n = \text{const}$ , то

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2 \quad (5.9)$$

Либо в общем случае

$$\omega A = \text{const} \quad (5.10)$$

т.е. это своеобразное «уравнение неразрывности».

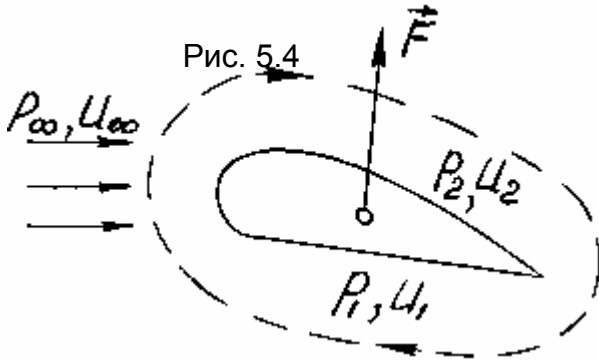
Полученный результат носит название теоремы

Гельмгольца о вихрях, которую можно сформулировать следующим образом: интенсивность вихревого шнура на всей его протяженности остается постоянной. Из выражения (5.10) следует и другой весьма важный вывод, сделанный Г. Гельмгольцем в 1855 г. в работе «Об интегралах уравнений, соответствующих вихревым движениям». Так как произведение  $\omega A$  остается неизменным, то уменьшение площади сечения шнура должно приводить к увеличению угловой скорости вращения частиц. При  $A = 0$   $\omega = \infty$ , что физически невозможно. Следовательно, вихрь не может зародиться либо оканчиваться в толще жидкости. Окончательно разившись, он должен замкнуться либо на твердую поверхность, либо сам на себя, т.е. образовать вихревое кольцо. Подробное описание этого явления можно найти в книге: Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. - М.: Наука, 1964. - 814 с.

Понятие об интенсивности является весьма важным, но, к сожалению, непосредственное определение этой величины экспериментальным путем связано с непреодолимыми трудностями. Кроме того, если пытаться распространить это понятие на вихри конечных размеров, то по аналогии со средней скоростью пришлось бы вводить понятие о средней угловой скорости, что связано с определенными трудностями чисто математического характера. Поэтому гидромеханика избрала другой путь, заменив это понятие другим, более удобным для целей практики. К рассмотрению этого понятия, называемого циркуляцией скорости, мы и приступим.

### 5.3. Циркуляция скорости.

Для введения понятия о циркуляции скорости в настоящем пособии используется методика Н.Я.Фабриканта, приведенная в упомянутой выше книге. Несомненным преимуществом ее является то, что в отличие от других она позволяет ввести понятие циркуляции не чисто математически, а исходя из достаточно простых и ясных физических предпосылок.

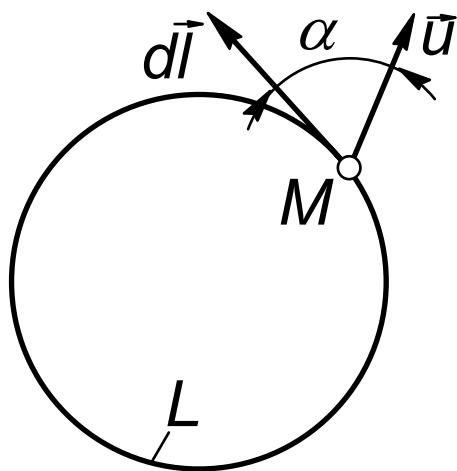


Рассмотрим крыловой профиль, находящийся в потоке газа (воздуха). Как известно, на профиль в этом случае будет действовать подъемная сила (см. рис. 5.3). Физически наличие этой силы можно объяснить лишь тем, что давление под профилем ( $p_1$ ) больше, а давление над профилем ( $p_2$ ) меньше, чем давление на каком-то

удалении от него, которое мы обозначим  $p_\infty$ . Это позволяет утверждать, что под крыловым профилем скорость  $u_1 < u_\infty$ , а над ним  $u_2 > u_\infty$ . В данном случае  $u_\infty$  - скорость невозмущенного потока.

Вычтем теперь из скоростей  $u_1$  и  $u_2$  скорость  $u_\infty$ , т.е.  $u_1 - u_\infty$  и  $u_2 - u_\infty$ . Это действие приводит нас к понятию потока возмущения, т.е. движения, которое возникает в среде из-за того, что в нее внесено инородное тело, т.е., по существу, это реакция потока, обусловленная в рассматриваемом случае тем, что в ней появился крыловой профиль. Установим теперь направление потоков возмущения. Под профилем  $u_1 < u_\infty$ , и он направлен против скорости  $u_\infty$ , над профилем - наоборот. В результате появляется циркуляционный поток, направленный по часовой стрелке, как это показано на рис. 5.3. Теперь необходимо охарактеризовать этот поток количественно. Именно с этой целью вводится понятие циркуляции скорости по замкнутому контуру.

Рассмотрим замкнутый контур  $C$ , показанный на рис. 5.4. Пусть в произвольной точке  $M$  скорость равна  $\vec{u}$ . Составим скалярное произведение  $\vec{u} \cdot d\vec{l}$ , где  $d\vec{l}$  - направленный элемент дуги.



Циркуляцией скорости называют контурный интеграл вида

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (5.11)$$

Обратим внимание на структуру этого соотношения. Оно построено аналогично выражению для работы, поэтому иногда говорят, что циркуляция - это своеобразная «работа» вектора скорости. Имея в виду, что  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  и  $d\vec{l}(dx, dy, dz)$ , по правилу скалярного произведения получим



$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \quad (5.12)$$

Для плоского течения:

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy) \quad (5.13)$$

В конце предыдущего раздела утверждалось, что понятие циркуляции является более удобным, чем интенсивность вихря. Действительно, из (5.13) следует, что для определения циркуляции

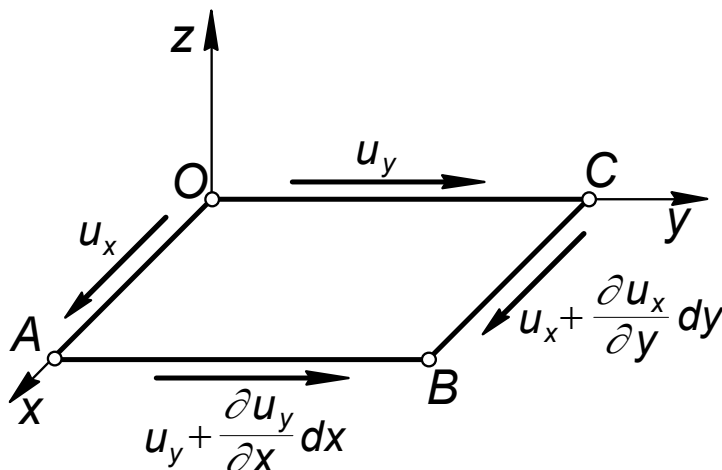
Рис. 5.5

достаточно знать проекции скорости, нахождение которых не связано с существенными

трудностями. Однако остается пока открытым вопрос о том, существует ли связь между циркуляцией и интенсивностью вихря. Ответ на него дает теорема Стокса.

### 5.4. Теорема Стокса.

В движущейся жидкости рассматриваем вихревое поле и выделяем в нем малый замкнутый контур со сторонами  $dx$  и  $dy$  (рис. 5.5). Пусть в



начале координат скорости будут  $u_x$  и  $u_y$ . Запишем выражение для элементарной циркуляции по этому контуру, имея в виду, что поток двумерный:

$$d\Gamma = u_x dx + u_y dy.$$

Рассмотрим контур OABC. Если вдоль OA скорость  $u_x$ , то вдоль CB ее приращение составит  $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ , и аналогично

вдоль AB -  $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx$ . Это следует из выражения для полного

дифференциала скорости, например,  $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ .

Запишем теперь выражение для элементарной циркуляции вдоль контура OABCO. Имеем:

$$d\Gamma = u_x dx + \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy$$

Раскрывая скобки и выполнив сокращения, получаем

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dA$$

Из чего следует, что циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равна интенсивности вихря, пронизывающего этот контур.

Этот вывод легко обобщить и на случай произвольной кривой конечных размеров (см., например, Аржаников Н.С. и Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Оборонгиз, 1956 - 483 с.; упомянутую выше книгу Н.Я.Фабриканта).

Таким образом, можем записать:

$$\Gamma = 2 \iint_A \omega_n dA = i \quad (5.14)$$

Это и есть формула Стокса, показывающая, что циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей (напряжений) вихрей, пронизывающих поверхность, натянутую на контур.

## 6. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось, условием потенциальности движения является равенство нулю вихря скорости, т.е.  $\text{rot } \vec{u} = 0$ . Физически это означает, что движение жидкости происходит без вращения частиц. Как будет показано, потенциальное движение играет исключительно важную роль в механике жидкости.

### 6.1. Потенциал скорости.

Сущность теоремы Стокса, по существу, сводится к утверждению о равенстве числовых значений интенсивности вихря и циркуляции, т.е.  $i = \Gamma$ , либо

$$i = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \Gamma$$

С другой стороны, для потенциального потока по его определению  $\text{rot } \vec{u} = 0$ , т.е. в потенциальном поле циркуляция по замкнутому контуру равна нулю.

Запишем выражения для проекций угловых скоростей.

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Из сказанного выше следует, что для безвихревого (потенциального) движения  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (6.1)$$

Эти соотношения позволяют существенным образом упростить вычисления компонент скорости  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ .

Рассмотрим выражение

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (a)$$

Оно построено аналогично известному из механики твердого тела выражению для элементарной работы. Зададимся вопросом, в каком случае (a) является полным дифференциалом. Напомним, что если выражение для работы является полным дифференциалом, то силы называются консервативными или имеющими потенциал. Ответ на поставленный вопрос был дан Алесисом Клодом Клеро (с жизнью и деятельностью этого удивительного ученого можно познакомиться по

превосходной книге: Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. - М.: Наука, 1975. - 494 с.)

Клеро показал, что выражение типа (а) является полным дифференциалом, если обеспечивается равенство накрест взятых производных. Соотношения (6.1) как раз и удовлетворяют этому требованию, т.е. взятые накрест производные в (а) дают соотношения (6.1). Таким образом, при потенциальном движении выражение (а) является полным дифференциалом какой-то функции  $\varphi$ , и

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (6.2)$$

С другой стороны, по общему правилу полный дифференциал может быть представлен как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (6.3)$$

Сопоставляя (6.2) и (6.3), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.4)$$

По предложению Гельмгольца функцию  $\varphi$  называют потенциалом скорости.

Таким образом, всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение: если существует потенциал скорости, то движение происходит без вращения частиц.

Соотношения (6.4) можно получить и другим путем. Поскольку разные подходы к одному и тому же вопросу способствуют углубленному его пониманию, то получим эти же соотношения, используя другую методику.

Как уже отмечалось, условием потенциальности является  $\text{rot } \dot{u} = 0$ . С другой стороны, как показано при рассмотрении операций второго порядка, операция ротора над градиентом какой-то скалярной функции тождественно равна нулю, т.е.

$$\text{rot grad } \varphi = 0$$

Сопоставляя эти соотношения, можем записать

$$\dot{u} = \text{grad } \varphi \quad (6.5)$$

Это означает, что вектор скорости можно рассматривать как градиент какой-то скалярной функции  $\varphi$ . Раскроем значения  $\dot{u}$  и  $\text{grad } \varphi$ . Имеем

$$\dot{u} = \dot{e}_x u_x + \dot{e}_y u_y + \dot{e}_z u_z;$$

$$\text{grad } \varphi = \dot{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dot{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dot{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Откуда, учитывая (6.5), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

т.е. вновь приходим к соотношениям (6.4).

Пока что остается открытым вопрос о необходимости и целесообразности введения понятия о потенциале скорости. Чтобы разобраться в этом, следует иметь в виду, что к числу центральных задач гидромеханики относится определение сил, действующих на тела, обтекаемые потоками жидкости либо газа. Решение этих задач непосредственно связано с необходимостью расчета поля скоростей, т.е. определением проекций скоростей ( $u_x, u_y, u_z$ ) в каждой его точке. Из выражений (6.4) непосредственно следует, что все три компоненты скорости могут быть определены, если известна лишь одна величина - потенциал скорости. Таким образом, знание потенциала скорости существенно упрощает расчет поля. Однако немедленно возникает следующая проблема - как же найти потенциал скорости течения. Чтобы решить ее, необходимо прежде всего уяснить некоторые свойства, присущие потенциалу.

## 6.2. Уравнение Лапласа.

Операция дивергенции над градиентом скалярной функции приводит к оператору Лапласа. Если в качестве скалярной функции использовать потенциал скорости, то можно записать

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (6.6)$$

Для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \dot{u} = 0$ , а  $\operatorname{grad} \varphi = \dot{u}$  (см. формулу 6.5). Таким образом

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (6.7)$$

либо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.8)$$

Выражения (6.7) и (6.8) носят название уравнения Лапласа. Таким образом, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Любая функция, удовлетворяющая этому уравнению, носит название гармонической. Следовательно, потенциал скорости является гармонической функцией. Как любое дифференциальное уравнение, уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений, поэтому для того, чтобы однозначно определить потенциал скорости, необходимо задать граничные условия. Для задач, связанных с обтеканием тел, так называемых внешних задач гидромеханики, такими условиями являются  $u_n = 0$  и  $u = u_\infty$ .

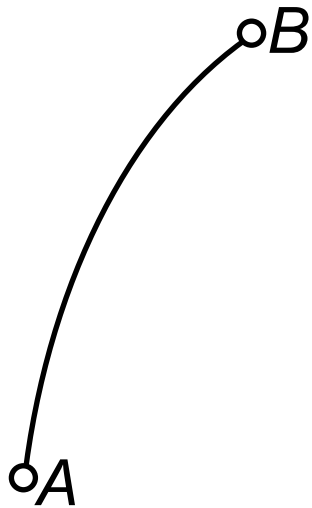
Первое условие характеризует безотрывность течения (равенство нулю нормальной компоненты скорости). Второе - показывает, что вдали от тела распределение скоростей известно.

Поверхности (либо линии для двумерных потоков), в каждой точке которых  $\varphi = \text{const}$ , называются эквипотенциальными.

Рис. 6.1

### 6.3. Циркуляция скорости в потенциальном поле.

Рассмотрим плоский (двумерный) поток. Выделим в нем произвольную кривую (рис. 6.1) и запишем выражение для циркуляции вдоль этой кривой



$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad (6.9)$$

т.е. циркуляция вдоль кривой не зависит от ее формы, а определяется лишь разностью потенциалов в ее конечных точках. Если кривая замкнута, то очевидно, что  $\varphi_B = \varphi_A$  и  $\Gamma = 0$ , т.е. циркуляция по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

### 6.4. Функция тока плоского течения.

В практических задачах гидромеханики двумерных потоков широчайшее применение находит понятие о функции тока. Рассмотрим двумерный поток и ограничимся несжимаемой жидкостью.

Как было показано, дифференциальное уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

либо

$$u_x dy - u_y dx = 0 \quad (6.10)$$

Запишем уравнение неразрывности для этого случая, которое будет иметь вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (6.11)$$

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении потенциала скорости, поставим вопрос об условиях необходимых и достаточных для того, чтобы выражение (6.10) являлось полным дифференциалом какой-то скалярной функции. Применим к (6.10) условия Клеро (равенство взятых накрест производных). Имеем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Но это есть не что иное, как уравнение неразрывности (6.11) для плоского потока, которое удовлетворяется всегда, если только движение существует. Следовательно, можно записать:

$$d\psi = u_x dy - u_y dx \quad (6.12)$$

где  $\psi$  носит название функции тока. С другой стороны, поскольку, как показано выше,  $d\psi$  является полным дифференциалом, то можно записать:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (6.13)$$

Сопоставляя (6.12) и (6.13), получаем

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.14)$$

Из чего следует, что если функция тока течения известна, то можно определить компоненты скорости в любой точке пространства. Сопоставляя (6.10) и (6.12) приходим к выводу, что если частица движется вдоль линии тока, то функция тока остается постоянной (при  $\psi = \text{const}$ ,  $d\psi = 0$  и (6.12) превращается в (6.10)). Проверим теперь, является ли функция тока гармонической функцией, т.е. удовлетворяет ли она уравнению Лапласа.

Для плоского потенциального течения  $\omega_z = 0$ , но

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0, \text{ откуда } \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \text{ Из (6.14) } u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и}$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ следовательно}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, функция тока, как и потенциал скорости, является гармонической функцией. И еще одно важное обстоятельство. Если потенциал скорости существует только в потенциальном потоке, то функция тока этим условием не ограничена. Это объясняется тем, что уравнение неразрывности, которое используется для получения этого понятия, справедливо как для вихревого, так и для безвихревого движений.

## 6.5. Гидромеханический смысл функции тока.

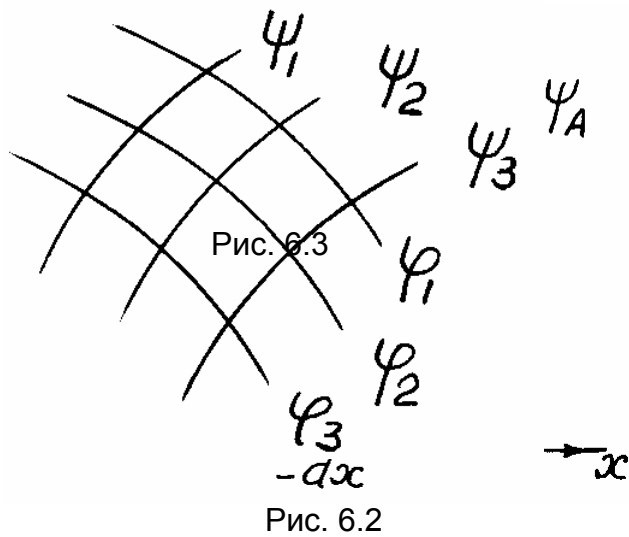


Рис. 6.3

Рис. 6.2

Установим гидромеханический смысл функции тока, для чего проведем две достаточно близко расположенные линии тока (рис. 6.2). Вычислим объемный расход жидкости, протекающий между ними, для чего разложим вектор скорости частицы  $\vec{u}$  на две составляющие  $u_x$  и  $u_y$ , что позволит представить расход как сумму  $dQ = dQ_x + dQ_y$ , при этом  $dQ_x = u_x dy$  и  $dQ_y = -u_y dx$  (рис. 6.2).

$$dQ = u_x dy - u_y dx$$

$$Q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (6.15)$$

т.е. разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна объемному расходу между ними.

### 6.6. Связь потенциала скорости и функции тока.

Связь между этими параметрами может быть легко установлена, если записать полученные выше выражения для проекций скоростей

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.16)$$

Эти соотношения играют чрезвычайно важную роль в механике жидкости и носят название соотношений Коши-Римана. Более подробно они будут рассмотрены ниже. Пока же ограничимся тем, что перемножим их. Это дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.17)$$

Из математики известно, что выражения типа (6.17) свидетельствуют о взаимной ортогональности кривых. Следовательно, линии тока и эквипотенциальные линии образуют сетку взаимно ортогональных кривых, которая носит название гидродинамической сетки движения. Примерный ее вид показан на рис. 6.3.



## 6.7. Методы расчета потенциальных потоков.

Как уже отмечалось, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа при заданных граничных условиях. Задача эта достаточно сложна. Поэтому в теории потенциальных течений особый интерес представляют случаи, которые дают точные значения функций тока и потенциала скорости без интегрирования уравнения Лапласа. Общая идея такого подхода сводится к следующему: задаются какой-то функцией, которая заведомо удовлетворяет уравнению Лапласа и выясняют, что представляет собой гидродинамическая сетка движения. Эту методику рассмотрим на ряде простейших примеров.

**Пример 6.1.** Пусть выражение для потенциала скорости имеет вид  $\varphi = ax + by$ , где  $a$  и  $b$  - действительные числа.

Найдем компоненты скорости. Имеем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \text{ и } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b.$$

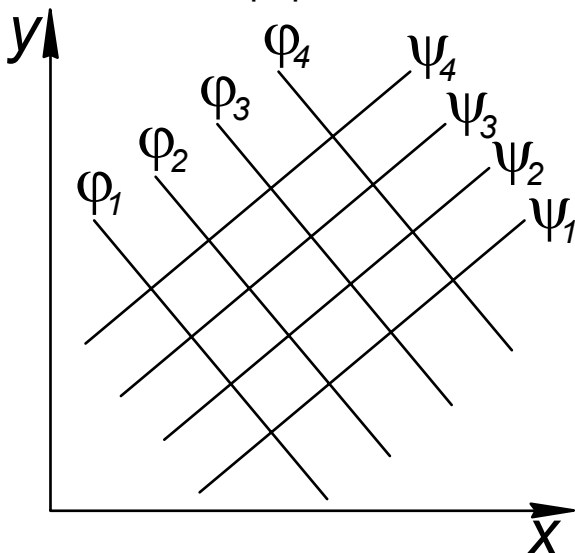
Вторые производные равны нулю, т.е. уравнение Лапласа удовлетворяется. Так как  $u_x = a$  и  $u_y = b$ , то из этого следует, что поток движется с постоянной скоростью

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Выясним, что представляют собой линии тока. Дифференциальное уравнение линий тока

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = a dy - b dx.$$

И после интегрирования



$$\psi = ay - bx$$

Приравнявая (6.18) какой-то постоянной, получаем семейство линий тока - параллельных прямых,

наклоненных к оси под углом  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$

(см. рис. 6.4). Действительно, для линии тока можем записать:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{b}{a}.$$

**Пример 6.2.** Потенциал скорости задан выражением

$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

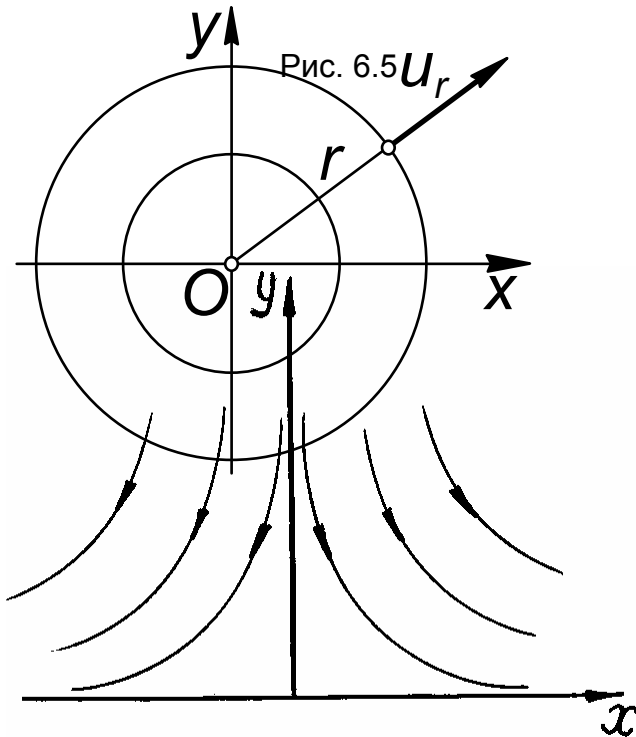
где  $a$  - действительное число. Необходимо найти линии тока этого течения.

Прежде всего проверим, удовлетворяет ли  $\varphi$  уравнению Лапласа.

$$\text{Имеем } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2a;$$

Рис. 6.6



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a - 2a = 0,$$

т.е. уравнение Лапласа удовлетворяется. Выясним, какое же движение описывается этой функцией, для чего установим вид функции тока.

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = 2ax dy + 2ay dx = 2a(x dy + y dx) = 2a d(xy)$$

Следовательно,

$$\psi = \int 2a d(xy) = 2axy$$

(произвольная постоянная в данном случае нас не интересует).

Для нахождения линии тока приравняем  $\psi$  какой-то постоянной величине  $2axy = \text{const}$  либо  $xy = \text{const}$ . Следовательно, линии тока - гиперболы, для которых оси  $x$  и  $y$  - асимптоты. На рис. 6.5 показаны линии тока для верхней половины. Если считать, что оси координат являются твердыми стенками, то получим картину обтекания потоком прямого угла.

Существует ряд простейших течений, для которых потенциалы скорости могут быть получены аналитическим путем. Эти течения играют заметную роль в гидромеханике, и поэтому их рассмотрение представляет несомненный интерес.

**Пример 6.3.** Источник (сток) на плоскости. Ограничимся плоской задачей. Интересующиеся объемной (трехмерной) задачей могут найти ее в книге: Талиев В.Н. Аэродинамика вентиляции. - М.: Изд. по строительству и архитектуре, 1954. - 287 с.

Под источником (стоком) на плоскости понимают точку, из которой происходит истечение (либо втекание) жидкости. Пусть точка  $O$  на рис. 6.6 представляет плоский источник, из которого, как из центра, проведем

несколько концентрических окружностей. Запишем уравнение неразрывности для цилиндрической поверхности единичной высоты:

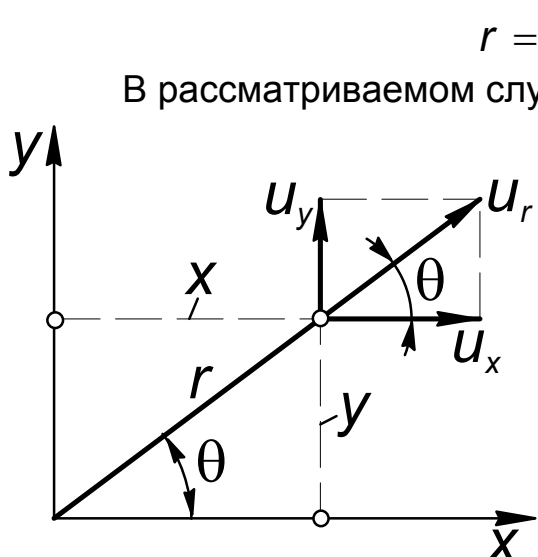
$$Q = 2\pi r u_r$$

откуда

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (6.19)$$

В декартовой системе координат

Рис. 6.7



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6.20)$$

В рассматриваемом случае удобнее использовать цилиндрическую систему координат. Увязка систем может быть получена, исходя из рис. 6.7. Для цилиндрической системы

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (6.21)$$

Вывод этих соотношений можно найти в книге: Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Оборонгиз, 1956. - 483 с. Из (6.21) следует, что  $u_r$  не зависит от полярного угла, поэтому

можно записать  $u_r = \frac{d\varphi}{dr}$ . Приравнявая

это выражение (6.19), получим  $\frac{Q}{2\pi r} = \frac{d\varphi}{dr}$ , откуда  $d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}$ .

И после интегрирования

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (6.22)$$

Из (6.22) следует, что эквипотенциальные линии источника представляют собой окружности. Формулу (6.22) можно записать и в следующей форме

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6.23)$$

Для нахождения функции тока удобнее использовать декартову систему координат. При этом (6.19) принимает вид:

$$u_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (6.24)$$

С другой стороны, из рис. 6.7 следует:

$$u_x = u_r \cos \theta = u_r x/r$$

Таким образом

$$u_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Аналогично

$$u_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Дифференциальное уравнение функции тока

$$d\psi = u_x dy - u_y dx \quad (6.25)$$

Подстановка значений  $u_x$  и  $u_y$  в (6.25) дает

$$d\psi = \frac{Q}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad (6.26)$$

Выполним некоторые преобразования. Дифференциал от частного имеет вид  $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}$ , т.е.  $x dy - y dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Из знаменателя (6.26) выносим за скобки  $x^2$ , при этом

$$x^2 + y^2 = x^2 \left[ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right]$$

Таким образом, (6.26) принимает вид

$$d\psi = \frac{Q}{2\pi} \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\text{и } \psi = \frac{Q}{2\pi} \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Но с другой стороны  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta$ , т.е.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \theta) = \theta$ , и

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (6.27)$$

В полярной системе координат (6.27) представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат. Для стока потенциал скорости и функция тока имеют те же выражения, но с противоположными знаками, т.е.

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \text{ и } \psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta \quad (6.28)$$

Иногда  $Q$  называют мощностью (обильностью) источника.

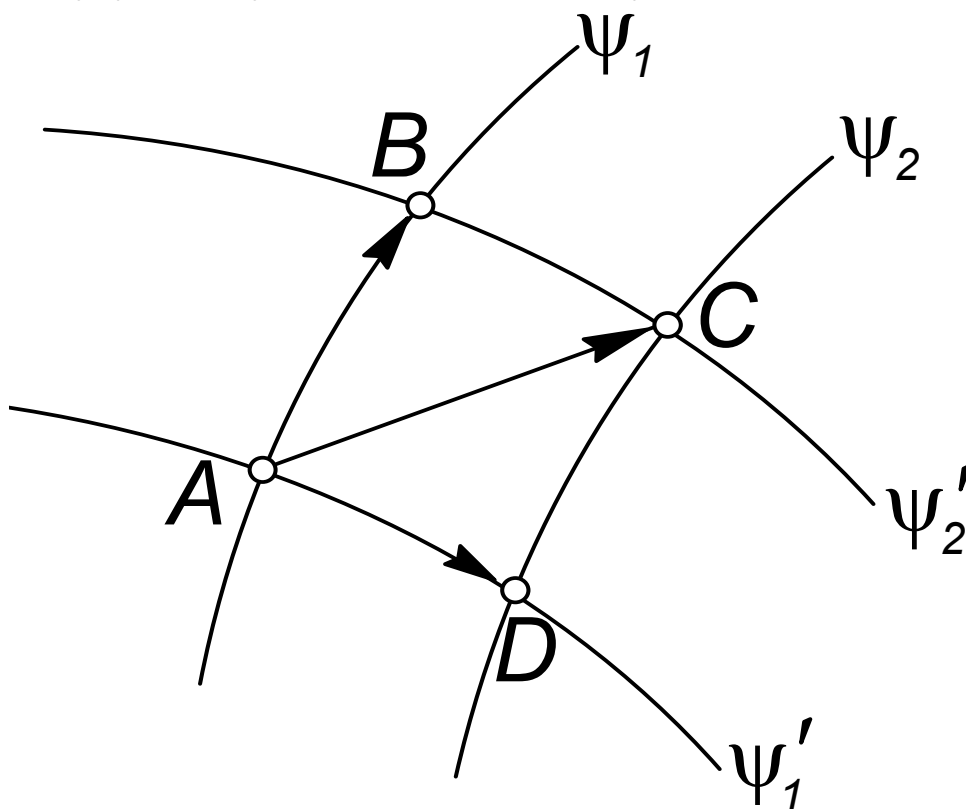
### 6.8. Наложение потенциальных потоков.

Предположим, что имеются два потока с известными потенциалами скорости  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющими уравнению Лапласа. Из теории линейных дифференциальных уравнений, к которым принадлежит и

уравнение Лапласа, известно, что сумма частных решений этих уравнений также является их решением. Другими словами, это означает, что потенциал  $\varphi$ , образованный как  $\varphi_1 + \varphi_2$ , также будет удовлетворять уравнению Лапласа, т.е. будет описывать какой-то новый поток, имеющий потенциал  $\varphi$ . Из этого следует, что можно получить новый поток путем сложения (наложения) уже известных. Следует обратить внимание на то, что собственно наложение потоков здесь не производится, а речь идет о сложении потенциалов скорости уже известных течений.

Скорость в каждой точке нового потока является суммой скоростей первоначальных потоков. Задача нахождения нового течения может быть решена как графически, так и аналитически.

Рассмотрим сначала графический метод. Общий подход сводится к следующему. Необходимо построить линии тока течений в одинаковом масштабе, что при достаточной густоте линий тока при пересечении дает фигуру, близкую к параллелограмму (рис. 6.8).

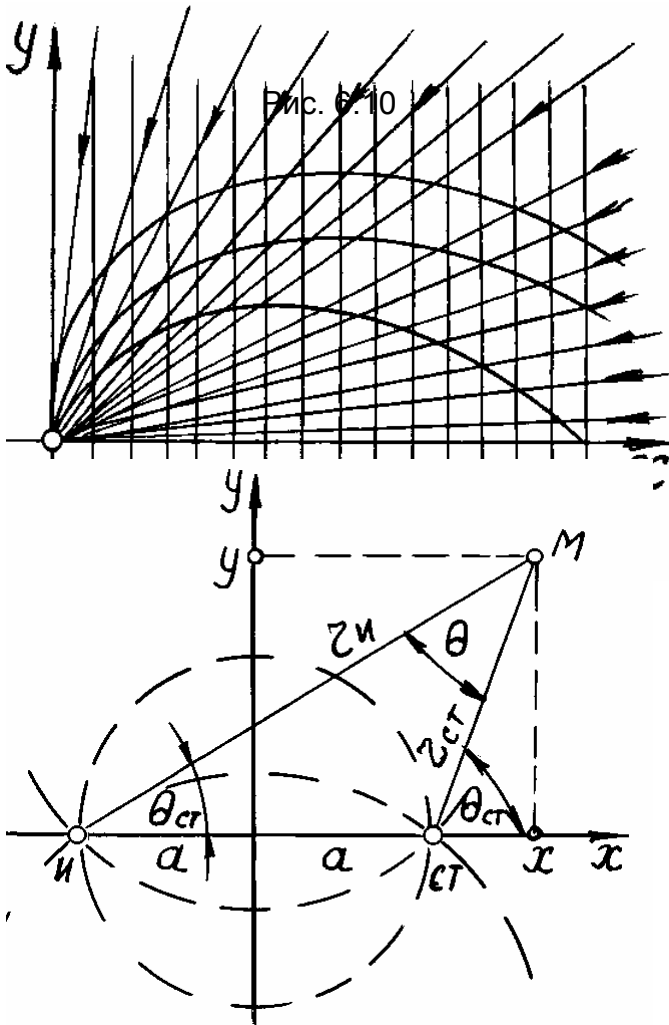


Отрезки  $AB$  и  $AD$  в каком-то масштабе представляют скорости течения, их результирующая определяется как диагональ параллелограмма ( $AC$ ). Для построения такой сетки необходимо соблюсти следующее условие: расход между

соседними линиями тока обоих течений должен быть одинаков.

В качестве примера рассмотрим картину течения, образующуюся при наложении плоского параллельного потока на сток (рис. 6.9). Как

Рис. 6.8 Рис. 6.9



следует из рис. 6.9, частицы жидкости в новом течении будут двигаться по кривым, направленным к стоку.

Задача, как отмечалось выше, может быть решена и аналитически. В этом случае должны быть известны  $\varphi$  и  $\psi$  обоих течений.

**Пример 6.4.** Выполним сложение источника и стока с одинаковыми расходами, симметрично расположенными относительно начала координат на расстоянии  $a$  (см. рис. 6.10).

Потенциалы скорости:

источника  $\varphi_u = \frac{Q}{2\pi} \ln r_u$ ; стока -

$$\varphi_c = -\frac{Q}{2\pi} \ln r_c.$$

Выбираем произвольную точку  $M$  с координатами  $x$  и  $y$ .

Потенциал скорости в этой точке  $\varphi = \varphi_u + \varphi_c$ , т.е.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_u - \ln r_c) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_u}{r_c}$$

Выполним некоторые преобразования этого соотношения. Из треугольников  $MIx$  и  $MCx$  получаем:

$$r_u = \sqrt{y^2 + (x^2 + a^2)}$$

$$r_c = \sqrt{y^2 + (x^2 - a^2)}$$

Следовательно, потенциал скорости нового течения

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{y^2 + (x^2 + a^2)}{y^2 + (x^2 - a^2)}} \quad (6.29)$$

Существенно больший интерес представляет функция тока. Как было показано,  $\psi_u = \frac{Q}{2\pi} \theta_u$  и  $\psi_c = -\frac{Q}{2\pi} \theta_c$ .

Аналогично предыдущему

$$\psi = \psi_u + \psi_c = \frac{Q}{2\pi}(\theta_u - \theta_c)$$

С другой стороны, из рис. 6.10 следует, что  $\theta_c = \theta + \theta_u$ , откуда  $\theta_u - \theta_c = -\theta$ , т.е.  $\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta$ . При этом условию  $\psi = \text{const}$  (т.е. линии тока) соответствует  $\theta = \text{const}$ . Таким образом, линии тока нового течения представляют собой окружности, проходящие через источник и сток.

Рассмотрим теперь картину, образующуюся при сближении источника и стока.

**Пример 6.5.** Забегая несколько вперед отметим, что получаемое при сближении источника и стока течение называется диполем. В чем особенность рассматриваемой задачи? Если просто предположить, что расстояние  $a = 0$ , то  $r_u = r_c$ , и  $\varphi$  и  $\psi$  тождественно равны нулю. Поэтому рассмотрим другой предельный случай. Пусть при  $2a \rightarrow 0$  расход  $Q \rightarrow \infty$ , но так, что произведение  $2a \cdot Q = \text{const} = M$ , где  $M$  носит название момента диполя. Таким образом,

$$Q = \frac{M}{2a} \quad (6.30)$$

При этом потенциал скорости диполя

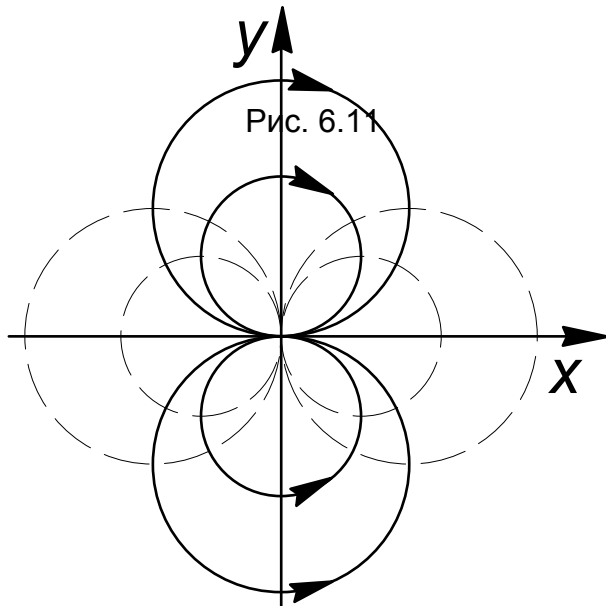
$$\varphi_{\partial} = \frac{M}{2\pi} \frac{\ln \sqrt{y^2 + (x^2 + a^2)} - \ln \sqrt{y^2 + (x^2 - a^2)}}{2a}$$

Рассмотрим предел этого отношения

$$\varphi_{\partial} = \frac{M}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{y^2 + (x^2 + a^2)} - \ln \sqrt{y^2 + (x^2 - a^2)}}{2a}$$

Разберемся теперь в том, что представляет собой выражение, стоящее под знаком предела. Знаменатель можно рассматривать как приращение независимого переменного, а числитель - как соответствующее приращение функции. Действительно, рассмотрим функцию  $\ln \sqrt{y^2 + x^2}$ . Придадим  $x$  значение  $x + a$  и  $x - a$ . Если теперь из значения функции, соответствующей  $x + a$ , вычесть ее значение при  $x - a$ , то получим числитель. Разность значений независимого переменного  $(x + a) - (x - a) = 2a$  есть знаменатель. Таким образом, мы должны вычислить предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при стремлении последнего к нулю. Как известно, в математике такой предел называют производной функции, т.е.

$$\varphi_{\partial} = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$



Дифференцирование легко выполняется методом подстановок. Пусть  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $u^* = x^2 + y^2$ .

Тогда  $z = \ln u$ ;  $z' = \frac{1}{u} u'$ ;

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{u^*}} (u^*)'$$

$$\text{Имеем: } u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$z' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

т.е.  $\frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

Таким образом:

$$\varphi_{\partial} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (6.31)$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что

$$\psi_{\partial} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (6.32)$$

Из чего следует, что линии тока и эквипотенциальные линии - окружности, касающиеся осей  $Ox$  и  $Oy$  в начале координат (рис. 6.11). Действительно, придавая функции тока постоянные значения, получаем:

$$x^2 + y^2 = Cy$$

где  $C = -\frac{M}{2\pi}$ ;

$$x^2 + y^2 - Cy + \frac{C^2}{4} = \frac{C^2}{4};$$

$$x^2 + \left( y^2 - Cy + \frac{C^2}{4} \right) = \frac{C^2}{4};$$

$$x^2 + \left( y - \frac{C}{2} \right)^2 = \left( \frac{C}{2} \right)^2,$$

а это и есть уравнения окружностей с разными центрами.

### 6.9. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра.

Продолжим рассмотрение метода наложения потоков. Полученное в примере 6.5 течение, называемое диполем, на первый взгляд носит достаточно абстрактный характер. Однако, как будет показано ниже, такая точка зрения не совсем справедлива. Используя понятие диполя, можно получить весьма интересные и полезные для практических приложений



результаты. Для подтверждения этого проанализируем течение, возникающее при наложении прямолинейного поступательного потока на диполь с центром, расположенным в начале координат. Прямолинейный поток движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью, равной единице, т.е.  $u_x = u_0 = \text{const}$ ;  $u_y = 0$ . Потенциал скорости

Рис. 6.12

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy$$

и  $\varphi_n = u_0 x$  с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока  $d\psi = u_x dy - u_y dx = u_0 dy$  и  $\psi = u_0 y$ . Если, как принято в условии,  $u_0 = 1$ , то  $\varphi_n = x$  и  $\psi = y$ . Примем для упрощения выкладок момент диполя  $M = 2\pi$ , тогда  $\varphi_d = \frac{x}{x^2 + y^2}$  и  $\psi_d = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .

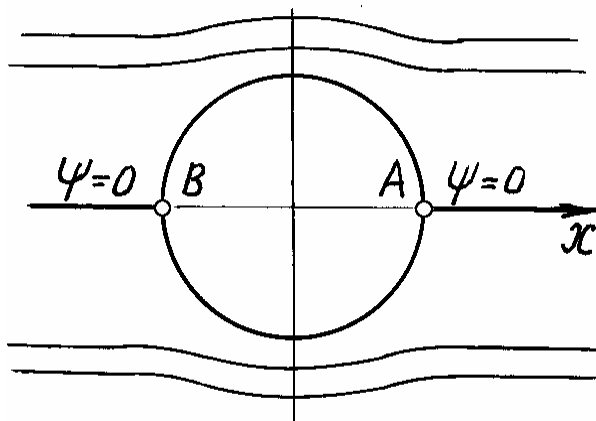
Складывая потенциалы и функции тока, получаем  $\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$  и

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Найдем линии тока, для чего приравняем функцию тока постоянной:

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C, \text{ откуда}$$

$$y[(x^2 + y^2) - 1] = C(x^2 + y^2) \quad (6.33)$$



Из чего следует, что линии тока течения представляют семейство кривых третьего порядка. Найдем нулевую линию тока, т.е. линию, для которой  $C = 0$ . Это дает два уравнения:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = 1,$$

т.е. линия тока представляет собой ось  $X$ -ов и окружность единичного радиуса с центром в начале координат (см. рис. 6.12). Это

позволяет рассматривать окружность как твердую границу и течение вне ее, что приводит к задаче обтекания бесконечно длинного цилиндра.

Покажем, что на достаточно большом удалении от цилиндра скорость направлена вдоль оси  $X$  и равна  $u_\infty = 1$ . Найдем проекции скоростей  $u_x$  и  $u_y$ .

$$\text{Имеем: } u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{Откуда } u_x = 1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{аналогично } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Для дальнейшего удобно перейти к полярным координатам, имея в виду, что  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ . Подстановка этих значений в выражения для  $u_x$  и  $u_y$  дает:

$$u_x = 1 - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} \quad (6.34)$$

$$u_y = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (6.35)$$

Перейдем к пределу. При  $r \rightarrow \infty$  получаем  $u_{x(\infty)} = 1$  и  $u_{y(\infty)} = 0$ , т.е. то, что и требовалось доказать.

Точки  $B$  и  $A$ , показанные на рис. 6.12, являются так называемыми особыми либо критическими точками, т.к. скорость в них обращается в нуль. Покажем, что это действительно так, для чего запишем выражение для потенциала скорости в полярных координатах:

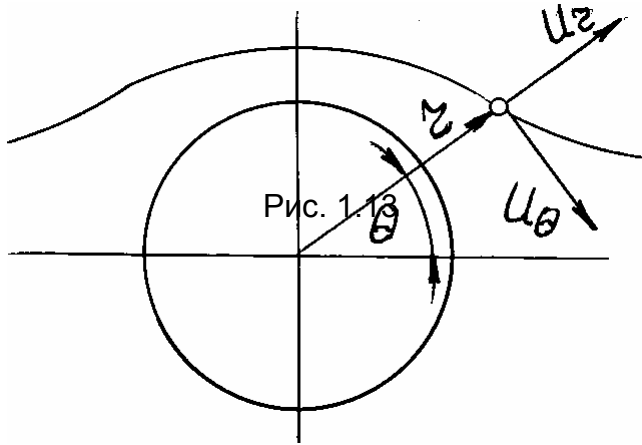
$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2} = r \cos \theta + \frac{r \cos \theta}{r^2};$$

$$\varphi = \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad (6.36)$$

Найдем проекции скорости в произвольной точке на произвольной линии тока (рис. 6.13). Имеем:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta = \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta;$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta = -\left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta.$$



На поверхности цилиндра  $r = 1$  и  $u_r = 0$ , т.е. обтекание безотрывно. Компонента  $u_\theta = -2 \sin \theta$ . В общем случае, когда  $u_\infty \neq 1$ ,

$$u_\theta = -2 u_\infty \sin \theta \quad (6.37)$$

Знак «минус» указывает на то, что направление скорости на верхней половине цилиндра противоположно положительному направлению отсчета угла  $\theta$ . В

точках  $B$  и  $A$  ( $\sin \theta = 0$ ) скорости равны нулю, т.е. действительно эти точки являются критическими.

### 6.10. Применение теории функций комплексного переменного к изучению плоских потоков идеальной жидкости.

Рассматриваемый ниже метод относится к числу наиболее эффективных способов анализа плоских потоков. Вернемся к полученным выше (см. 6.15) соотношениям Коши-Римана. Они показывают, что комплексная комбинация этих двух функций (т.е.  $\varphi$  и  $\psi$ ) от действительных переменных  $x$  и  $y$ , т.е.  $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , является аналитической функцией комплексного переменного  $z = x + iy$ . Другими словами, эти условия показывают, что существует функция комплексной переменной  $W(z)$  либо просто  $W$ , вещественная и мнимая части которой  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно, т.е.

$$W(z) = \varphi + i\psi \quad (\text{либо } W = \varphi + i\psi).$$

Функция  $W(z)$  называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой ее окрестности. В гидромеханике функция  $W(z)$  называется комплексным потенциалом.

Следует отметить, что теория аналитических функций является одной из наиболее разработанных ветвей классической математики. обстоятельное изучение этого материала далеко выходит за рамки курса. Ограниченный объем данного пособия позволяет привести лишь весьма краткие сведения, необходимые для уяснения самой общей идеи метода. При необходимости подробное и обстоятельное изложение его можно найти в книге: Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. - К.: Наукова думка, 1964. - 530 с.

Интересующиеся приложениями теории функций комплексного переменного для решения технических задач, в частности, задач гидромеханики, могут обратиться к книге: Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.

Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. - 688 с.

Как показывается в теории функций комплексного переменного, производная от комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  по комплексному же переменному  $z = x + iy$  имеет вид

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - i u_y \quad (6.38)$$

Это выражение называется комплексной скоростью. Модуль этой величины дает саму скорость, т.е.

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = u \quad (6.39)$$

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 6.6.** Пусть течение задано комплексным потенциалом  $W = az^2$ , где  $a$  - действительное число. Имея в виду, что  $W = \varphi + i\psi$  и  $z = x + iy$ , можно записать:

$$\varphi + i\psi = a(x + iy)^2 = ax^2 + 2aixy - ay^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy$$

Разделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \text{ и } \psi = 2axy.$$

Этот поток рассмотрен выше в примере 6.2. Обратим лишь внимание на то, что с помощью комплексного потенциала результат достигается более коротким путем.

Найдем комплексную скорость. Имеем:

$$\frac{dW}{dz} = u_x - i u_y;$$

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay;$$

$$\frac{dW}{dz} = 2ax + i2ay = 2a(x + iy) = 2az;$$

$$u = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar,$$

т.е. частицы движутся по гиперболическим линиям тока со скоростью  $u = 2ar$ .

## 6.11. Конформные отображения.

Геометрические преобразования, при которых величины углов между любыми двумя линиями, содержащимися в преобразуемой фигуре, не изменяются, называются конформными преобразованиями или отображениями. Широкое применение конформные отображения находят в гидромеханике. Обсудим лишь общую идею метода.

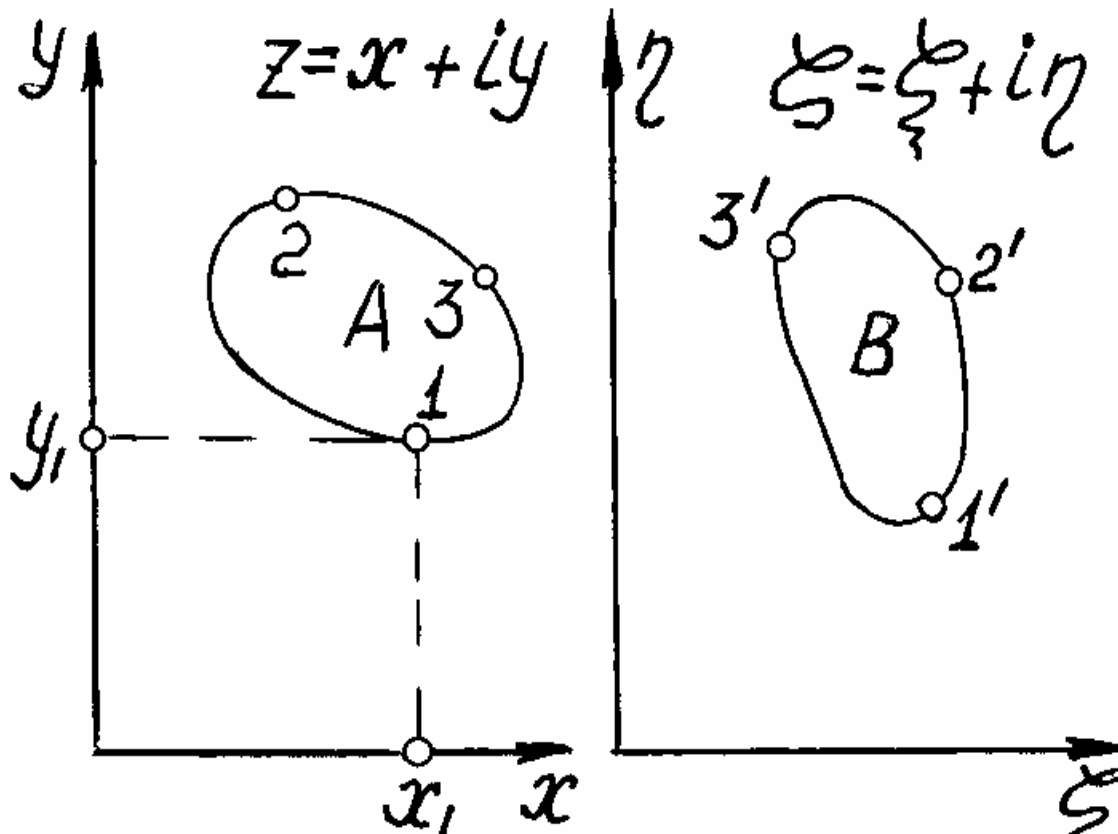


Рис. 6.14

Рассмотрим две координатные сетки на плоскостях комплексных переменных  $z = x + iy$  и  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 6.14).

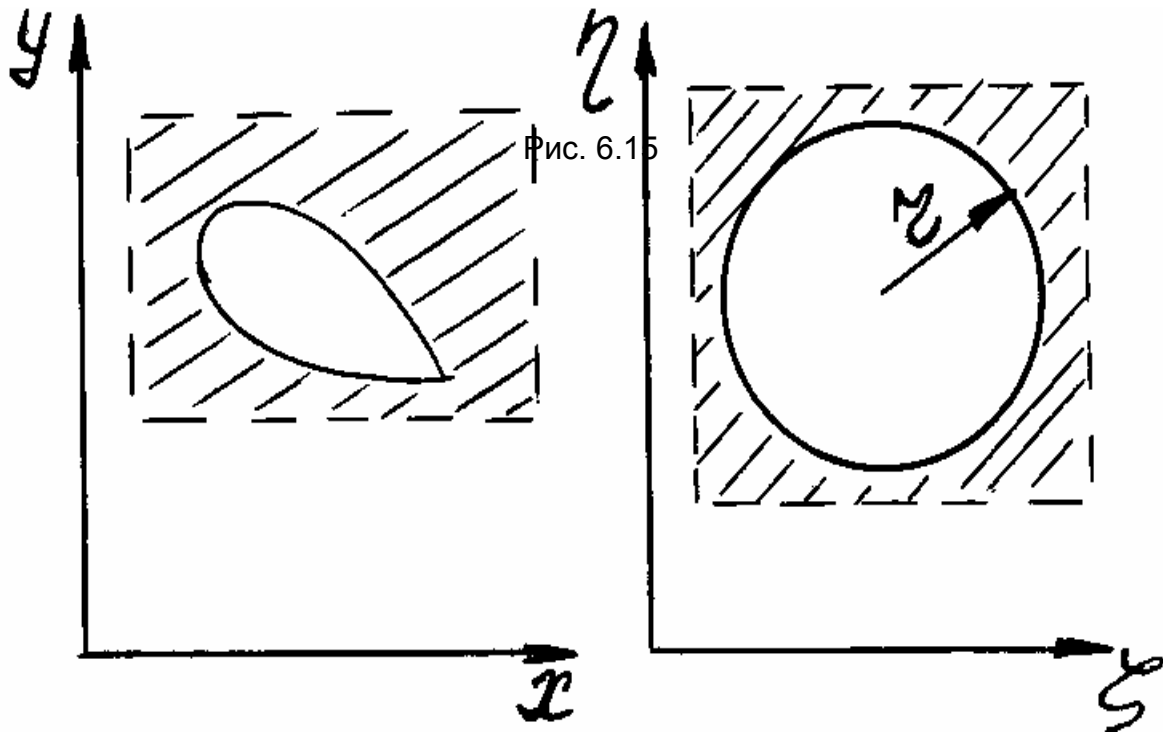
В плоскости  $z$  имеется какая-то фигура ( $A$ ), которую необходимо отобразить на плоскость  $\zeta$ . Эта операция может быть выполнена при одном непрременном условии: должно быть известно соотношение, устанавливающее связь  $\zeta$  и  $z$ , т.е.  $\zeta = f(z)$ . Эта зависимость носит название отображающей функции. Предположим, что она нам известна. Тогда, задавшись какой-то произвольной точкой на контуре  $A$ , например 1, можно вычислить  $z_1$ , и подставив это значение в отображающую функцию, найти значение  $\zeta_1$  и соответствующую точку на плоскости  $\zeta$  ( $1'$ ). Повторив эти операции для точек 2, 3 и т.д., найдем  $2'$ ,  $3'$ , ... . В результате этих действий получим контур  $B$  на плоскости  $\zeta$ , т.е. контур  $A$  отобразился в контур  $B$ . Такое преобразование получило название конформного. В теории функций комплексного переменного доказывается, что модуль производной  $\varphi'(z)$  характеризует изменение линейных размеров области при преобразовании, а аргумент ее определяет угол поворота радиуса-вектора. При этом преобразование, осуществляемое аналитической функцией, сохраняет эти углы во всех точках, где производная отображающей функции отличается от нуля. Теперь вопрос может быть сформулирован таким образом: какие же практические преимущества можно получить, используя метод конформных отображений?

а)

б)

Остановимся лишь на одном, но крайне важном случае. Как известно, одной из главных задач расчета крыла является определение его подъемной силы. Для ее нахождения необходимо знать скорости частиц в каждой точке потока, обтекающего крыло. Крыловой профиль - достаточно сложная фигура, и рассчитать скорости теоретическим путем не представляется возможным. Но, как было показано выше, расчет легко выполняется для цилиндра. Поэтому задача была бы решена, если бы удалось заменить обтекание крылового профиля обтеканием цилиндра. Это можно сделать с помощью конформного отображения.

Рассмотрим рис. 6.15. Конформно отобразив фигуру, заштрихованную на рис. 6.15а (внешность профиля) на заштрихованную фигуру рис. 6.15б (внешность окружности) мы сводим задачу обтекания профиля к задаче обтекания цилиндра. Рассчитав скорость в любой точке цилиндра, обратным переходом можно найти скорость в соответствующей ей точке



профиля.

Нахождение вида отображающей функции, позволяющей осуществить требуемое конкретными условиями рассматриваемой задачи конформное отображение, является отдельным специальным вопросом. Решение рассмотренной выше задачи было найдено Н.Е.Жуковским. Отображающая функция в этом случае имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{r^2}{z} \right) \quad (6.40)$$

и носит название функции Жуковского.

## 7. ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В механике жидкости понятию «гидродинамика» придается весьма широкий смысл. В настоящем пособии этот термин будет использоваться в его классическом значении, как раздел курса, который, в отличие от кинематики, рассматривающей движение жидкости без учета причин, обусловивших его, изучает как само движение, так и причины, приводящие к его возникновению. Движение жидкости вызывается действием сил, а если иметь в виду, что давление есть частное от деления силы на площадь, то можно считать, что причиной возникновения движения частиц с какими-то скоростями является разность (перепад) давлений. Таким образом, для расчета течений необходимо иметь уравнение, связывающее давление в точке со скоростью движения частицы.

### 7.1 Уравнения движения идеальной жидкости.

Уравнения движения идеальной жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях, положив в них все производные от  $\tau$  равными нулю и заменив нормальные напряжения давлениями, имея в виду, что  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ . Таким образом, уравнения гидродинамики принимают вид

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \quad (7.1)$$

либо в векторной форме

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{a} \quad (7.2)$$

Система (7.1) называется системой дифференциальных уравнений Эйлера для гидродинамики, она связывает давления и скорости в движущейся жидкости. Следует помнить, что выражения в правой части уравнений системы являются полными либо субстанциональными производными. Наличие конвективных членов ускорения приводит к тому, что система является нелинейной, содержащей четыре неизвестных: три проекции скорости и давление. Проекции единичных массовых сил обычно известны из постановки задачи.

Три уравнения (7.1) плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему.

### 7.2 Преобразование Громеки-Лэмба.

Рассмотрение теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы показывает, что жидкость, как любое материальное тело, может участвовать в поступательном и вращательном движениях.

Следует обратить внимание на то, что для совершения работы в современных технических устройствах может использоваться только энергия поступательного движения. Энергия же вращательного (вихревого) движения полностью теряется, рассеивается в окружающей среде, превращаясь в теплоту.

Система уравнений Эйлера (7.4) не учитывает факт существования этих двух движений, что в определенной степени обедняет ее. Поэтому целесообразно использовать преобразование, позволяющее учесть эту особенность движения жидких частиц, называемое преобразованием Громеки-Лэмба. Формально оно сводится к тому, что в выражение для ускорения вводятся члены, характеризующие вращение жидких частиц.

Рассмотрим лишь одну компоненту:

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (7.3)$$

Прибавим и вычтем в конвективной части ускорения выражение

$$u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Скомпонуем члены с учетом знаков:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} & u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \left( u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \\ & = -u_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + u_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Выражения в скобках есть не что иное, как удвоенные компоненты вихря  $\omega_z$  и  $\omega_y$ , т.е. можем записать

$$-2u_y \omega_z + 2u_z \omega_y = 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z)$$

Подставляя полученные значения в (7.3) имеем

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \quad (7.4)$$

и по аналогии

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \quad (7.5)$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \quad (7.6)$$

В векторной форме выражение для ускорения будет иметь вид:



$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{u}} \quad (7.7)$$

Если движение установившееся, то

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{a}} = \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{u}} \quad (7.8)$$

### 7.3 Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба.

Если в (7.2) в правую часть подставить ускорение в виде (7.7) либо (7.8), то это приводит к уравнению движения в форме Громеки-Лэмба. Для установившегося движения имеем

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho = \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{u}} \quad (7.9)$$

Выполним некоторые преобразования (7.9).

В разделе гидростатики было введено понятие о скалярной функции  $\Phi$ , называемой силовой. Было показано, что

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \quad (7.10)$$

Поскольку эта функция является полным дифференциалом, то можно записать

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad (7.11)$$

Сопоставляя (7.10) и (7.11), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z \quad (7.12)$$

С другой стороны вектор  $\dot{\mathbf{F}}$ , проекциями которого являются  $X$ ,  $Y$ , и  $Z$

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_x X + \mathbf{e}_y Y + \mathbf{e}_z Z \quad (7.13)$$

Из (7.12) и (7.13) следует, что

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{r}\mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{r}\mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{r}\mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \text{grad} \Phi \quad (7.14)$$

С учетом (7.14) выражение (7.9) принимает вид

$$\text{grad} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{\rho}{\rho} - \Phi \right) = -2\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{u}} \quad (7.15)$$

Следует иметь в виду, что эта форма записи справедлива лишь для несжимаемой жидкости, т.е. при условии  $\rho = \text{const}$ . И, наконец, уравнению движения (7.15) можно придать более удобную для анализа форму, умножив скалярно его левую и правую части на произвольный направленный отрезок

$$d\dot{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (7.16)$$

Опуская эту операцию, которую обучающийся при желании может выполнить самостоятельно, приведем лишь конечный результат

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \quad (7.17)$$

#### 7.4 Интегрирование уравнения движения для установившегося течения

Интегрирование уравнения движения (7.17) возможно лишь в случае, когда его правая часть равна нулю. Из теории определителей известно, что признаками равенства нулю являются: равенство нулю какой-либо строки или пропорциональность элементов одной строки элементам другой.

Исходя из физического смысла имеем четыре возможных случая:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (7.18)$$

$$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z} \quad (7.19)$$

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (7.20)$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (7.21)$$

Для любого из них можем записать

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0$$

И после интегрирования

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C \quad (7.22)$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то, как показано в разделе гидростатики,

$$\Phi = -gz$$

и (7.22) принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad (7.23)$$

Еще раз обратим внимание на то, что вид уравнения (7.23) одинаков вне зависимости от того, какой из четырех случаев равенства нулю определителя рассматривается. Однако смысл интеграла и область его применения различны. Именно поэтому следует разобраться в этом вопросе подробнее.

Первый случай, как известно, является признаком потенциальности движения. Интеграл (7.23) в этом случае называют интегралом Коши-Лагранжа. Он справедлив для любых точек жидкости, движущейся без вращения частиц, т.е. потенциально.

Второй случай является признаком коллинеарности вектора вихря и вектора скорости. Это весьма редкий случай так называемого винтового движения.

Третий случай характеризует движение жидкой частицы вдоль вихревой линии, а четвертый - движение вдоль линии тока. Интеграл (7.23) при этом носит название интеграла Бернулли. Он справедлив как для потенциального, так и для вихревого движений. Именно этот случай и будет интересовать нас в дальнейшем.

## 7.5 Упрощенный вывод уравнения Бернулли.

В ряде пособий и учебников рассматривается упрощенный вывод уравнения Бернулли. Поэтому с целью расширения и углубления представления об этом основополагающем уравнении механики жидкости представляется целесообразным рассмотреть и этот подход. В основу его положено принимаемое без каких-либо доказательств положение о том, что рассматривается жидкая частица, движущаяся вдоль линии тока. После чего производится преобразование системы дифференциальных уравнений Эйлера (7.1) путем умножения каждой из его проекций соответственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и почленного их сложения аналогично тому, как это делалось в гидростатике. Это преобразование уже рассматривалось в случае, когда из массовых сил действуют лишь силы тяжести (см. раздел «Гидростатика»). Оно приводит к соотношению:

$-gdz - \frac{dp}{\rho}$ . Поэтому рассмотрим лишь правую часть. Имеем

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz$$

Считая, что  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ;  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ;  $\frac{dz}{dt} = u_z$ , можем записать:

$$\begin{aligned} u_x dx + u_y dy + u_z dz &= \frac{1}{2} du_x^2 + \frac{1}{2} du_y^2 + \frac{1}{2} du_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2 = d \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

Таким образом

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} = d \frac{u^2}{2}$$

либо

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d \frac{u^2}{2} = 0 \quad (7.24)$$

Это выражение называют уравнением Бернулли в дифференциальной форме. При условии  $\rho = \text{const}$  (для несжимаемой жидкости) интегрирование его дает

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad (7.25)$$

т.е. соотношение (7.23).

Очевидно, для обеспечения математической строгости следовало бы доказать, что вдоль линии тока проекции вектора скорости могут быть представлены не как частные, а как полные производные от соответствующих координат частицы. Но при этом вывод уравнения Бернулли утратил бы свою простоту.

## 7.6 Энергетический смысл уравнения Бернулли

Прежде чем приступить к анализу физического содержания полученного соотношения, следует вспомнить одно важное обстоятельство. При введении понятия о струйке было показано (см. раздел «Кинематика»), что одним из ее свойств является равномерное распределение скоростей в пределах любого ее поперечного сечения. Это означает, что соотношение (7.25) остается справедливым для любой линии тока, проходящей внутри струйки. Поэтому уравнение (7.25) можно назвать уравнением Бернулли для струйки идеальной жидкости. Для двух произвольных поперечных сечений струйки можно записать

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \quad (7.26)$$

Выясним физический смысл величин, входящих в уравнение Бернулли. Любое правильное физическое соотношение размерностно однородно, т.е. все его члены имеют одинаковую размерность, поэтому достаточно рассмотреть один из его членов. Наиболее удобно обратиться к третьему -  $\frac{u^2}{2}$ . Эта величина выражается в  $\text{м}^2/\text{с}^2$ . Умножим и разделим числитель и знаменатель на кг, что дает:

$$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \frac{\text{кг}}{\text{кг}} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \text{кг}} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

Из чего следует, что каждый член уравнения выражает энергию, отнесенную к единице массы, т.е. удельную энергию. Это позволяет придать уравнению Бернулли энергетический смысл. Первые два члена выражают удельную потенциальную энергию (положения -  $gz$  и давления -  $\frac{p}{\rho}$ ), а третий - удельную кинетическую энергию. Следовательно, полная удельная энергия в любом сечении струйки остается неизменной. Другими словами, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии в ее простейшей форме - форме сохранения механической энергии.

## 7.7 Уравнение Бернулли в форме напоров.

В практических приложениях широко используется другая форма уравнения Бернулли - форма напоров. Разделив обе части уравнения (7.26) на ускорение свободного падения  $g$ , получаем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (7.27)$$

Каждый член (7.27) имеет линейную размерность и выражает напор, под которым в общем случае понимают высоту столба жидкости, уравнивающего давление в данной точке. Таким образом,  $Z$  - геометрический напор, характеризующий положение жидкой частицы над какой-то произвольной плоскостью,

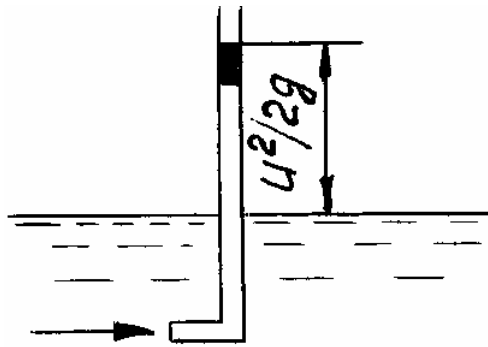
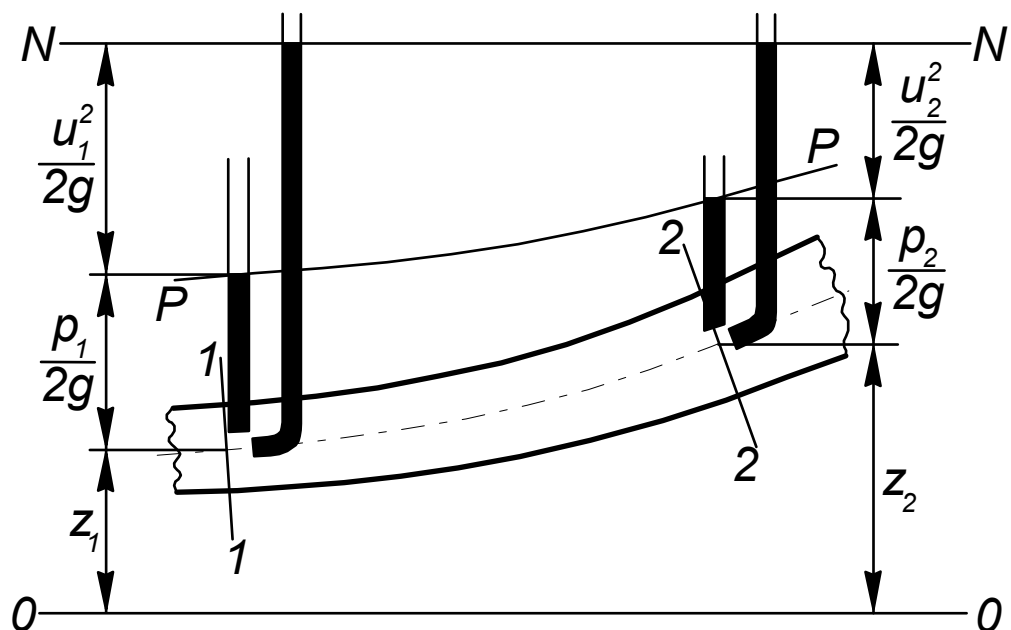


Рис. 7.1

называемой плоскостью отсчета;  $\frac{p}{\rho g}$  - пьезометрический напор - высота столба жидкости, уравнивающая давление в данной точке;  $\frac{u^2}{2g}$  - скоростной напор, представляющий собой высоту столба жидкости в так называемой трубке полного напора (трубке Пито). Принцип действия этого устройства легко уясняется из рис. 7.1.

Сумма двух первых членов носит название гидростатического напора, а трех - полного либо гидродинамического напора. Таким образом, уравнению Бернулли придается геометрическое толкование, которое сводится к следующему. Сумма трех высот: геометрической ( $Z$ ), пьезометрической ( $\frac{p}{\rho g}$ ) и скоростной ( $\frac{u^2}{2g}$ ) есть величина постоянная вдоль струйки. Либо, что то же самое, полный либо гидродинамический напор при движении вдоль струйки остается неизменным. Сказанное иллюстрируется рис. 7.2, который иногда называют диаграммой уравнения Бернулли.

На рис. 7.2  $N-N$  - напорная линия;  $O-O$  - плоскость (линия) отсчета;  $P-P$  - пьезометрическая линия, лежащая ниже напорной на величину скоростного напора в данном сечении.



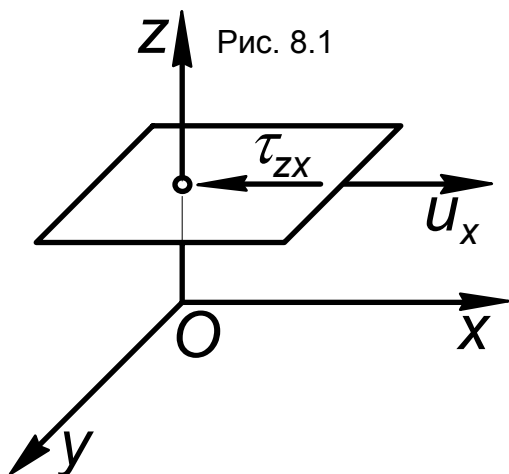


Рис. 8.1

Рис. 7.2

## 8. ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### 8.1 Модель вязкой жидкости

Приступая к рассмотрению движения вязкой жидкости, необходимо прежде всего уяснить терминологию, т. е. смысл, вкладываемый в понятие «вязкая жидкость».

С математических позиций необходимо установить вид функциональной зависимости для напряжений, либо, другими словами, сформировать модель вязкой жидкости. В дальнейшем под вязкой мы будем понимать жидкость, удовлетворяющую трем гипотезам: линейности, однородности и изотропности.

#### 8.1.1. Гипотеза линейности .

Применим закон Ньютона к жидкости, движущейся параллельно плоскости  $xOy$  (рис. 8.1), что дает

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Воспользуемся результатом, полученным при рассмотрении теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы. Согласно теореме, скорость угловой деформации относительно оси  $y$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Так как движение происходит в плоскости  $xOy$ , то  $u_z = 0$  и

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

и, следовательно, касательное напряжение

$$\tau_{zx} = 2\mu \gamma_y \quad (8.1)$$

Полученный результат иллюстрирует так называемый закон трения Стокса. Согласно этому закону, напряжения, возникающие в жидкости, в отличие от твердого тела, пропорциональны не величинам, а скоростям деформаций, и связаны с ними линейной зависимостью. При этом коэффициент пропорциональности остается неизменным и равным  $2\mu$ .

Кроме того, согласно закону Стокса касательные напряжения, как показано выше, пропорциональны скоростям угловой деформации, а нормальные - скорости линейной деформации, т.е.  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Таким образом, можем записать

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \quad (8.2)$$

и т.д.

Рассмотрим теперь нормальные напряжения, возникающие от сил вязкости. Согласно закону Стокса, их можно записать в виде так называемых девиаторов напряжения, имеющих вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Полные нормальные напряжения отличаются тем, что помимо записанных выше в любой, как в вязкой, так и в невязкой жидкости, действуют и статические давления. Другими словами

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Выполним следующую операцию: из утроенной величины  $p_{xx}$  вычтем сумму  $(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ . Это дает:

$$\begin{aligned} 3p_{xx} - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= -3p + 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \\ - \left[ -3p + 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] &= 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

откуда найдем

$$p_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$$

В качестве давления в вязкой жидкости принимают среднее арифметическое, т.е.  $p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$ . И, следовательно,

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}$$

Для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0$ , и выражения упрощаются.

### 8.1.2. Гипотеза однородности

Предполагается, что вид линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций одинаков для всех точек пространства.

### 8.1.3. Гипотеза изотропности

Вязкая жидкость предполагается изотропной, т.е. ее свойства в любом направлении одинаковы.

## 8.2 Уравнение движения вязкой жидкости. (уравнение Навье-Стокса)

18 марта 1822 года в докладе, представленном Французской академии наук, Клод Луи Навье писал о полученных им уравнениях: «Хотя уравнения основаны на гипотезе Ньютона о том, что касательные напряжения пропорциональны скорости деформации, никак нельзя сказать, что они не выражают ничего нового».

Уравнения движения вязкой жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях (2.16), выполнив некоторые преобразования. Рассмотрим лишь одну проекцию этих уравнений:

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

Как было показано при рассмотрении модели вязкой жидкости, нормальные напряжения

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}$$

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой ( $\operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0$ ), тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (8.6)$$

Касательное напряжение  $\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (8.7)$$

аналогично

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \quad (8.8)$$

Суммируя (8.6), (8.7) и (8.8) и группируя члены, получаем:



$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right)$$

Третий член можно записать в виде:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{u}$$

но жидкость несжимаема, и  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ . Таким образом получаем:

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (8.9)$$

Выражение в скобках есть ни что иное, как оператор Лапласа -  $\nabla^2 \vec{u}$ , а  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ . Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Аналогично можно расписать и две другие проекции. Полученная система уравнений движения вязкой жидкости и носит название системы уравнений Навье-Стокса.

В векторной форме можно записать

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (8.11)$$

Как следует из (8.11), это уравнение отличается от уравнения движения идеальной жидкости дополнительным членом ( $\nu \nabla^2 \vec{u}$ ), учитывающим действие сил вязкого трения.

Целью гидродинамического расчета является нахождение полей скоростей и давлений, т.е. в результате расчета должны быть найдены четыре величины:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и  $p$ . Принципиально это оказывается возможным, так как три уравнения Навье-Стокса (в проекциях) плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными, а проекции массовых сил ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) задаются условиями конкретной задачи.

С чисто математических позиций уравнения Навье-Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств нелинейность, обусловленная наличием конвективных членов ускорения. Следует отметить, что до настоящего времени вследствие практически непреодолимых математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. при сохранении

всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Известны лишь отдельные частные решения.

Одним из основных граничных условий при интегрировании является условие «прилипания», т.е. равенство нулю скорости жидкости на стенке.

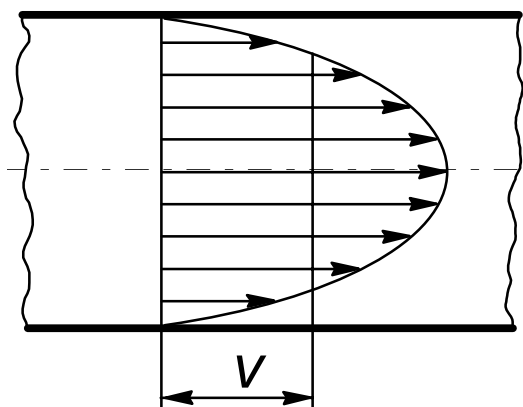
Рис. 9.1

## 9. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (основы гидравлики).

Одномерными называются течения, в которых основные параметры потока зависят лишь от одной координаты, направление которой совпадает с направлением вектора скорости. Использование одномерных течений позволяет достаточно просто решать многие важные прикладные задачи. Раздел механики жидкости, изучающий одномерные течения, называют гидравликой.

### 9.1 Расход потока и средняя скорость.

Для решения широкого круга прикладных инженерных задач плодотворной явилась введенная Эйлером так называемая струйная модель потока. Согласно этой модели поток представляется состоящим из бесконечного множества струек жидкости. При рассмотрении потока поперечные сечения в нем выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока были нормальны к ним. В этом случае сечение потока называется «живым». Очевидно, что если линии тока параллельны, то живое сечение будет плоским.



Ранее, в разделе «Кинематика», было показано, что элементарный объемный расход несжимаемой жидкости может быть определен как

$$dQ = u dA$$

где  $u$  - скорость в сечении струйки,  $dA$  - площадь ее поперечного сечения.

В соответствии со струйной моделью расход потока

$$Q = \iint_A u dA \quad (9.2)$$

Рассмотрим движение жидкости в трубе круглого поперечного сечения. В силу тормозящего действия сил вязкого трения распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эпюра скорости) будет иметь вид,

показанный на рис. 9.1. Для удобства перейдем к цилиндрическим координатам  $(r, \theta)$ , где  $\theta$  - полярный угол.

В этой системе

$$dA = r dr d\theta \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.2) получаем

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) dr d\theta \quad (9.4)$$

Имея в виду, что  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ , имеем

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r) r dr \quad (9.5)$$

Запись  $u(r)$  обозначает, что местные скорости в сечении трубы изменяются по радиусу. Другими словами,  $u(r)$  описывает закон изменения скорости, т.е. является математическим описанием эпюры. Следовательно, для того, чтобы вычислить расход по (9.5), необходимо знать уравнение эпюры скорости, которое, как правило, неизвестно. Поскольку расход является важнейшим параметром, знание которого требуется при проведении любых гидравлических расчетов, необходимо найти путь, позволяющий преодолеть возникшее затруднение.

Рассмотрим, как решается эта задача в механике жидкости. С чисто математических позиций интеграл в правой части выражает объем эпюры скорости. Представим теперь, что при неизменном расходе  $Q$  в силу каких-то причин жидкость потеряла вязкость. Это, очевидно, приведет к тому, что эпюра начнет перестраиваться и, так как исчезнут силы вязкого трения, то все частицы жидкости будут двигаться с какой-то одинаковой скоростью  $V$  (см. рис. 9.1), а так как по условию расход остается тем же, то объем новой эпюры равен объему старой. При этом условии  $u(r) = v = \text{const}$ , и из (9.5) получаем

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr = 2\pi v \int_0^R r dr = 2\pi v \frac{R^2}{2} = vA \quad (9.6)$$

Скорость  $v$ , введенная таким образом носит название средней либо среднерасходной скорости. Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того, чтобы расход был равен его истинному значению.

С физической точки зрения использование понятия средней скорости, одинаковой для всех частиц жидкости в сечении, позволяет свести задачу о движении жидкости в трубах и каналах к одномерной.

## 9.2 Слабodeформированные потоки и их свойства.

Рассмотрим движение в трубе с несколько иных позиций. Если считать его установившимся, то все производные по времени, входящие в уравнение движения, равны нулю. Если исходить из одномерной модели, то равны нулю и компоненты скорости  $u_y$  и  $u_z$ . При этом из уравнения

неразрывности следует, что  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ . Применительно к этому случаю

система дифференциальных уравнений Навье-Стокса принимает вид:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Последние два уравнения (9.7) совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в плоскости поперечного сечения движущейся жидкости давления распределены по гидростатическому закону

$$z + \frac{\rho}{\rho g} = \text{const} \quad (\text{либо } gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}) \quad (9.8)$$

Этот вывод приближенно справедлив для слабodeформированных потоков. Под слабodeформированными понимают потоки, у которых угол расхождения линий тока мал, а радиус кривизны - велик, т.е. понятие это носит скорее качественный, чем количественный характер.

## 9.3 Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.

Как уже отмечалось, уравнение Навье-Стокса в подавляющем большинстве случаев не поддаются интегрированию. Вместе с тем, практическая деятельность, связанная с необходимостью использования законов движения жидких сред, настоятельно требовала разработки инженерных методов расчета.

Одним из путей решения этой задачи, оказавшимся наиболее плодотворным, явился путь обобщения уравнения Бернулли, т.е. распространения его на поток вязкой жидкости. В основу этого метода, как уже отмечалось, положена струйная модель - представление о потоке как о бесконечно большой сумме струек, протекающих через сечение.

Исходим из того, что движение установившееся и в рассматриваемом сечении поток слабо деформирован. Определим энергию, проносимую секундной массой струйки через сечение (т.е. мощность струйки). Эта величина может быть найдена как произведение

полной удельной энергии струйки  $(gz + \frac{\rho}{\rho} + \frac{u^2}{2})$  на ее массовый расход  $(\rho u dA)$ . В справедливости этого легко убедиться непосредственно. Действительно, удельная энергия - Дж/кг, массовый расход - кг/с, их произведение

$$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \frac{\text{кг}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$$

Таким образом

$$dN = \left( gz + \frac{\rho}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dA \quad (9.9)$$

Секундная энергия (мощность) потока в соответствии со струйной моделью

$$N = \iint_A \left( gz + \frac{\rho}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dA \quad (9.10)$$

либо

$$N = \rho \iint_A \left( gz + \frac{\rho}{\rho} \right) u dA + \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \quad (9.11)$$

Так как поток слабдеформированный, то  $gz + \frac{\rho}{\rho} = \text{const}$  и первый интеграл принимает вид

$$\rho \left( gz + \frac{\rho}{\rho} \right) \iint_A u dA = \rho \left( gz + \frac{\rho}{\rho} \right) Q \quad (9.12)$$

$$N = \left( gz + \frac{\rho}{\rho} \right) \rho Q + \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \quad (9.13)$$

По физическому смыслу второй член в (9.13) представляет собой кинетическую энергию секундной массы.

Поскольку мы ограничимся одномерным представлением, то в (9.13) необходимо ввести среднюю скорость. Поступим следующим образом:

разделим обе части уравнения на массовый расход  $\rho Q$ , т.е. отнесем это соотношение, как и уравнение Бернулли для струйки, к единице массы

$(N \rightarrow \text{Дж/с}; \rho Q \rightarrow \text{кг/с}; \frac{N}{\rho Q} \rightarrow \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{с}} \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$  и, следовательно,  $E = \frac{N}{\rho Q}$  -

удельная энергия.

Таким образом, имеем

$$E = gz + \frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{2Q} \iint_A u^3 dA \quad (9.14)$$

Разделив и умножив третий член на квадрат средней скорости  $v^2$ , с учетом того, что  $Q = vA$ , получим

Рис. 9.2

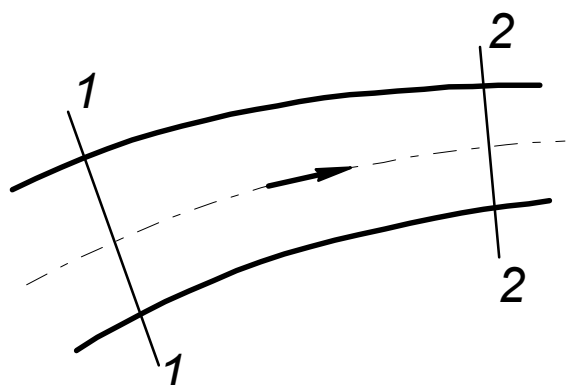
$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \frac{1}{v^3 A} \iint_A u^3 dA \quad (9.15)$$

Обозначим выражение  $\frac{1}{v^3 A} \iint_A u^3 dA = \alpha$ ; тогда

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} \quad (9.16)$$

Величина  $\alpha$  носит название коэффициента кинетической энергии, корректива скорости либо коэффициента Кориолиса. Физический смысл этой величины будет раскрыт позже.

Разделив обе части (9.16) на ускорение свободного падения  $g$ , выразим это соотношение в единицах длины, т.е. в форме напоров



$$\frac{E}{g} = H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (9.17)$$

Рассмотрим движение потока вязкой жидкости в канале (рис. 9.2) от сечения 1-1 к сечению 2-2. Обозначим удельную энергию потока в сечении 1-1 через  $E_1$ , а в 2-2 -  $E_2$ .

Так как жидкость вязкая, то процесс ее перемещения сопровождается диссипацией энергии, т.е. какая-то ее часть расходуется на преодоление сил внутреннего трения и превращается в тепло, следовательно,  $E_2 < E_1$ . Поэтому баланс энергии для выбранных сечений должен быть записан в виде

$$E_1 = E_2 + \Delta e \quad (9.18)$$

где  $\Delta e$  - потери энергии.

Раскрывая значения  $E_1$  и  $E_2$ , получаем:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta e \quad (9.19)$$

Это и есть энергетическая форма уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости.

В практических приложениях чаще используют уравнение Бернулли, выраженное в напорах

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h \quad (9.20)$$

где  $\frac{\Delta e}{g} = \Delta h$  - потери напора.

Для газовых потоков (без учета сжимаемости), а также при расчетах систем гидравлического привода обычно используют уравнение Бернулли в форме давлений

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho \alpha_1 v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho \alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta p \quad (9.21)$$

где  $\Delta p$  - потери давления.

Обычно в упомянутых системах член  $\rho g z$  оказывается пренебрежимо малым по сравнению с остальными. В этих случаях (9.21) принимает вид:

$$p_1 + \frac{\rho \alpha_1 v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta p \quad (9.22)$$

#### 9.4 Физический смысл коэффициента Кориолиса.

Как уже упоминалось, коэффициент  $\alpha$  носит название коэффициента кинетической энергии, коррективы скорости, коэффициента Кориолиса. Выясним физический смысл этой величины.

Как уже отмечалось выше, второй член в уравнении (9.13) представляет собой кинетическую энергию секундной массы потока, определяемую истинным распределением скоростей в сечении, т.е.

$$E_k^{ucm} = \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \quad (9.23)$$

Если бы скорости в сечении были бы распределены равномерно, то  $u = v = \text{const}$  ( $v$  - средняя скорость потока), и кинетическая энергия потока была бы

$$E_k^{cp} = \frac{\rho}{2} \iint_A v^3 dA = \frac{\rho}{2} v^3 \iint_A dA = \frac{\rho v^3 A}{2} \quad (9.24)$$

Разделив (9.23) на (9.24), получим:

$$\frac{E_k^{ucm}}{E_k^{cp}} = \frac{1}{v^3 A} \iint_A u^3 dA = \alpha \quad (9.25)$$

Следовательно, коэффициент Кориолиса представляет собой отношение кинетической энергии потока, вычисленной по истинному распределению скоростей, к кинетической энергии, определенной по средней скорости.

Для уяснения вопроса рассмотрим гипотетический «поток», состоящий из двух струек, скорости которых  $u_1 = 2 \text{ м/с}$  и  $u_2 = 4 \text{ м/с}$  и вычислим коэффициент Кориолиса.

Истинная кинетическая энергия (сумма кинетических энергий струек)

$$E_k^{ucm} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 10 \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2}$$

Средняя скорость  $v = \frac{u_1 + u_2}{2} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;

$$E_k^{\text{ср}} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

и  $\alpha = \frac{E_k^{\text{ист}}}{E_k^{\text{ср}}} = \frac{10}{9}$ , т. е.  $\alpha > 1$  (истинная кинетическая энергия больше средней).

Легко убедиться, что чем больше неравномерность распределения скоростей, тем больше коэффициент Кориолиса. Так, если  $u_1 = 2$  м/с, а  $u_2 = 6$  м/с, то  $\alpha = \frac{5}{4}$ . Очевидно, что минимальное значение  $\alpha = 1$  будет при равномерном распределении скоростей. Действительно, пусть  $u_1 = u_2 = 4$  м/с, тогда  $E_k^{\text{ист}} = 16 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$  и  $E_k^{\text{ср}} = 16 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$ . Следовательно, можно утверждать, что  $\alpha$  корректирует ошибку, возникающую при вычислении кинетической энергии при замене истинного распределения скоростей условным равномерным.

Забегая несколько вперед, отметим, что в природе существует два принципиально отличающихся режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном течении в трубах  $\alpha_n = 2$ , при турбулентном  $\alpha_m = 1,02 \dots 1,04$ . Это позволяет утверждать, что в турбулентном потоке скорости в поперечном сечении распределены существенно равномерней, чем в ламинарном (эпюра турбулентного потока более «наполненная», ближе к прямоугольной по сравнению с эпюрой ламинарного потока).

Подведем некоторые итоги. Использование струйной модели потока и сведение его к одномерному путем введения представления о средней скорости позволяют получить одно из основных уравнений гидродинамики - уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости. Принципиально, с помощью этого уравнения можно рассчитать движение жидкости в каналах при установившемся течении и условии, что в выбранных сечениях поток слабodeформированный либо параллельно-струйный. Однако, для полного решения задачи необходимо уметь определять потери напора ( $\Delta h$ ), возникающие при движении жидкости в каналах. Эта далеко не простая задача и будет являться предметом дальнейшего рассмотрения.

## 10. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ.

В 80-х годах прошлого столетия работы, связанные с изучением сопротивления движению жидкости при течении в трубах, зашли в тупик. Опыты одних исследователей (немецкий инженер-строитель Г.Хаген, французский врач Ж.Пуазейль) показали, что сопротивление линейно зависит от скорости. В то же время не менее тщательные и точные опыты



французского инженера А.Дарси свидетельствовали, что сопротивление пропорционально квадрату скорости. Возникшее противоречие тормозило развитие инженерной практики и требовало разрешения.

Наблюдения, выполненные Г.Хагеном еще в 1855 г. показали, что характер движения в трубе изменяется при достижении каких-то определенных условий. На это же со всей определенностью было указано в 1870 году нашим соотечественником проф. Н.Н.Петровым при разработке им теории гидродинамической смазки. Эта гипотеза нашла блестящее подтверждение в опытах английского физика Осборна Рейнольдса, результаты которых были опубликованы в 1883-1884 годах и имели далеко идущие последствия для всей механики жидкости.

Идея опытов отличалась ясностью и предельной простотой. В стеклянную трубу, скорость движения воды в которой могла регулироваться, Рейнольдс вводил струйки красителя. При малых скоростях струйки двигались параллельно оси трубы и вся картина представлялась неподвижной. При увеличении скорости воды за счет открытия крана картина изменялась, струйка красителя сначала приобретала синусоидальную форму, а дальнейшее увеличение скорости приводило к ее размыву, что свидетельствовало о беспорядочном движении.

Первый режим - спокойный, слоистый без перемешивания частиц был назван ламинарным. Второй - бурный, хаотичный, приводящий к перемешиванию частиц, позднее по предложению У. Томсона (Лорда Кельвина) получил название турбулентного. Как истинный ученый, Рейнольдс не остановился на констатации факта. Он предположил, что увеличении скорости потока приводит к возникновению каких-то возмущений, дестабилизирующих его структуру. Если понимать под устойчивостью способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости. При этом из двух категорий сил, действующих на жидкие частицы, вязкого трения и инерции, первые играют стабилизирующую роль, а вторые - дестабилизирующую. Таким образом, отношение этих сил может служить критерием (мерой) устойчивости потока, т.е.

$$\text{Мера устойчивости} = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкого трения}}$$

Такой подход позволяет получить и количественную меру. Действительно, сила инерции  $F = m a$ . Массу можно представить как произведение плотности на объем, но объем пропорционален кубу линейных размеров, т. е.  $m \cong \rho l^3$ . Ускорение есть изменение скорости в единицу времени

$a = \frac{u}{t}$ . Таким образом

$$F_{ин} \cong \frac{\rho l^3 u}{t} \quad (10.1)$$

По смыслу  $l/t$  есть скорость, следовательно,

$$F_{ин} \cong \rho l^2 u^2 \quad (10.2)$$

Сила вязкого трения (по Ньютону)

$$F_{тр} = \mu \frac{du}{dy} S \quad (10.3)$$

Действуя аналогично предыдущему, получаем

$$F_{тр} \cong \mu \frac{U}{l} l^2 \cong \mu U l$$

и безразмерный комплекс, характеризующий устойчивость, приобретает вид

$$\frac{F_{ин}}{F_{тр}} = \frac{\rho U l}{\mu} \quad (10.4)$$

В дальнейшем это соотношение получило название числа Рейнольдса, т.е.

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} \quad (10.5)$$

где  $U$  - характерная скорость течения;  $l$  - характерный линейный размер.

Оригинальное толкование этого комплекса дано самим Рейнольдсом. Он писал: «Жидкость можно уподобить отряду воинов, ламинарное течение - монолитному походному строю, турбулентное - беспорядочному движению. Скорость жидкости - скорость отряда, диаметр трубы - величина отряда. Вязкость - дисциплина, а плотность - вооружение. Чем больше отряд, чем быстрее его движение и тяжелей вооружение, тем раньше распадается строй».

Для круглых труб характерный размер - диаметр, характерной скоростью является средняя скорость. С учетом этого, имея в виду, что

$\frac{\mu}{\rho} = \nu$ , выражение (10.5) принимает вид

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (10.6)$$

При течении в каналах некруглого сечения в качестве характерного размера принимают так называемый гидравлический радиус

$$R = \frac{A}{\Pi} \quad (10.7)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения канала;  $\Pi$  - смоченный периметр (часть периметра, находящаяся в контакте с жидкостью).

Для круглых труб при напорном движении  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $\Pi = \pi d$  и

$R = \frac{d}{4}$ , т.е. гидравлический радиус в два раза меньше геометрического.

Одним из наиболее существенных результатов, обнаруженных в опытах Рейнольдса являлось то, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходил при одном и том же численном значении

введенного им критерия устойчивости, названного впоследствии критическим значением числа Рейнольдса ( $Re_{кр}$ ). По данным многочисленных опытов в круглых трубах  $Re_{кр} \approx 2300$ . Это так называемое нижнее критическое число Рейнольдса, которое получают, если не принимать специальных мер по стабилизации потока. При принятии мер, переход к турбулентному течению можно существенно затянуть. При выполнении технических расчетов принято считать, что если число Рейнольдса, вычисленное по фактическим значениям параметров, меньше критического, то режим ламинарный, и наоборот.

## 11. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ.

При рассмотрении уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса) отмечалось, что интегрирование их в большинстве случаев связано с непреодолимыми математическими трудностями. Однако известны и исключения. К числу их относится ламинарное течение между параллельными пластинами, одна из которых движется с какой-то скоростью  $U$ . Это так называемое течение Куэтта.

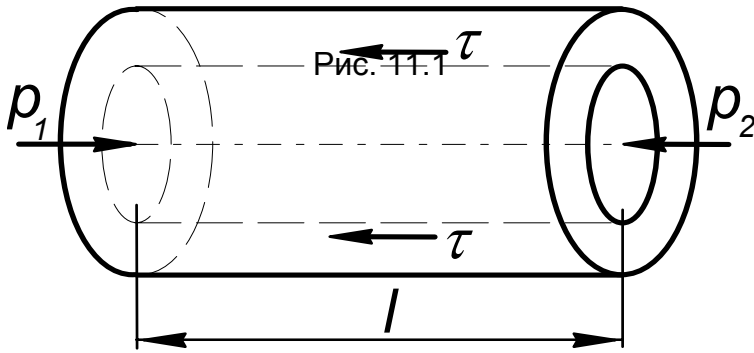
Рассмотрение закономерностей этого течения можно найти в оригинально построенном современном американском курсе прикладной гидродинамики: Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. -М.: Энергия, 1971. - 480 с.

Другим примером, интересующим нас в данном случае, является установившееся течение в круглой трубе, происходящее под действием постоянного перепада давлений - течение Пуазейля.

Профессор медицины Жан Пуазейль (1799-1869 гг.) во введении к своему трактату «Движение жидкостей в трубах малого диаметра» писал: «Я начал свои исследования потому, что прогресс в физиологии требовал определения законов движения жидкости в трубах малого диаметра (порядка 0,1 мм). Конечно, Дю Буа, Жирар, Навье и другие уже исследовали эти проблемы, однако они нуждаются в дальнейшем аналитическом и экспериментальном изучении, что было необходимо для надежного согласования теории с экспериментом». Опыты, выполненные Пуазейлем с трубкой диаметром 0,14 мм согласовывались с полученным им соотношением до тех пор, пока длина трубки составляла 51 мм; при уменьшении длины эта зависимость не соблюдалась. Этот факт и объясняется переходом от ламинарного к турбулентному режиму течения.

Как отмечалось выше, закономерности ламинарного течения в трубах можно получить путем прямого интегрирования уравнений Навье-Стокса. Решение задачи таким методом можно найти в книге: Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. -М.: Изд-во оборонной промышл., 1956. -483 с.

В данном пособии мы воспользуемся другим способом, позволяющим получить более ясные физические представления.



Рассматриваем установившееся ламинарное течение в горизонтальной трубе, происходящее под действием постоянного перепада давления. Радиус трубопровода -  $R$ .

Двумя сечениями, отстоящими на расстоянии  $l$

друг от друга, выделим отсек трубопровода, и в нем цилиндр радиуса  $r$ . Составим уравнение движения. Так как течение установившееся, то сумма проекций на ось всех сил, действующих на цилиндр, должна быть равна нулю. Другими словами, активные силы, приводящие частицы жидкости в движение, должны быть равны силам сопротивления.

Активные силы:  $p_1 A - p_2 A = \Delta p A = \pi r^2 \Delta p$ .

Силы сопротивления:  $2\pi r l \tau$ .

Таким образом,  $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$  и

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2l} \quad (11.1)$$

Из (11.1), в частности, следует, что касательные напряжения изменяются вдоль радиуса по линейному закону. С другой стороны, по Ньютону касательные напряжения

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (11.2)$$

Знак «минус» потому, что направления отсчета  $u$  и  $r$  противоположны.

Приравнявая (11.1) и (11.2), получаем

$$\frac{\Delta p r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr} \quad (11.3)$$

Либо после разделения переменных

$$du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r dr \quad (11.4)$$

и после интегрирования

$$u = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C \quad (11.5)$$

Произвольную постоянную интегрирования находим из граничных условий: при  $r = R$   $u = 0$  (условие прилипания), и

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

Следовательно,

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad (11.6)$$

либо

$$u = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (11.7)$$

Максимальная скорость движения частиц будет на оси трубы, т.е. при  $r = 0$ , а ее величина

$$u_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \quad (11.8)$$

Подставляя (11.8) в (11.7) получим

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (11.9)$$

Из чего следует, что в поперечном сечении трубы скорости распределены по параболическому закону, т.е. эпюра скорости представляет собой параболоид вращения.

Выражение (11.9) можно представить в виде

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad (11.10)$$

Из чего следует, что отношение скорости в любой точке к скорости на оси не зависит от расхода, рода жидкости и материала стенок трубы: при всех значениях  $Re < Re_{кр}$  оно одинаково.

Определим расход, протекающий через трубопровод. При введении понятия о средней скорости было показано, что

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r) r dr \quad (11.11)$$

где  $u(r)$  - уравнение эпюры скорости.

Воспользуемся (11.6), что дает

$$Q = \frac{2\pi \Delta p}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \quad (11.12)$$

Выполнив интегрирование и имея в виду (11.8), можно получить

$$Q = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2} = \frac{1}{2} u_{\max} A = vA$$

Из чего следует, что

$$u_{\max} = 2v \quad (11.13)$$

Раскрывая значение  $u_{\max}$  по (11.8), получаем выражение для определения потерь давления при ламинарном режиме течения в круглой трубе

$$\Delta p = \frac{8\mu l v}{R^2} \quad (11.14)$$

Либо, заменяя радиус диаметром,

$$\Delta p = \frac{32\mu l v}{d^2} \quad (11.15)$$

Полученное соотношение носит название формулы Хагена-Пуазейля. Для потерь напора с учетом того, что  $\Delta p = \rho g \Delta h$ , формула принимает вид

$$\Delta h = \frac{32\mu l v}{\rho g d^2} \quad (11.16)$$

Важнейший вывод, следующий из этого соотношения, можно сформулировать так: потери давления (напора) при ламинарном течении в круглых трубах линейно зависят от средней скорости.

Выполним некоторые формальные преобразования формулы Хагена-Пуазейля, которые окажутся полезными в дальнейшем. Умножим числитель и знаменатель (11.16) на  $2v$ , что дает

$$\Delta h = \frac{32 \cdot 2v}{vd} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64v}{vd} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re d} \frac{l}{2g} \frac{v^2}{d} \quad (11.17)$$

Таким образом, можем записать, что в формуле  $\Delta h = f(v^m)$  при ламинарном течении  $m = 1$ .

## 12. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ.

### 12.1. Общие сведения.

Теория турбулентных течений представляет собой важнейший для практики, но и наиболее сложный раздел гидродинамики.

Как уже отмечалось, первые серьезные исследования перехода к турбулентности были выполнены О. Рейнольдсом в 1883 году. Им же со ссылкой на Стокса был предложен ответ: «Общей причиной изменения стационарного течения на завихряющееся является то обстоятельство, что при некоторых условиях стационарное движение становится неустойчивым, так что бесконечно малые возмущения могут привести его к переходу в волнистое движение». «Волнистое движение», так первоначально было названо турбулентное движение Рейнольдсом. К сожалению, исследование бесконечно малых возмущений не дало критических значений, близких к наблюдавшимся в опытах.

Основной, определяющей чертой турбулентного движения является его хаотичность. Это означает, что скорость (и другие параметры) в любой точке потока зависят от времени. Более того, эти флуктуации скорости в данной точке также являются хаотическими.

Подробный исторический обзор развития теории турбулентности можно найти в капитальном двухтомном труде известных советских

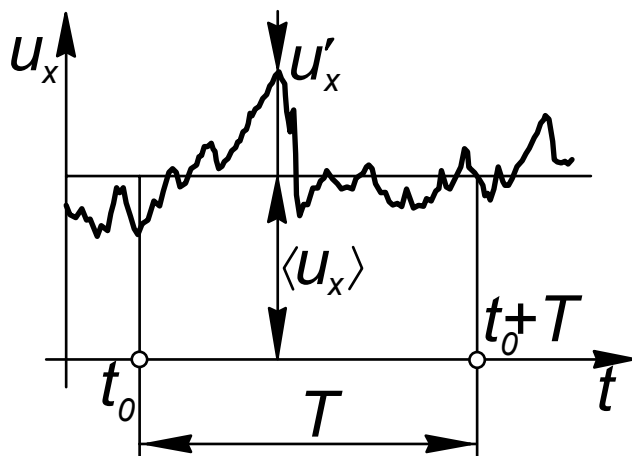
Рис. 12.1

В настоящем пособии мы ограничимся лишь самыми общими сведениями, в какой-то мере поясняющими сложные и еще не до конца понятые вопросы, связанные с турбулентным движением.

Впервые гипотеза о физическом механизме турбулентного перемешивания была высказана английским ученым Л. Ричардсоном в 1922 г. Условно турбулентное движение принято рассматривать как совокупное движение отдельных структур, называемых молями либо вихрями, совершающими как поступательное, так и вращательное движение. По Ричардсону развитая турбулентность представляет собой иерархию «вихрей». При зарождении вихри имеют большие размеры, соизмеримые с размерами канала. Затем за счет потери устойчивости они распадаются на более мелкие, передавая при этом им свою энергию. Возникает каскадный процесс, в котором энергия осредненного потока последовательно передается вихрям все более мелких масштабов. В конечном итоге образуются вихри минимального масштаба, которые далее не разрушаются. При этом нижний размер вихря (турбулентного образования) определяется вязкостью среды. В самых малых вихрях кинетическая энергия турбулентности за счет сил вязкого трения превращается в тепло, т.е. происходит диссипация энергии. Это указывает на необратимый характер процесса.

Из сказанного ясно, что турбулентное движение по своей физической природе является движением неустановившимся. С другой стороны, непосредственные измерения свидетельствуют, что при турбулентном характере потока в нем можно выделить основную, так называемую регулярную часть, на которую накладывается случайная часть движения.

На рис. 12.1 показан типичный вид экспериментально снятой зависимости проекции скорости в какой-то точке потока от времени при сохраняющихся неизменными граничных условиях.



Как следует из графика, особенностью этого процесса является его непериодичность, при этом

$$u'_x = u_x - \langle u_x \rangle,$$

где  $\langle u_x \rangle$  - осредненная скорость, представляющая регулярную часть;  $u'_x$  - пульсационная скорость, разность между мгновенным и регулярным значением скорости.

Аналогичные соотношения можно записать и для других компонент.

Таким образом, осредненная скорость - это какое-то устойчивое значение, вокруг которого происходит изменение рассматриваемой проекции скорости (в данном случае). Все сказанное в равной мере относится и к другим параметрам, в частности, к давлению.

Наиболее важной характеристикой течения при его расчете является поле скоростей. Но, как показано выше, в любой точке потока при турбулентном течении скорость выступает как случайная величина, что исключает возможность записи начальных условий для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, т.е. оказывается невозможной математическая постановка задачи. Именно это и приводит к необходимости перехода к какому-то осредненному описанию, использующему не истинные, а осредненные величины скоростей и давлений. Осреднение скоростей и давлений производится путем интегрирования функций  $u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y(x, y, z, t)$ ,  $u_z(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$  по промежутку времени  $T$  (см. рис. 12.1), величина которого намного больше так называемого характерного времени турбулентных пульсаций. Это время определяется как частное от деления масштаба  $l$  на скорость турбулентных пульсаций. Под масштабом турбулентных пульсаций понимают расстояние, на котором пульсации претерпевают заметное изменение. Так, например, при турбулентном движении в трубах наибольший масштаб пульсаций равен диаметру трубы. Таким образом, осредненная компонента скорости, например,  $\langle u_x \rangle$

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t) dt \quad (12.1)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для давления. При этом, поскольку флуктуации (пульсации) имеют как положительный так и отрицательный знак, то

$$\langle u'_x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t) dt \equiv 0 \quad (12.2)$$

Ясно также, что  $\langle u'^2_x \rangle \neq 0$ . Если в данной точке потока  $\langle u'^2_x \rangle = \langle u'^2_y \rangle = \langle u'^2_z \rangle$ , то турбулентность называют изотропной, а если это условие соблюдается во всех точках, то она называется еще и однородной.

## 12.2. Уравнения Рейнольдса.

Как уже отмечалось, сложность турбулентного движения делает невозможным строгое рассмотрение течений при заданных граничных условиях. Одной из возможных альтернатив является переход от истинной картины, детали которой нам неизвестны, к рассмотрению осредненного турбулентного течения, т.е., по существу, замена принципиально



неустановившегося движения на квазиустановившееся. Этот переход был предложен О.Рейнольдсом. Суть его сводится к тому, что в уравнениях движения вязкой жидкости (уравнениях Навье-Стокса) и уравнении неразрывности истинные значения параметров по определенным правилам заменяются их осредненными значениями. Получаемая таким образом новая система уравнений носит название уравнений Рейнольдса. Вывод этих уравнений выходит за рамки настоящего курса.

Интересующиеся могут найти его в ряде учебных пособий, в частности, Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. - Л.: Судостроение, 1968. - 567 с.

Наиболее существенным результатом этой операции является то, что вследствие нелинейности уравнений Навье-Стокса в уравнениях Рейнольдса появляются дополнительные члены, которые получили название напряжений Рейнольдса. Для наиболее простого плоскопараллельного течения эти напряжения имеют вид:

$$\tau_m = -\rho \langle u'_x u'_y \rangle \quad (12.3)$$

(угловые скобки - символ осреднения).

Таким образом, в осредненном турбулентном потоке к обычным вязкостным напряжениям добавляются напряжения, зависящие от пульсации скорости. Физически это объясняется тем, что между разными участками турбулентного потока происходит обмен количеством движения, обусловленный перемешиванием частиц. Перенос количества движения вызывает дополнительное торможение либо ускорение отдельных масс жидкости, т.е. приводит к возникновению турбулентных напряжений.

Поскольку исходная система уравнений являлась замкнутой (четыре уравнения и четыре неизвестных -  $u_x, u_y, u_z, p$ ), то появление дополнительных членов в уравнениях Рейнольдса приводит к тому, что она превращается в незамкнутую. Возникает новая проблема «замыкания системы уравнений Рейнольдса».

### 12.3. Полуэмпирические теории турбулентности.

Современная теория турбулентности не располагает возможностями теоретическим путем получить уравнения для определения напряжений Рейнольдса. Поэтому единственным способом, позволяющим замкнуть систему, является привлечение полуэмпирических соотношений, связывающих эти напряжения с осредненными по времени компонентами скорости  $\langle u_x \rangle$ ,  $\langle u_y \rangle$  и  $\langle u_z \rangle$ .

Один из первых исследователей турбулентности, Ж.Буссинеск, предложил выражать турбулентные напряжения аналогично закону трения Ньютона, т.е.

$$\tau_m = -\rho \langle u'_x u'_y \rangle = \eta \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad (12.4)$$

где  $\eta$  - турбулентная вязкость.

В отличие от физической, турбулентная вязкость характеризует не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения. Поэтому она не является постоянной величиной, а может изменяться как в пространстве, так и во времени. Важно также отметить, что даже на небольших удалениях от твердых границ турбулентная вязкость существенно превосходит физическую ( $\eta \gg \mu$ ).

В целом для турбулентного потока можно записать

$$\tau = \mu \frac{d\langle u \rangle}{dy} + \eta \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad (12.5)$$

Однако представление Буссинеска не приводит к решению задачи, т.к., к сожалению, отсутствуют прямые методы определения турбулентной вязкости.

Первого заметного успеха в этом направлении добился Л.Прандтль в 1925 году, предложив так называемую теорию пути перемешивания (смешения).

В основе ее лежит аналогия с кинетической теорией газов и предположение о том, что путь смешения зависит от условий течения. В соответствии с гипотезой Прандтля, каждый турбулентный моль (вихрь) жидкости переносит некоторое количество движения, которое сохраняется постоянным на пути перемешивания. Другими словами, длина пути перемешивания в известной мере аналогична длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов, и определяет путь, который проходит моль жидкости, прежде чем он перемешивается с другими жидкими образованиями и передаст свой импульс.

Допустив далее, что вертикальная и горизонтальная компоненты пульсационной скорости ( $u'_x$  и  $u'_y$ ) являются величинами одного порядка, Прандтль получил формулу для определения турбулентного напряжения в виде

$$\tau_m = \rho l_p^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (12.6)$$

где  $l_p$  - длина пути перемешивания.

Угловые скобки вокруг  $u$ , символизирующие операцию осреднения, для упрощения записи опущены.

Интересующиеся выводом формулы Прандтля, могут найти его в книгах: Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Изд-во оборонной промышл., 1956. - 483 с., либо Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 711 с.

На первый взгляд может показаться, что формула Прандтля не имеет каких-либо существенных преимуществ по сравнению с формулой Буссинеска, и единственным результатом является замена одной не поддающейся вычислению величины  $\eta$  другой -  $l_p$ . Однако это не так, поскольку величину  $l_p$  оценить значительно проще, чем  $\eta$ . В частности,  $l_p$

не может быть больше размера канала и должна стремиться к нулю

Рис. 12.2

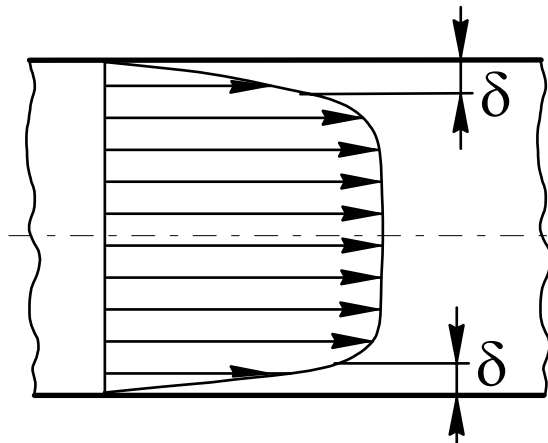
вблизи твердой стенки (поперечное движение у стенки невозможно).

## 12.4. Турбулентное течение в трубах.

Расчет турбулентного течения в трубах относится к широко распространенным инженерным задачам. Одним из важных элементов расчета является нахождение закона распределения осредненных скоростей в поперечном сечении трубы.

По Прандтлю, поток в трубах при турбулентном течении условно разбивается на две области (двухслойная модель Прандтля): турбулентное ядро, в котором определяющими являются напряжения Рейнольдса, и тонкий вязкий подслой (ламинарный подслой по Прандтлю либо пристенный слой) вблизи стенки, в котором влияние турбулентности пренебрежимо мало, а касательные напряжения обусловлены физической вязкостью в соответствии с законом трения Ньютона.

На рис. 12.2 приведен примерный вид поля осредненных скоростей (эпюра скорости) при турбулентном течении в трубопроводе. Следует обратить внимание на ее большую наполненность (большую равномерность) по сравнению с ламинарным течением. Это объясняется тем, что вследствие перемешивания частиц за счет турбулентных пульсаций происходит обмен количеством движения и, как следствие,



более равномерное распределение скоростей в поперечном сечении.

В непосредственной близости от стенки в пределах пристенного слоя решающее влияние на течение оказывают жесткость стенки, ее непроницаемость и эффект прилипания частиц. На самой стенке справедливы условия:

$$u_x = u_y = u_z = 0; \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0; \\ \rho \langle u'_x u'_y \rangle = 0.$$

Таким образом, для области в пределах вязкого подслоя можно записать:

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \quad (12.7)$$

где  $\tau_0$  - касательное напряжение на стенке.

Интегрирование (12.7) дает

$$\mu u = y \tau_0 + C$$

при  $y = 0$ ,  $u = 0$  и  $C = 0$ . Таким образом,

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y \quad (12.8)$$

Имея в виду, что  $\mu = \nu \rho$ , после подстановки получаем

$$u = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{y}{\nu} \quad (12.9)$$

Из чего следует, что в пределах подслоя скорость изменяется по линейному закону. Величина  $\frac{\tau_0}{\rho}$  имеет размерность квадрата скорости, поэтому корень квадратный из нее, т.е.

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_\tau \quad (12.10)$$

называют динамической скоростью либо скоростью трения. Из выражения для напряжений Рейнольдса (см. 12.3) следует, что  $|\tau_m| = \rho \langle u'_x u'_y \rangle$  и

$$\sqrt{\frac{|\tau_m|}{\rho}} = \sqrt{\langle u'_x u'_y \rangle} = u_\tau \quad (12.11)$$

Таким образом, динамическая скорость является мерой интенсивности турбулентного пульсационного движения, т.е. мерой интенсивности переноса количества движения.

Подставляя (12.10) в (12.9), получаем

$$u = u_\tau^2 \frac{y}{\nu} \quad (12.12)$$

Оценим толщину вязкого подслоя. На его границе  $y = \delta$ , и (12.12) можно придать вид

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \quad (12.13)$$

В правой части стоит выражение, аналогичное числу Рейнольдса. Согласно тщательным опытам ближайшего сотрудника Л.Прандтля, Никурадзе, эта величина приближенно равна 11,6; тогда

$$\delta = 11,6 \frac{\nu}{u_\tau} \quad (12.14)$$

Очевидно, что этим соотношением можно воспользоваться лишь в случае, если известна динамическая скорость. Для ее нахождения необходимо увязать ее с параметрами осредненного потока, что является решаемой задачей.

Чтобы завершить вопрос о турбулентном течении в трубах, установим закон распределения осредненных скоростей в ядре потока. В этой области определяющую роль играют турбулентные касательные напряжения, и, следовательно, можно воспользоваться формулой Прандтля (см. 12.6). Однако для того, чтобы продвинуться дальше, необходимо принять дополнительные допущения. Они оказываются достаточно грубыми, и единственным их оправданием является то, что результаты, к которым они приводят, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Первое допущение связано с длиной пути перемешивания. Согласно наиболее простой гипотезе, принадлежащей Л.Прандтлю,

$$I_n = \kappa y \quad (12.15)$$

где  $\kappa$  - какая-то величина, называемая постоянной Кармана. Выполненные измерения показывают, что  $\kappa \approx 0,4$ . Более поздние исследования показали, что зависимость (12.15) справедлива лишь в пристенной части турбулентного ядра потока.

Вторым является допущение о касательных напряжениях. Следует полагать, что принципиально они являются величинами переменными. Однако, если рассматривать область, расположенную достаточно близко к стенке, то здесь величина касательного напряжения изменяется незначительно, и можно принять ее равной касательному напряжению на стенке, т.е.  $\tau_m = \tau_0$ .

При этих допущениях формула Прандтля принимает вид

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

либо

$$u_\tau^2 = \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные, получаем

$$du = \frac{u_\tau}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

и после интегрирования

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + C \quad (12.16)$$

т.е. скорости в ядре потока распределены по логарифмическому закону.

Произвольную постоянную интегрирования можно найти из граничных условий на оси трубы: при  $y = R$   $u = u_{\max}$ , и

$C = u_{\max} - \frac{u_\tau}{\kappa} \ln R$ . После подстановки и простых преобразований

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{y} \quad (12.17)$$

Строго говоря, соотношение (12.17) выводится для плоских труб, но опыт показывает, что оно оказывается справедливым и для круглых, и подтверждает экспериментально установленный факт о независимости распределения скорости от причин, обуславливающих возникновение касательных напряжений (вязкости, шероховатости).

Выражение (12.17) иногда называют законом дефекта скорости.

Использование двухслойной модели, т.е. разделение потока на ядро и пристенный слой, приводит к специфической классификации стенок труб. Если толщина пристенного слоя больше выступов шероховатости, трубы называют гидравлически гладкими, в противном случае - шероховатыми.

Завершая раздел, обратим внимание на следующие обстоятельства. Как отмечалось, для получения закона распределения

скоростей в поперечном сечении трубопровода использовались

Рис. 12.3

простейшие гипотезы: постоянство касательных напряжений в ядре потока ( $\tau_m = \tau_0$ ) и линейная зависимость для

длины пути перемешивания ( $l_n = \kappa y$ ). Легко показать, что первая из них не согласуется с реальностью при рассмотрении течения в трубах.

Действительно, выделим в трубе цилиндрический элемент жидкости длиной  $l$  и радиусом  $r$ , на который действует постоянный перепад давления  $\Delta p$ . Сила давления на этот элемент  $\Delta p \pi r^2$ , а сила трения  $2\pi r l \tau$ . Приравняв эти силы, получаем

$$\Delta p = \frac{2l}{r} \tau \quad (12.18)$$

А для всей трубы длиной  $l$  и радиусом  $R$

$$\Delta p = \frac{2l}{R} \tau_0 \quad (12.19)$$

где  $\tau_0$  - напряжение на стенке.

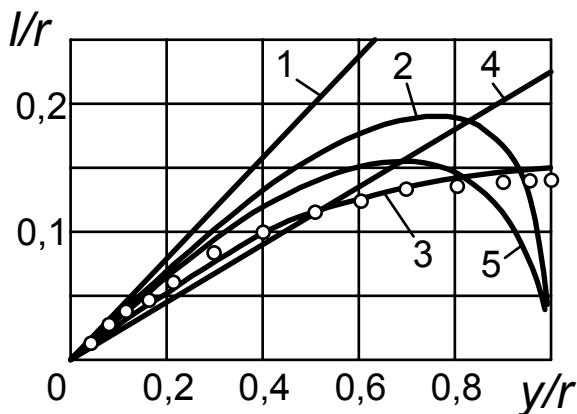
Поскольку  $\Delta p = \text{const}$  по условию, то приравняв (12.18) и (12.19), с учетом того, что  $r = R - y$ ,

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (12.20)$$

т.е. касательные напряжения по сечению не постоянны, а изменяются по линейному закону, и лишь на достаточно малом расстоянии от стенки

( $\frac{y}{R} \ll 1$ ) можно считать, что  $\tau = \tau_0$ .

Вторая гипотеза также не согласуется с данными опытов. На рис. 12.3 приведены графики, характеризующие распределение длины пути перемешивания в поперечном сечении круглой трубы по данным опытов Никурадзе (кружки) и по формулам, предложенным различными авторами. В соответствии с результатами экспериментов, значение  $l_n$  достигает



максимума на оси трубы. Из графика следует, что гипотеза Прандтля (прямая 1) неприемлема.

Существенно отличаются от опытной и кривые, полученные другими авторами: Карманом (кривая 2), Конаковым (кривая 4), Саткевичем (кривая 5). Достаточно близка к эксперименту кривая Альтшуля (кривая 3), описывающая длину пути перемешивания с помощью формулы

$$l_n = \kappa_1 \left[ \frac{2y}{R} - \left(\frac{y}{R}\right)^2 \right] \quad (12.21)$$

В последнее время Д.Н.Васильевым получена аппроксимирующая зависимость, практически точно совпадающая с данными опыта и имеющая вид

$$I_n = \frac{\kappa}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^3 \right] R \quad (12.22)$$

Использование этого соотношения с учетом линейного распределения касательных напряжений по сечению трубы приводит к закону распределения скоростей, соответствующему гиперболическому тангенсу. Вывод этого соотношения можно найти в книге: Павленко В.Г. Основы механики жидкости. - Л.: Судостроение, 1988. - 240 с.

Существуют и другие подходы к этому непростому вопросу. Так, например, А.Д.Альтшуль считает, что разделение потока на две области является грубой схематизацией, носящей искусственный характер. Не оправдана с теоретических позиций гипотеза о ламинарном подслое, как об области, в которой отсутствуют пульсации. Пульсации проникают и в этот слой, но следуют там особым закономерностям. Слабо обосновано и то, что в ядре потока физическая вязкость не играет никакой роли. На базе этих представлений автором разработана полуэмпирическая теория, рассматривающая турбулентный поток в трубе как единое целое, без разделения его на ядро и ламинарный подслой. Достаточно ясное и подробное изложение этой теории можно найти в книге: Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. - М.: Недра, 1970. - 215 с.

Полуэмпирические теории неоднократно подвергались серьезной критике. Главные возражения обычно касались выводов, связанных с особенностями структуры турбулентности. Тем не менее, они широко распространены из-за их простоты и удобства, хотя получаемые результаты достаточно грубы и приближенны. Поэтому нельзя не согласиться с мыслью, высказанной крупнейшим специалистом в области механики жидкости Х.Раузом (Механика жидкости. - М.: Стройиздат, 1967. - 390 с.): «При сравнении простоты соотношений со сложностью явления вызывает удивление степень их полезности, а не их недостатки».

## **12.5. Степенные законы распределения скоростей.**

Логарифмический закон распределения скоростей хорошо подтверждается результатами эксперимента, но вызывает определенные трудности при численных расчетах. Поэтому в последние годы получают распространение степенные зависимости вида

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^{1/n} \quad (12.23)$$

Главным достоинством этих формул является их простота, а недостатком - зависимость показателя степени от числа Рейнольдса. Поэтому степенной закон нельзя рассматривать как универсальный. В

диапазоне изменения чисел  $Re = 4 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^6$  показатель степени  $1/n$  меняется в пределах от  $1/6$  до  $1/10$ .

Следует отметить, что ни логарифмический, ни степенной законы не удовлетворяют условию равенства нулю производной от скорости на оси симметрии потока.

## 12.6. Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах.

Напомним, что рассмотрение закономерностей как ламинарного, так и турбулентного течений в трубах помимо чисто познавательных целей преследовало и цели сугубо практические: получить соотношения, позволяющие определять потери давления (напора) в трубопроводных сетях при выполнении инженерных расчетов. Для ламинарного течения эта задача решается с помощью формулы Хагена-Пуазейля. Из рассмотрения закономерностей турбулентного течения становится ясным, что вследствие его чрезвычайной сложности получение аналогичного соотношения чисто теоретическим путем практически невозможно. Поэтому, основываясь на уже известных положениях, установим хотя бы общую структуру необходимой формулы.

Как было показано, выражение для турбулентных касательных напряжений (напряжений Рейнольдса) имеет вид

$$\tau = \rho \langle u'_x u'_y \rangle$$

Это с большой долей уверенности позволяет утверждать, что существует связь между средней скоростью и касательным напряжением на стенке трубы вида

$$\tau_0 = k \rho v^2 \quad (12.24)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности.

С другой стороны, из условия равновесия движущегося под действием постоянного перепада давления жидкого цилиндра длиной  $l$  (см. 12.19)

$$\Delta p = \frac{2l}{R} \tau_0$$

После замены радиуса диаметром и подстановки  $\tau_0$

$$\Delta p = 4k \frac{l}{d} \rho v^2 \quad (12.25)$$

либо

$$\Delta p = 8k \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \quad (12.26)$$

В такой форме записи выражение  $\frac{\rho v^2}{2}$  имеет четкий физический смысл. Это так называемое динамическое давление потока, обусловленное средней скоростью, либо кинетическая энергия потока, заключенная в единице объема.



Обозначим величину  $8k = \lambda$  и назовем ее гидравлическим коэффициентом трения, тогда

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \quad (12.27)$$

либо

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (12.28)$$

Полученное соотношение носит название формулы Дарси. Более строго это соотношение будет получено методом анализа размерностей.

Отметим попутно, что если в преобразованной формуле Хагена-Пуазейля (см. 11.17) обозначить величину  $\frac{64}{Re}$  буквой  $\lambda$ , то она превращается в формулу Дарси. В этом смысле формула Дарси может быть названа универсальной, т.е. пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного течений. В последнем случае открытым остается вопрос о нахождении гидравлического коэффициента трения, который, как следует из всего сказанного выше, может быть решен только экспериментальным путем.

В заключение отметим, что хотя поставленная главная проблема и оказалась теоретически неразрешимой, полученные результаты позволяют найти решения ряда частных задач, имеющих важное практическое значение.

### 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

При рассмотрении различных разделов, связанных с движением жидких сред, неоднократно приходилось сталкиваться с процессами и явлениями, которые в силу своей сложности не позволяют получить аналитические решения, необходимые для инженерной практики. Вместе с тем переход от качественных суждений к количественным соотношениям играет ведущую роль в творческой деятельности человека.

Рассматриваемые в настоящем пособии вопросы непосредственно связаны с методологией научного познания. Однако, этот аспект, безусловно важный с познавательных позиций, далеко выходит за рамки курса, поэтому в настоящем пособии мы ограничимся лишь технической стороной.

Принципиально, процесс познания человеком природы можно условно разделить на две стадии: анализ и синтез. На первой стадии, т.е. на стадии анализа, изучаемый объект мысленно расчленяется на более простые составные части, выделяются свойства и связи.

На этапе синтеза происходит их соединение с целью воссоздания единого целого. Этап завершается построением математической модели, которая с какой-то степенью приближения описывает поведение изучаемого объекта. Обычно математическая модель представляет систему либо системы дифференциальных уравнений. Что же касается степени приближения модели, то она обусловлена теми упрощающими предпосылками, которые положены в основу. Здесь важную роль играет так называемый фактор неопределенности. Суть его сводится к тому, что с усложнением математической модели за счет более полного учета влияющих факторов уменьшается возможность получения точного, имеющего практическое значение представления. Другими словами, неопределенность решения возрастает по мере углубленного анализа реальной задачи.

Так, например, система дифференциальных уравнений Эйлера для гидродинамики является математической моделью, описывающей движение идеальной жидкости. Усложнение модели за счет учета сил вязкого трения приводит к системе дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

Если модель разрешима, т.е. уравнения могут быть проинтегрированы любым путем, то можно считать, что решена и поставленная конкретная задача. Полученные результаты сопоставляются с теми, что наблюдаются в природе. Если они близки, то это означает, что модель правильно отражает поведение и свойства реального объекта, если нет, нужно ввести какие-то дополнительные факторы, не учтенные ранее, т.е. улучшить ее. Все это, конечно, не означает, что этот процесс идет легко и просто. Он может быть связан с преодолением огромных трудностей как математического, так и вычислительного характера. Новые

проблемы возникают в двух случаях: несмотря на все усилия уравнения, составляющие математическую модель, проинтегрировать не удастся; изучаемое явление оказывается столь сложным, что не поддается математическому описанию.

В качестве примера первого случая можно привести уравнения Навье-Стокса, которые не могут быть проинтегрированы для большинства важных для практики случаев. Очевидно, что единственным в этих условиях способом решения задачи является эксперимент на физической модели, под которой понимается уменьшенный (либо увеличенный) реальный объект исследования. При этом сразу возникают три вопроса: как спроектировать и построить модель, какие величины необходимо измерять при проведении опытов, и как перенести результаты опытов, полученных на модели на натуральный объект. На эти вопросы и отвечает теория подобия, являющаяся основой современного физического эксперимента. Прежде чем приступить к ее рассмотрению, необходимо уяснить, что же понимается под подобием? Одно из наиболее удачных определений этого понятия принадлежит академику Л.И.Седову: «Подобными называются такие явления (процессы), когда по характеристикам одного из них можно получить характеристики другого простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц к другой».

В общем случае различают три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое. Наиболее простым является подобие геометрическое, требующее, чтобы линейные размеры природы и модели находились в постоянном соотношении, другими словами, модель повторяет природу в каком-то масштабе.

Это требование можно записать в виде

$$\frac{L_M}{L_H} = K_L$$

где  $K_L$  - масштабный множитель.

Для площадей ( $S$ ) и объемов ( $V$ )

$$\frac{S_M}{S_H} = K_L^2; \quad \frac{V_M}{V_H} = K_L^3$$

Можно отметить, что правила геометрического подобия были известны еще Джонотану Свифту, который отмечал, что в стране, в которую попал Гулливер в одном из своих путешествий, он обнаружил существа, превосходившие его по росту в 12 раз, по площади - в 144 раза и по объему - в 1728 раз.

Применительно к физическим явлениям элементарные представления геометрического подобия расширяются и распространяются на все величины, характеризующие данный процесс. Если учесть, что они могут изменяться как во времени, так и в пространстве, образуя поля, то возникает понятие о временном подобии и подобии полей, называемое кинематическим подобием.

В механике жидкости оно сводится к подобию полей скоростей в потоках, движущихся в геометрически подобных каналах.

И наконец, имея в виду, что механическое движение происходит под действием сил, вводится понятие динамического подобия, которое требует, чтобы в соответствующих точках природы и модели силы находились в постоянном соотношении.

Рассмотрим простейший пример. Известно, что движение любой механической системы подчиняется закону Ньютона

$$F = m \frac{du}{dt} \quad (13.1)$$

Для двух подобных систем можно записать

$$F_1 = m_1 \frac{du_1}{dt_1} \quad \text{и} \quad F_2 = m_2 \frac{du_2}{dt_2}$$

Разделив первое на второе получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{du_1}{du_2} \frac{dt_2}{dt_1} \quad \text{либо} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{u_1}{u_2} \frac{t_2}{t_1}$$

Имея в виду, что  $m = \rho V \cong \rho L^3$  имеем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^3 u_1 t_2}{\rho_2 L_2^3 u_2 t_1}$$

По смыслу  $L/t$  есть скорость, поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^2 u_1^2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (13.2)$$

либо

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 u_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (13.3)$$

Очевидно, что полученные комплексы безразмерны.

Таким образом, для двух подобных систем сохраняется числовое равенство безразмерных комплексов  $\frac{F}{\rho L^2 u^2}$ . Кратко это условие можно

записать так:  $\frac{F}{\rho L^2 u^2} = \text{idem}$ . В честь Ньютона этот комплекс обозначается двумя первыми буквами его фамилии, т.е.

$$Ne = \frac{F}{\rho L^2 u^2} \quad (13.4)$$

и называют числом подобия Ньютона, а выражение  $Ne = \text{idem}$  - основным законом динамического подобия механических систем (законом Ньютона).

Величины  $L$  и  $u$ , входящие в (13.4), называются определяющим линейным размером и определяющей скоростью. При проведении опытов

они выбираются экспериментатором произвольно, исходя из удобства их измерения.

Полученные результаты заслуживают того, чтобы остановиться и сделать кое-какие полезные выводы. Во первых, они позволяют ответить на один из поставленных выше вопросов: как спроектировать и построить модель. Ответ очевиден: так, чтобы она была геометрически подобна натуре.

Во-вторых, из сказанного следует, что для обеспечения динамического подобия не требуется, чтобы все величины, определяющие характер процесса в натурном объекте, были численно равны аналогичным величинам в модели. Достаточным является равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для природы и модели, называемых числами подобия.

Какие преимущества дает такой подход в практическом плане?

Из математической статистики известно, что число опытов, которое необходимо поставить для того, чтобы получить закономерность, достоверно описывающую какое-то физическое явление, определяется из соотношения:

$$N = \sigma^k \quad (13.5)$$

где  $\sigma$  - число экспериментальных точек, которое необходимо снять для обеспечения представительности опыта ( $\sigma_{\min} = 5$ );  $k$  - число величин, подлежащих варьированию в опытах.

Таким образом, минимальное число опытов

$$N = 5^k \quad (13.6)$$

Если в опытах варьируется число Ньютона (например, за счет изменения скорости), то  $k = 1$  и  $N = 5$ , но если изучать влияние каждой из величин ( $\rho$ ,  $u$ ,  $L$ ), то  $k = 3$  и число опытов  $N = 125$ . Следовательно, использование числа подобия в качестве своеобразной «обобщенной переменной» позволяет уменьшить число необходимых опытов в 25 раз, а если для надежности принять  $\sigma = 10$ , то в 100 раз.

И наконец, в-третьих, можно ответить на вопрос о том, какие величины следует измерять в опытах и как переносить результаты на натурный объект. Так как при проведении опытов необходимо обеспечить равенство чисел подобия природы и модели, то ясно, что измерению подлежат лишь те величины, которые входят в эти числа.

По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели и, исходя из равенства их числам подобия природы, произвести пересчет.

Остается открытым вопрос, который, по существу, является центральным. Как же найти числа подобия, характеризующие изучаемый процесс либо явление? Очевидно, что только ответ на него открывает путь для практической реализации теории подобия.

### **13.1. Инспекционный анализ дифференциальных уравнений.**

Исходим из того, что математическая модель процесса нам известна, но она не может быть проинтегрирована. В этом случае числа подобия могут быть найдены методом, который по предложению известного американского математика и гидродинамика Г.Биркгофа назван инспекционным анализом. Как следует из названия, метод заключается в организованном по определенным правилам «инспектировании» дифференциальных уравнений, которое должно выявить числа подобия, позволяющие моделировать процесс. Отметим лишь, что этот метод не является единственным. Интересующиеся другими подходами могут найти их в книге Я.М. Брайниса «Подобие и моделирование в химической и нефтехимической технологии».-М.: Гостоптехиздат, 1961. - 219 с.

Базой инспекционного анализа является положение, рассматриваемое как постулат и сводящееся к следующему.

Если две системы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые граничные условия, и если значения всех параметров в этих уравнениях и граничных уравнениях равны, то эти две системы подобны, при условии существования единственности решения.

Желающие познакомиться с подробным анализом всех элементов, входящих в это утверждение могут обратиться к превосходной книге А.А.Гухмана «Введение в теорию подобия». - М.: Высшая школа, 1963. - 253 с.

В данном пособии мы примем его как постулат, опуская все обоснования. Вторая его половина относится к так называемым условиям однозначности. Это крайне важное понятие требует более внимательного рассмотрения.

Любое дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений, т.е. решение их многозначно. Так, например, то же уравнение Навье-Стокса, к которому мы уже неоднократно возвращались, может описывать движение жидкости в каналах, реках и океанах, движение атмосферных масс воздуха и т.п. Инженера интересует конкретное явление данного класса. Поэтому из множества возможных решений требуется лишь одно, соответствующее изучаемому явлению. Этого можно добиться, если при постановке задачи ввести дополнительные так называемые условия однозначности, которые включают:

- данные о физических свойствах среды (плотность, вязкость);
- сведения о начальном состоянии системы (начальные условия);
- данные о поведении системы на её границах (граничные условия).

Инспекционный анализ представляет собой определенный алгоритм, включающий два этапа: на первом из них отношения дифференциальных величин заменяются отношениями самих

переменных, на втором - уравнение приводится к безразмерному виду путем деления всех его членов на один из них, выбранный произвольно.

Метод наиболее просто усвоить, обратившись к рассмотрению конкретного примера. Имея в виду, что в механике жидкости основными соотношениями, описывающими движение вязких сред, являются уравнения Навье-Стокса, целесообразно воспользоваться именно ими. Рассмотрим одну из проекций в декартовой системе координат. В данном случае безразлично какую, так как структура уравнений одинакова, что обеспечит и одинаковость получаемых результатов.

В проекции на ось X-ов имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

Будем считать, что из массовых сил действует только сила тяжести, т.е.  $X = g \cos \beta$  ( $\cos \beta$  учитывает знак). С учетом этого и после умножения всех членов уравнения на плотность получим

$$\boxed{\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}} + \boxed{\rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)} = \boxed{\rho g \cos \beta} - \boxed{\frac{\partial p}{\partial x}} + \boxed{\rho \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)}$$

$F_{u1} \qquad F_{u2} \qquad F_m \qquad F_\partial \qquad F_{mp}$

В такой форме записи каждый из членов выражает силу, отнесенную к единице объема. При этом

$F_{u1}$  и  $F_{u2}$  - силы инерции;

$F_m$  - сила тяжести;

$F_\partial$  - сила давления;

$F_{mp}$  - сила вязкого трения.

Действуя по алгоритму, заменим дифференциальные соотношения отношениями величин. Имеем:

$$F_{u1} \cong \frac{\rho u}{t}; \quad F_{u2} \cong \frac{\rho u^2}{L}; \quad F_m \cong \rho g;$$

$$F_\partial \cong \frac{\Delta p}{L}; \quad F_{mp} \cong \nu \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cong \nu \rho \frac{u}{L^2}$$

Приводим эти соотношения к безразмерному виду, приняв в качестве делителя один из комплексов. Как отмечалось выше, он может

быть выбран произвольно. Пусть им будет  $F_{u2}$ , т.е. силы инерции.

Получаем:

$$\frac{F_{u1}}{F_{u2}} = \frac{L}{tu} = Sh - \text{это так называемый критерий гомохронности либо}$$

число подобия Струхаля.

$$\frac{F_m}{F_{u2}} = \frac{gL}{u^2}, \text{ обратная величина } \frac{u^2}{gL} = Fr - \text{число Фруда - отношение}$$

сил инерции к силам тяжести.

$$\frac{F_\partial}{F_{u2}} = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = Eu - \text{число Эйлера, отношение сил давления к силам}$$

инерции.

$$\frac{F_{mp}}{F_{u2}} = \frac{\nu}{uL}, \text{ обратная величина } \frac{uL}{\nu} = Re - \text{уже известное нам}$$

число Рейнольдса - отношение сил инерции к силам вязкого трения.

Следует отметить, что вопрос о правильности интерпретации чисел подобия как отношения сил ставился рядом исследователей. По некоторым сведениям, еще Прандтль высказывал мнение о том, что число Рейнольдса не всегда равно отношению силы инерции к силе внутреннего трения. Более точным и правильным является утверждение, что если две системы геометрически подобны и течение в них происходит при одинаковых числах Рейнольдса, то отношение сил инерции к силам трения для обоих потоков одинаково. Подробности, связанные с таким подходом можно найти в книге С. Клайна «Подобие и приближенные методы». - М.: Мир, 1968. - 302 с.

Таким образом, при моделировании гидромеханических явлений необходимо использовать числа подобия Струхаля, Фруда, Рейнольдса и Эйлера.

Анализируя величины, входящие в числа подобия, легко заметить, что они составлены из параметров, входящих в условия однозначности. Эти числа подобия называют определяющими. Экспериментатор, разумеется, в определенных пределах, может изменять их величину (менять скорость, геометрические размеры, вязкость). В число Эйлера входит величина  $\Delta p$  - перепад давления (потеря давления), которая, как правило, является искомой. Другими словами, величина числа Эйлера является следствием (результатом) процесса. Числа подобия такого рода называются неопределяющими. С чисто математических позиций сказанное можно представить в виде

$$Eu = f(Sh, Fr, Re) \quad (13.7)$$

Если изучается установившееся движение, при котором параметры в точке не изменяются с течением времени, то из рассмотрения выпадает число Струхаля и



$$Eu = f(Re, Fr) \quad (13.8)$$

Следовательно, при моделировании гидромеханических явлений в данном случае должны соблюдаться следующие условия, обеспечивающие динамическое подобие:

$$Fr_M = Fr_H; \quad Re_M = Re_H$$

либо

$$\frac{u_M^2}{g_M L_M} = \frac{u_H^2}{g_H L_H}; \quad \frac{u_M L_M}{\nu_M} = \frac{u_H L_H}{\nu_H} \quad (13.9)$$

Если при проведении опытов удастся соблюсти эти требования, то подобие называется полным. Однако в реальных условиях добиться этого достаточно трудно, а иногда и просто невозможно. Поэтому обычно ограничиваются частичным подобием. Анализируя сущность явления экспериментатор устанавливает какие из сил (тяжести, трения) играют определяющую роль в исследуемом процессе и моделирует только их. В этом случае при установившемся движении зависимость (13.9) распадается на две

$$Eu = f(Re) \quad \text{и} \quad Eu = f(Fr) \quad (13.10)$$

из которых и выбирается определяющая.

Дополнительно отметим, что для сжимаемых сред в число определяющих чисел подобия помимо полученных выше входит и число Маха.

Остается открытым лишь вопрос о кинематическом подобии. Опыт многочисленных исследований показывает, что для его решения не требуется каких-либо специальных мер. Если системы динамически подобны и течение происходит в геометрически подобных каналах, то кинематическое подобие обеспечивается автоматически.

Кратко остановимся еще на двух вопросах, носящих принципиальный характер. Первый из них связан с понятием геометрического подобия «в большом» и «малом». В начале раздела было показано, что геометрическое подобие природы и модели может быть легко реализовано. Подобие геометрических границ объектов относится к подобию «в большом». Вместе с тем стенки каналов как природы, так и модели имеют какую-то шероховатость. Очевидно, что моделирование шероховатости практически невозможно, и геометрическое подобие «в малом» недостижимо.

Второй вопрос связан с так называемым «масштабным эффектом». Суть его в том, что моделирование, основанное на классических принципах теории подобия, не обеспечивает масштабный переход. Это означает, что эффективность различного рода промышленных технологических аппаратов оказывается ниже той, которая должна была бы быть по результатам, полученным пересчетом с модельных испытаний. Более того, она ухудшается по мере увеличения размеров аппаратов. Это вынуждает исследователей отказываться от испытаний на моделях и переходу к испытаниям на объектах, построенных в натуральную

Рис. 13.1

величину, что резко повышает стоимость эксперимента, а при создании особо крупных

аппаратов такой подход вообще невозможно реализовать. Исследования, выполненные в последние годы, показали, что в основе масштабного эффекта лежат чисто гидродинамические явления: неравномерность распределения потоков по сечению аппарата, увеличение масштаба турбулентности и т.п., что позволяет найти способы устранения этого эффекта. Достаточно полное изложение теории можно найти в книге под ред. А.М.Розена «Масштабный переход в химической технологии: разработка промышленных аппаратов методом гидродинамического моделирования»: Химия, 1980. - 320 с.

### 13.2. Понятие об автомодельности.

Автомодельность - кардинальное понятие теории подобия, принципиальное содержание которого сводится к так называемому вырождению чисел подобия. Формальным признаком её служит выпадение чисел подобия как аргументов, входящих в функциональную зависимость.

Обстоятельное рассмотрение этого вопроса можно найти в книге А.А.Гухмана «Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. Процессы переноса в движущейся среде». - М.: Высшая школа, 1967. - 302 с.

Мы же ограничимся лишь кратким рассмотрением содержания этого понятия без выяснения которого невозможна грамотная постановка эксперимента.

Для простоты будем считать, что в интересующем исследователя процессе определяющими являются силы вязкого трения т.е. зависимость

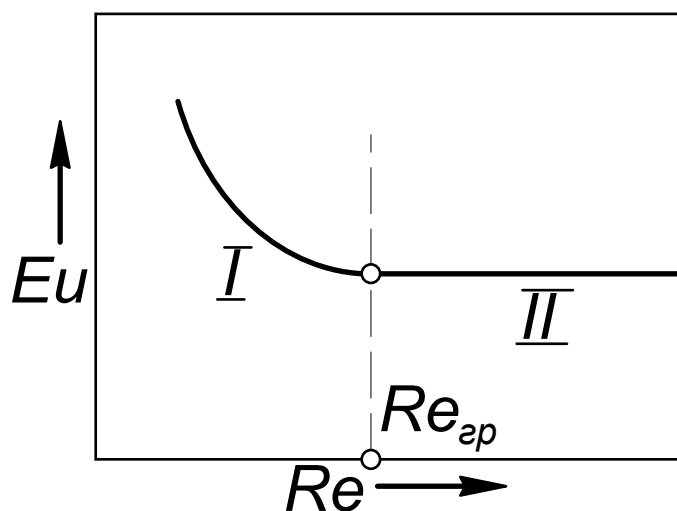
(13.8) имеет вид  $Eu = f(Re)$ .

График этой зависимости устанавливается экспериментально, и часто имеет вид, показанный на рис. 13.1.

Как следует из рисунка, при увеличении числа Рейнольдса в опытах зависимость  $Eu = f(Re)$  ослабевает и при некотором конкретном для каждого случая значении числа  $Re$ , называемого граничным ( $Re_{gr}$ ) происходит

«вырождение», т.е. число Эйлера перестает зависеть от  $Re$ .

Исчезновение (вырождение) числа Рейнольдса означает отсутствие предпосылок для подобия. Очевидно, механизм процесса таков, что не надо никаких условий для подобия и все процессы такого типа



автоматически подобны между собой. Этот случай и называется автомодельностью. На рис.13.1 автомодельная область обозначена римской цифрой II.

В общем случае под автомодельной понимают область, в которой неопределяющее число подобия перестает зависеть от определяющего (либо определяющих).

Проведение опытов в этой области существенно упрощается. Действительно, если в области I экспериментатор должен заботиться о том, чтобы  $Re_M = Re_H$ , что далеко не всегда возможно, то в автомодельной области достаточно, чтобы  $Re_M$  было больше  $Re_{ap}$ . Нужно лишь помнить, что какого-то универсального значения  $Re_{ap}$  не существует, оно всегда зависит от природы изучаемого объекта, в частности, от его формы. Поэтому, как правило, задачей первого этапа экспериментального исследования является нахождение граничного значения определяющего числа подобия.

Таким образом, приведенные сведения показывают, что если в результате анализа изучаемого явления удастся составить его математическую модель, то принципиально задача постановки эксперимента может считаться разрешенной. К сожалению, возможность аналитического описания является скорее исключением, чем правилом. Поэтому целью следующего раздела является ознакомление со стратегией исследователя при возникновении такой ситуации.

### **13.3. Анализ размерностей.**

Следует подчеркнуть, что конечная цель в рассматриваемом случае остается прежней: нахождение чисел подобия, по которым следует вести моделирование, но решается она при существенно меньшем объеме информации о характере процесса.

Для уяснения дальнейшего кратко рассмотрим некоторые основополагающие понятия. обстоятельное изложение можно найти в книге А.Н.Лебедева «Моделирование в научно-технических исследованиях». - М.: Радио и связь. 1989. -224 с.

Любой материальный объект обладает рядом свойств, которые допускают количественное выражение. При этом каждое из свойств характеризуется размером определенной физической величины. Единицы некоторых физических величин можно выбирать произвольно, и с их помощью представлять единицы всех остальных. Физические единицы, выбираемые произвольно, называют основными. В международной системе (применительно к механике) это - килограмм, метр и секунда. Остальные величины, выраженные через эти три, называют производными.

Основная единица может обозначаться либо символом соответствующей величины, либо специальным символом. Например, единицы длины -  $L$ , единицы массы -  $M$ , единица времени -  $T$ . Либо,

единица длины - метр (м), единица массы - килограмм (кг), единица времени - секунда (с).

Под размерностью понимают символическое выражение (иногда его называют формулой) в виде степенного одночлена, связывающее производную величину с основными. Общий вид этой закономерности имеет вид

$$\dim X = L^x M^y T^z \quad (13.11)$$

где  $x, y, z$ - показатели размерности.

Например, размерность скорости

$$\dim v = L \cdot T^{-1}$$

Для безразмерной величины все показатели  $x = y = z = 0$ , и, следовательно,  $\dim X = 1$ .

Два следующих утверждения достаточно ясны и не нуждаются в каких-либо специальных доказательствах.

Отношение размеров двух объектов является величиной постоянной вне зависимости от того, в каких единицах они выражаются. Так, например, если отношение площади, занимаемой окнами, к площади стен составляет 0,2, то этот результат останется неизменным, если сами площади выражать в  $\text{мм}^2$ ,  $\text{м}^2$  или  $\text{км}^2$ .

Второе положение можно сформулировать следующим образом. Любое правильное физическое соотношение должно быть размерностно однородным. Это означает, что все члены, входящие как в правую, так и в левую его части должны иметь одинаковую размерность. Это простое правило четко реализуется в житейском обиходе. Все осознают, что метры можно складывать только с метрами и никак не с килограммами или с секундами. Нужно четко представлять, что правило остается справедливым и при рассмотрении даже самых сложных уравнений.

Метод анализа размерностей базируется на так называемой  $\pi$ -теореме (читается: пи-теорема).  $\pi$ -теорема устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией в безразмерной форме. Более полно теорема может сформулирована так:

Любая функциональная зависимость между размерными величинами может быть представлена в виде зависимости между  $N$  безразмерными комплексами (числами  $\pi$ ), составленными из этих величин. Число этих комплексов  $N = m - n$ , где  $n$  - число основных единиц. Как уже отмечалось выше, в гидромеханике  $n = 3$  (кг, м, с).

Пусть, например, величина  $A$  является функцией пяти размерных величин ( $m = 5$ ), т.е.

$$A = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \quad (13.12)$$

Из  $\pi$ -теоремы следует, что эта зависимость может быть преобразована в зависимость, содержащую два числа  $\pi$  ( $N = m - n = 5 - 3 = 2$ )

$$A = f_1(\pi_1, \pi_2) \quad (13.13)$$

где  $\pi_1$  и  $\pi_2$  - безразмерные комплексы, составленные из размерных величин.

Эту теорему иногда приписывают Бэкингеу и называют  $\pi$ -теоремой Бэкингема. В действительности в её разработку внесли вклад многие крупные ученые, в том числе Фурье, Рябушинский, Рэлей.

Доказательство теоремы выходит за рамки курса. При необходимости оно может быть найдено в книге Л.И.Седова «Методы подобия и размерностей в механике» - М.: Наука, 1972. - 440 с. Подробное обоснование метода приводится и в книге В.А.Веникова и Г.В.Веникова «Теория подобия и моделирования» - М.: Высшая школа, 1984. -439 с. Особенностью этой книги является то, что помимо вопросов, связанных с подобием, в нее включены сведения о методике постановки эксперимента и обработки его результатов.

Использование анализа размерностей для решения конкретных практических задач связано с необходимостью составления функциональной зависимости вида (13.12), которая на следующем этапе обрабатывается специальными приемами, приводящими в конечном итоге к получению чисел  $\pi$  (чисел подобия).

Основным, носящим творческий характер, является первый этап, так как получаемые результаты зависят от того, насколько правильно и полно представление исследователя о физической природе процесса. Другими словами, насколько функциональная зависимость (13.12) правильно и полно учитывает все параметры, влияющие на изучаемый процесс. Любая ошибка здесь неизбежно приводит к ошибочным выводам. В истории науки известна так называемая «ошибка Рэлея». Суть ее в том, что изучая задачу о теплообмене при турбулентном течении, Рэлей не учел влияние вязкости потока, т.е. не включил её в зависимость (13.12). В результате в конечные соотношения, полученные им, не вошло число подобия Рейнольдса, играющее исключительно важную роль в теплообмене.

Для уяснения сущности метода рассмотрим пример, иллюстрирующий как общий подход к задаче, так и способ получения чисел подобия.

Необходимо установить вид зависимости, позволяющий определить потери давления либо напора при турбулентном течении в круглых трубах.

Напомним, что эта задача уже рассматривалась в разделе 12.6. Поэтому представляет несомненный интерес установить, как она может быть разрешена с помощью анализа размерностей и дает ли это решение какую-то новую информацию.

Ясно, что падение давления вдоль трубы, обусловленное затратами энергии на преодоление сил вязкого трения обратно пропорционально её длине, поэтому с целью сокращения числа переменных целесообразно рассматривать не  $\Delta p$ , а  $\Delta p / l$ , т.е. потери давления на единицу длины трубы. Напомним, что отношение  $\Delta h / l$ , где  $\Delta h$  - потери напора, носит название гидравлического уклона.

Из представлений о физической сущности процесса можно предположить что возникающие потери должны зависеть: от средней скорости течения рабочей среды ( $V$ ); от размера трубопровода, определяемого его диаметром ( $d$ ); от физических свойств транспортируемой среды, характеризующих её плотностью ( $\rho$ ) и вязкостью ( $\mu$ ); и, наконец, разумно считать, что потери должны быть как-то связаны с состоянием внутренней поверхностью трубы, т.е. с шероховатостью ( $k$ ) ее стенок. Таким образом, зависимость (13.12) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\Delta p}{l} = f_1(v, d, \rho, \mu, k)$$

либо

$$f_2\left(v, d, \rho, \mu, k, \frac{\Delta p}{l}\right) = 0 \quad (13.14)$$

На этом и заканчивается первый и, нужно подчеркнуть, наиболее ответственный этап анализа размерностей.

В соответствии с  $\pi$ -теоремой, число влияющих параметров, входящих в зависимость,  $m = 6$ . Следовательно, число безразмерных комплексов  $N = m - n = 6 - 3 = 3$ , т.е. после соответствующей обработки (13.14) должна принять вид

$$f_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (13.15)$$

Существует несколько способов нахождения чисел  $\pi$ . Мы воспользуемся методом, предложенным Рэлеем.

Основным достоинством его является то, что он представляет собой своеобразный алгоритм, приводящий к решению задачи.

Из параметров, входящих в (13.15) необходимо выбрать три любых, но так, чтобы в них входили основные единицы, т.е. метр, килограмм и секунда. Пусть ими будут  $v$ ,  $d$ ,  $\rho$ . Легко убедиться, что они удовлетворяют поставленному требованию.

Образуются числа  $\pi$  в виде степенных одночленов из выбранных параметров, умноженных на один из оставшихся в (13.14)

$$\pi_1 = v^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} \frac{\Delta p}{l}; \quad (13.16)$$

$$\pi_2 = v^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu; \quad (13.17)$$

$$\pi_3 = v^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3} k; \quad (13.18)$$

Теперь задача сводится к нахождению всех показателей степеней. При этом они должны быть подобраны так, чтобы числа  $\pi$  были безразмерны.

Для решения этой задачи определим прежде всего размерности всех параметров:

$$\dim v = L \cdot T^{-1}; \quad \dim d = L; \quad \dim \rho = M \cdot L^{-3}$$

Вязкость  $[\mu] \rightarrow \text{Па} \cdot \text{с} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{М} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{М}^2} \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{М} \cdot \text{с}}$ , т.е.  $\dim \mu = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ .

Параметр  $\left[ \frac{\Delta p}{l} \right] \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{М}}{\text{с}^2 \cdot \text{М}^2 \cdot \text{М}} \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{М}^2 \cdot \text{с}^2}$ , и  $\dim \frac{\Delta p}{l} = \text{MT}^{-2}\text{L}^{-2}$ .

И, наконец,  $\dim k = \text{L}$ .

Таким образом, размерности чисел  $\pi$  будут

$$\dim \pi_1 = (\text{LT}^{-1})^{x_1} \text{L}^{y_1} (\text{ML}^{-3})^{z_1} \text{MT}^{-2}\text{L}^{-2}$$

либо

$$\dim \pi_1 = \text{L}^{x_1+y_1-3z_1-2} \text{T}^{-x_1-2} \text{M}^{z_1+1}$$

Аналогично два других

$$\dim \pi_2 = \text{L}^{x_2+y_2-3z_2-1} \text{T}^{-x_2-1} \text{M}^{z_2+1}$$

$$\dim \pi_3 = \text{L}^{x_3+y_3-3z_3+1} \text{T}^{-x_3} \text{M}^{z_3}$$

В начале раздела 13.3 уже отмечалось, что для любой безразмерной величины показатели размерности  $x = y = z = 0$ . Поэтому, например, для числа  $\pi_1$  можем записать

$$\text{L}^{x_1+y_1-3z_1-2} \text{T}^{-x_1-2} \text{M}^{z_1+1} = \text{L}^0 \text{T}^0 \text{M}^0$$

Приравнивая показатели степеней, получаем три уравнения с тремя неизвестными

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 2 = 0$$

$$-x_1 - 2 = 0$$

$$z_1 + 1 = 0$$

Откуда находим  $x_1 = -2$ ;  $z_1 = -1$ ;  $y_1 = 1$ .

Подставляя эти значения в (13.6), получаем

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \frac{d}{l} \quad (13.19)$$

Действуя аналогично, легко показать, что

$$\pi_2 = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu} = Re \text{ и } \pi_3 = \frac{k}{d}.$$

Таким образом, зависимость (13.15) принимает вид

$$f_3 \left( \frac{\Delta p}{\rho v^2} \frac{d}{l}, Re, \frac{k}{d} \right) = 0 \quad (13.20)$$

Так как  $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$  есть неопределяющее число подобия (число Эйлера), то

(13.20) можно записать как функциональную зависимость

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} \frac{d}{l} = f \left( Re, \frac{k}{d} \right) = 0$$

либо

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho v^2 \quad (13.21)$$

Следует иметь в виду, что анализ размерностей не дает и принципиально не может дать каких-то числовых значений в получаемых с его помощью соотношениях. Поэтому он должен завершаться анализом результатов и при необходимости их корректировкой, исходя из общих физических представлений. Рассмотрим с этих позиций выражение (13.21). В правую его часть входит квадрат скорости, но эта запись не выражает ничего, кроме того, что скорость возводится в квадрат. Однако, если поделить эту величину на два, т.е.  $\frac{v^2}{2}$ , то как известно из гидромеханики, она приобретает важный физический смысл: удельной кинетической энергии, а  $\frac{\rho v^2}{2}$  - динамическое давление, обусловленное средней скоростью. С учетом этого (13.21) целесообразно записать в виде

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2} \quad (13.22)$$

Если теперь, как в (12.26), обозначить  $f\left(Re, \frac{k}{d}\right)$  буквой  $\lambda$ , то приходим к формуле Дарси

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2} \quad (13.23)$$

либо

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (13.24)$$

где  $\lambda$  - гидравлический коэффициент трения, который, как следует из (13.22), является функцией числа Рейнольдса и относительной шероховатости ( $k/d$ ). Вид этой зависимости может быть найден только экспериментальным путем.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ.....	3
1.1. Векторы и операции над ними. ....	4
1.2. Операции первого порядка (дифференциальные характеристики поля).....	5
1.3. Операции второго порядка.....	6
1.4. Интегральные соотношения теории поля.....	7
1.4.1. Поток векторного поля.....	7
1.4.2. Циркуляция вектора поля.....	7
1.4.3. Формула Стокса.....	7
1.4.4. Формула Гаусса-Остроградского.....	7
2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ.....	8
2.1. Плотность.....	8
2.2. Вязкость.....	9
2.3. Классификация сил.....	12
2.3.1. Массовые силы.....	12
2.3.2. Поверхностные силы.....	12
2.3.3. Тензор напряжения.....	13
2.3.4. Уравнение движения в напряжениях.....	16
3. ГИДРОСТАТИКА.....	18
3.1. Уравнение равновесия жидкости.....	18
3.2. Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.....	19
3.3. Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления.....	20
3.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Закон Паскаля. Гидростатический закон распределения давления.....	20
3.5. Определение силы давления жидкости на поверхности тел.....	22
3.5.1. Плоская поверхность.....	24
4. КИНЕМАТИКА.....	25
4.1. Установившееся и неустановившееся движение жидкости.....	25
4.2. Уравнение неразрывности (сплошности).....	26
4.3. Линии тока и траектории.....	28
4.4. Трубка тока (поверхность тока).....	28
4.5. Струйная модель потока.....	28
4.6. Уравнение неразрывности для струйки.....	29
4.7. Ускорение жидкой частицы.....	30
4.8. Анализ движения жидкой частицы.....	31

4.8.1. Угловые деформации. ....	31
4.8.2. Линейные деформации.....	35
5. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ .....	37
5.1. Кинематика вихревого движения. ....	37
5.2. Интенсивность вихря. ....	38
5.3. Циркуляция скорости. ....	40
5.4. Теорема Стокса.....	41
6. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ .....	43
6.1. Потенциал скорости. ....	43
6.2. Уравнение Лапласа.....	45
6.3. Циркуляция скорости в потенциальном поле. ....	46
6.4. Функция тока плоского течения.....	46
6.5. Гидромеханический смысл функции тока. ....	48
6.6. Связь потенциала скорости и функции тока. ....	48
6.7. Методы расчета потенциальных потоков. ....	49
6.8. Наложение потенциальных потоков. ....	53
6.9. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра.....	57
6.10. Применение теории функций комплексного переменного к изучению плоских потоков идеальной жидкости.....	59
6.11. Конформные отображения. ....	61
7. ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ .....	64
7.1. Уравнения движения идеальной жидкости. ....	64
7.2. Преобразование Громеки-Лэмба. ....	65
7.3. Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба. ....	66
7.4. Интегрирование уравнения движения для установившегося течения.....	67
7.5. Упрощенный вывод уравнения Бернулли. ....	68
7.6. Энергетический смысл уравнения Бернулли.....	69
7.7. Уравнение Бернулли в форме напоров. ....	70
8. ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ .....	71
8.1. Модель вязкой жидкости .....	71
8.1.1. Гипотеза линейности . ....	71
8.1.2. Гипотеза однородности .....	73
8.1.3. Гипотеза изотропности .....	73
8.2 Уравнение движения вязкой жидкости. (уравнение Навье- Стокса) .....	73
9. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (основы гидравлики). ....	75
9.1. Расход потока и средняя скорость. ....	76
9.2. Слабдеформированные потоки и их свойства. ....	77
9.3. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.....	78
9.4. Физический смысл коэффициента Кориолиса.....	81
10. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ. ....	83

11. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ.....	85
12. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ. ....	89
12.1. Общие сведения.....	89
12.2. Уравнения Рейнольдса.....	91
12.3. Полуэмпирические теории турбулентности. ....	92
12.4. Турбулентное течение в трубах.....	94
12.5. Степенные законы распределения скоростей.....	99
12.6. Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах.....	99
13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	98
13.1. Инспекционный анализ дифференциальных уравнений. ....	10
5	
13.2. Понятие об автомодельности. ....	
.....	
106	
13.3. Анализ размерностей. ....	
.....	
107	



Учебное издание

Ким Федорович Иванов  
Сергей Владимирович Сурков

Механика жидкости и газа (конспект лекций)  
Часть 1

Редактор

Т.И.Лучнева

Корректор

Л.А.Гречанова

---

Подписано к печати . Формат 60×84/16.  
Бумага газетная. Печать офсетная усл. печ. л.  
уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ №

---

Одесский государственный политехнический университет  
270044, Одесса, пр. Шевченко, 1