МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

И. о. зав. кафедрой ТП ____________ В. В. Клочков

1 декабря 2005/2006 учебного года

Образовательная профессиональная программа (ОПП)	030501 «Юриспруденция»
Факультет	Экономики, менеджмента и права (ФЭМП)
Выпускающая кафедра по ОПП	Теории права

ТЕКСТ ЛЕКЦИЙ

Дисциплина	Информатика и математика
Кафедра	Теории права
Форма обучения	Очная
Срок обучения	5 лет
Технология обучения	Стандартная
Курс	1
Семестр	1, 2

Академические часы: 220		
Учебных занятий	-	180 час.
Из них:		
лекций	-	72 час.
практических	-	36 час.
лабораторных	-	36 час.
самостоятельных	-	40 час.
индивидуальных	-	36 час.
курсовая работа	-	0 час.
Промежуточный рейтинг-контроль (зачет)		**1 семестр**
Итоговый рейтинг-контроль (экзамен)		**2 семестр**

Зачетные единицы: 6		
Учебных занятий	-	5 з. е.
Из них:		
лекций	-	2 з. е.
практических	-	1 з. е.
лабораторных	-	1 з. е.
самостоятельных	-	1 з. е.
индивидуальных	-	1 з. е.
курсовая работа	-	0 з. е.
Промежуточный рейтинг-контроль (зачет)		**1 семестр**
Итоговый рейтинг-контроль (экзамен)		**2 семестр**

МАТЕМАТИКА (семестр 2)

Лекция 1. Исходные понятия теории множеств

1. Понятие множества, подмножества, собственного подмножества.
2. Пустое множество.
3. Способы задания множеств.

1. Понятие множества, подмножества, собственного подмножества

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918). Следуя Кантору, понятие «множество» можно определить так:

Множество- совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединенных в единое целое.

Объекты, составляющие множество, называются элементами множества.

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами. Если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначается:

$x \in A$.

Если каждый элемент множества B является также и элементом множества A, то говорят, что множество B является *подмножеством* множества A или включается в него:

$B \subset A$.

Подмножество B множества A называется *собственным подмножеством*, если

$B \neq A$.

2. Пустое множество

Среди множеств выделяют особое множество - пустое множество. Пустое множество- множество, не содержащее ни одного элемента.

Вот что говорит о пустом множестве П.С. Александров: «Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль». Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, т.к. может быть какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг.

Пустое множество является частью любого множества.

Что значит, что множество A является подмножеством множества B? Это значит, что все элементы множества A принадлежат и множеству B. Если представлять себе множества в виде коробок, то множество B – это большая коробка, а множество A – коробка поменьше, в которой лежат некоторые из элементов, лежащих в коробке B. Обозначение: $A \subset B$.

Например, множество всех четных чисел является подмножеством множества всех целых чисел, а множество $\{0,1,2\}$ – подмножеством множества $\{0,1,2,3\}$.

Рассмотрим два множества:

{все летающие крокодилы} и {все участники олимпиады}.

Является ли одно из них подмножеством другого?

Как вообще доказать, что $A \subset B$? Можно проверить, что любой элемент a множества A лежит в B. А можно применить метод от противного: если A не является подмножеством B, то найдется элемент $a \in A$, такой что $a \notin B$, а если такого a нет, то $A \subset B$.

Но можно ли найти летающего крокодила, не участвующего в олимпиаде? Да где вообще найдешь летающего крокодила...

Поэтому {все летающие крокодилы} $\subset$ {все участники олимпиады}.

Что же получается: все летающие крокодилы участвуют в олимпиаде?Множество летающих крокодилов – это *пустое* множество: в нем нет элементов. Это множество настолько важное, что для него даже придумали особый символ: $\varnothing$. Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно. В самом деле, предположим, что существуют два разных пустых множества. Но что значит, что множества разные? Это значит, что в одном из них найдется элемент, который не принадлежит другому. Но в пустых множествах вообще элементов нет!

Итак, мы доказали, что пустое множество единственно и является подмножеством любого другого множества.

Множество считается определенным, если указаны все его элементы. Эти элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы.

Последний способ возможен только в том случае, если множество имеет конечное число элементов.

Конечное множество - множество, состоящее из конечного числа элементов.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью некоторых операций.

Бесконечное множество - непустое множество, не являющееся конечным.

Пример: Множество натуральных чисел является бесконечным.

Упорядоченное множество - множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие некоторое число (номер этого элемента) от 1 до n, где n - число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Каждое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы в некоторый список (a, b, c, d,...), а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке.

3. Способы задания множеств

Возможны различные способы задания множеств. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих в это множество.

Пример: Множество учеников данного класса определяется их списком в классном журнале, множество всех стран на земном шаре - их списком в атласе, множество всех костей в человеческом теле - их списком в учебнике анатомии.

Но этот способ применим только к конечным множествам, но и то не ко всем.

Пример: Хотя множество всех рыб в океане конечно, вряд ли его можно задать списком.

В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого характеристического свойства. Свойство является характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данным свойством.

Пример: Свойство "быть квадратом целого числа" задает (бесконечное) множество всех квадратов целых чисел.

Задание множеств их характеристическим свойством иногда приводит к осложнениям. Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, т. е. всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно.

Пример: Множество толстокожих животных, имеющих два бивня, совпадает со множеством толстокожих животных, имеющих хобот, - это множество слонов.

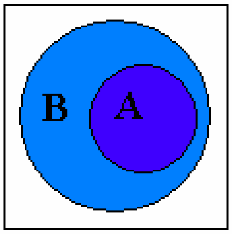
Итак, множества можно задавать тремя способами:

1. Перечислением элементов множества;
2. Описанием общего (характеристического) свойства, объединяющего элементы;
3. С помощью порождающей процедуры.

Лекция 2. Основные теоретико-множественные отношения

Множества А и В равны, если они состоят из одних и тех же элементов.
Пример: Равными являются все пустые множества.
Равенство множеств А и В записывают в виде А=В. Отношение "=" называется *отношением равенства*.
Множество А называют подмножеством множества В, если каждый элемент множества А является в то же время элементом множества В.
То, что множество А является подмножеством множества В обозначают так $A \subset B$
Данное отношение называется *отношением включения*.
Таким образом, подмножеством данного множества В является и само множество В.
Пустое множество, по определению, считают подмножеством всякого множества.

На диаграмме Эйлера-Венна утверждение "множество А является подмножеством множества В" изображают так:

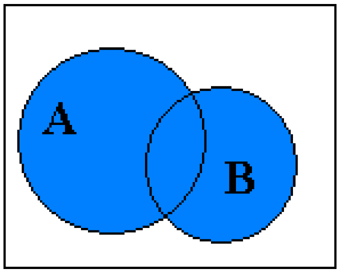


Лекция 3. Основные теоретико-множественные операции

1. Объединение.
2. Пересечение.
3. Разность.
4. Дополнение.

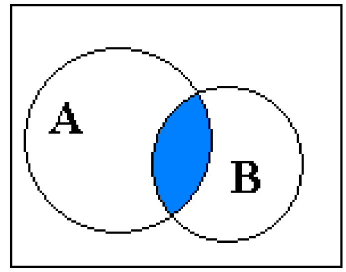
1. Объединение
Основными операциями над множествами являются объединение, пересечение и разность.
Объединением двух множеств называется новое множество
$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Суммой, или объединением произвольного конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В.
Объединение множеств обозначается $A \cup B$

На диаграмме Эйлера-Венна объединение двух множеств выглядит так



2. Пересечение*Пересечением* двух множеств называется новое множество
$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Пересечением любого конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно.
Пересечение множеств обозначается $A \bigcap B$

На диаграмме Эйлера-Венна пересечение двух множеств выглядит так

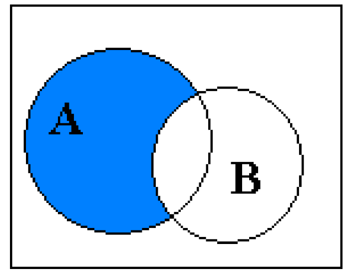


3. Разность*Разностью* двух множеств называется новое множество
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Разностью между множеством B и множеством A называется множество всех элементов из B, не являющихся элементами множества A.

Разность двух множеств обозначается $A \setminus B$

На диаграмме Эйлера-Венна разность двух множеств выглядит так

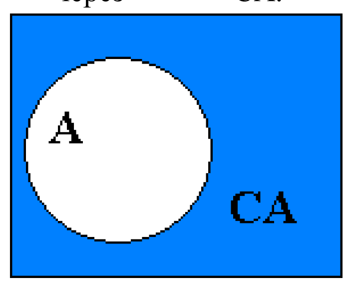


4. ДополнениеЕсли класс объектов, на которых определяются различные множества обозначить Ω (*Универсум*), то *дополнением* множества A называют разность
$\overline{A} = \Omega \setminus A$

Дополнением множества A до универсума Ω называется разность $\overline{A} = \Omega \setminus A$, где A является подмножеством универсального множества Ω.

Дополнение множества также обозначается через CA.

На диаграмме Эйлера-Венна дополнение множества A выглядит так



Лекции 4-5. Парадоксы теории множеств

1. Парадокс брадобрея.
2. Равномощность множеств.
3. Парадоксы, связанные с бесконечностью.

1. Парадокс брадобрея

Это довольно известная история, и у нее есть много версий.

В одном полку жил полковой парикмахер, которого по историческим причинам называют брадобреем. Однажды командир приказал ему брить тех и только тех, кто не бреется сам.

Приказ довольно разумный: если солдат бреется сам, то зачем тратить на него время полковому парикмахеру? Наверное, полк был большой, и брадобрей просто не справлялся

Брадобрей, получив приказ, сначала обрадовался, потому что многие солдаты умели бриться сами, побрил тех, кто бриться сам не умел, а потом сел на пенек и задумался: а что ему с собой-то делать? Ведь если он будет брить себя, то нарушит приказ командира не брить тех, кто бреется сам. Брадобрей уже решил было, что брить себя не будет. Но тут его осенила мысль, что если он сам себя брить не будет, то окажется, что он сам не бреется, и по приказу командира он должен все-таки себя побрить...

Что с ним стало, история умалчивает.

Причем же здесь теория множеств? А вот причем: командир пытался определить множество людей, которых брадобрею нужно брить, таким образом:

{те и только те, кто не бреется сам}.

Казалось бы, обычное множество, описывается несколькими русскими словами, чем оно хуже, например, множества {все ученики школы}?

Но с этим множеством тут же возникает проблема: непонятно, принадлежит ли этому множеству брадобрей.

Вот другая версия этого парадокса.

Прилагательное русского языка назовем *рефлексивным*, если оно обладает свойством, которое определяет. Например, прилагательное "русский" – рефлексивное, а прилагательное "английский" – нерефлексивное, прилагательное "трехсложный" – рефлексивное (это слово состоит из трех слогов), а прилагательное "четырехсложный" – нерефлексивное (состоит из пяти слогов). Вроде бы ничто не мешает нам определить множество

{все рефлексивные прилагательные}.

Но давайте рассмотрим прилагательное "нерефлексивный". Оно рефлексивное или нет?

Можно заявить, что прилагательное "нерефлексивный" не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным. Но как тогда быть с таким заклинанием:

верно либо утверждение, либо его отрицание ?

(Это заклинание называется законом исключенного третьего; на нем, собственно, и основан метод от противного.)

Наконец, третья версия парадокса. Рассмотрим множество

$$M = \{\text{множества } A, \text{ такие, что } A \notin A\}$$

– мы включаем во множество M только те множества A, которые принадлежат сами себе. Бывают же множества, которые содержат другие множества.

Например, пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\{1,2\},3\}$,

множеству A принадлежат числа 1, 2, 3, а множеству B – два элемента: множество $\{1,2\}$ и число 3. Возвращаясь к коробкам, это можно сказать так: одни коробки можно класть в другие коробки. (Оказывается, что в каждой такой последовательности вложенных коробок всегда конечное число элементов – этому есть глубокие причины.)

Рассмотренное множество M – это своего рода "брадобрей". Если предположить, что $M \in M$, сразу приходим к выводу, что $M \notin M$. Если же предположить, что $M \notin M$ – получаем, что $M \in M$.

Столкнувшись с этими парадоксами, создатели теории множеств осознали, что нельзя задавать множества произвольными словосочетаниями. После этого они стали бороться с парадоксами двумя способами.

1. Первый способ – способ Кантора, придумавшего "наивную теорию множеств", в которой запрещаются все действия и операции, ведущие к парадоксам. Идея в следующем: разрешается работать с множествами, которые " встречаются в природе", также разрешается работать с множествами, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями.

Пусть, например, A = {множество учащихся школы},

B = {множество непрерывных функций}

(эти множества "встречаются в природе"), из них можно получить объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$. Можно даже умножить множество A на множество B: по определению:

$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

– множество пар, в которых первый элемент из первого множества, а второй – из второго. В нашем случае $A \times B$ – это множество пар, в которых первый элемент – учащийся школы, а второй – какая-нибудь непрерывная функция.

2. Другой способ – аксиоматический. Этот способ преодоления парадоксов развивали Цермело и Френкель (система аксиом Цермело–Френкеля), Гедель и Бернайс (система аксиом Геделя–Бернайса). Согласно этой теории, множество – это нечто, удовлетворяющее аксиомам, например, следующим.

1. Аксиома объемности. Множество определяется своими элементами: множества, состоящие из одних и тех же элементов, равны.

$$\forall z\,(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow \Rightarrow x = y$$

2. Аксиома объединения. Объединение всех элементов множества есть множество.

$$\mathrm{Set}\{z\colon \exists\, y \in x\ (z \in y)\}$$

3. Аксиома выделения. Для каждого множества A и каждого условия φ существует множество $B = \{x\colon x \in A,\ \varphi(x)\}$ – подмножество элементов множества A, удовлетворяющих условию φ.

$$\forall x\,(\varphi(x) \Rightarrow x \in y) \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$$

Другими словами, мы не можем взять множество всех летающих крокодилов со всего мира или множество тех множеств, которые не содержат сами себя, а можем, взяв некоторое множество, выделить в нем "кусочек" – множество его элементов, удовлетворяющих некоторому условию.

4. Аксиома степени. Множество всех подмножеств данного множества есть множество.

$$\mathrm{Set}\{y\colon y \subseteq x\}$$

5. Аксиома подстановки. Пусть X – множество, а $\varphi(y,z)$ – произвольная формула. Тогда если для каждого y существует и единственен z, такой, что истинно $\varphi(y,z)$, то существует множество всех z, для которых найдется $y \in X$, такой что $\varphi(y,z)$ истинно.

$$\forall y\ \exists!\ z\ \varphi(y,z) \Rightarrow \mathrm{Set}\{z\colon \exists\, y \in x\ \varphi(y,z)\}$$

6. Аксиома фундирования. Не существует бесконечной последовательности вложенных множеств: каждая цепочка множеств $A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \ldots$ конечна.

$$\exists y\,(y \in x) \Rightarrow \exists y \in x\ \forall z \in y\ (z \notin x)$$

7. Аксиома бесконечности. Существуют бесконечные множества, т. е. такие множества A, что A равномощно $A \cup \{A\}$.

$$\exists\, x\,((\exists\, y \in x\ \forall\, z\ (z \notin y)) \wedge \forall\, y \in x\ \exists z \in x\ (w \in z \Leftrightarrow w \in y \vee w = y))$$

8. Аксиома выбора. Еще одна очень сложная, но и очень очевидная аксиома – но о ней позже.

Записи аксиом приведены на "языке кванторов". Вот значения использованных кванторов: $\forall\, x$ – для любого x; $\exists\, x$ – существует x; $\exists!\ x$ – существует единственный x; Set{... } – {... } является множеством; $\{x\colon \varphi(x)\}$ – множество тех и только тех x, которые удовлетворяют условию $\varphi(x)$; $\vee$ – логическое "или"; $\wedge$ – логическое "и".

Подробнее об аксиоматике теории множеств см. следующую лекцию.

2. Равномощность множеств

Рассмотрим два множества A и B.

Отображение f из A в B (обозначается $f\colon A \to B$) – это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие элемент множества B, причем ровно один. (При этом не запрещается двум элементам множества A ставить в соответствие один и тот же элемент множества B, рис. 1, *а* .)

Отображение f называется *взаимно однозначным* , если каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A (рис. 1, *б*).

а) б)

Рис. 1

Множества A и B называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение f: $A \to B$. Понимать это можно так: множества равномощны, если в них одинаковое количество элементов.

Например, множества {0, 1, 2} и {лошадь, корова, телевизор} равномощны, а множества {0, 1, 2} и {лошадь, корова} неравномощны. А равномощны ли множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$? Неравномощны: в множестве $\varnothing$ нет ни одного элемента, а в множестве $\{\varnothing\}$ есть один элемент – пустое множество (множество $\{\varnothing\}$ – это коробка, в которой лежит пустое множество, а пустое множество – это коробка, в которой ничего не лежит).

Множества **N** (множество всех натуральных чисел) и **N** \ {1} (множество всех натуральных чисел без единицы) равномощны: легко видеть, что отображение f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N} \setminus \{1\}$, f: $n \to n + 1$, является взаимно однозначным. Множества **N** и **Z** (множество всех целых чисел) также равномощны (достаточно рассмотреть отображение, которое переводит четные натуральные числа в целые неотрицательные, а нечетные – в отрицательные).

Обозначим через $P(A)$ множество всех подмножеств множества A. Примеры $P(A)$ для некоторых множеств A приведены в табл. 1. (Естественно, подмножествами множества A являются и пустое множество, и само множество A.)

Таблица 1

A	P(A)
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$
{1}	$\{\varnothing, \{1\}\}$
{1, 2}	$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Подмножества множества A = {1,2,3} не будем выписывать в строчку (так недолго запутаться), а перечислим при помощи таблицы: если элемент i входит в подмножество с номером j, то на пересечении i-й строки и j-го столбца ставится плюс, если не входит – минус (табл. 2).

Таблица 2

		j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
i	1	+	+	+	-	-	-	+	-
	2	+	+	-	+	-	+	-	-
	3	+	-	+	+	+	-	-	-

Например, первый столбец, в котором стоит три плюса, соответствует подмножеству {1,2,3}.

Если составить такую же таблицу для множества из n элементов, каждое подмножество будет определяться столбцом из n символов (по числу элементов), и каждый символ можно выбрать двумя способами – либо " + ", либо " – ". Поэтому всего получится 2^n различных столбцов. Итак, если в множестве A содержится n элементов, то в множестве $P(A)$ содержится 2^n элементов – существенно больше, чем в множестве A.

Но если подмножества конечного множества мы можем просто сосчитать, то как же быть с бесконечными? Например, подмножеств множества натуральных чисел бесконечно много, и самих натуральных чисел бесконечно много. Оказывается, что в множестве P(**N**) "бесконечно больше" элементов, чем в множестве **N**.

Теорема. *Каково бы ни было множество A, множество его подмножеств P(A) неравномощно самому множеству A.*

Это один из важнейших фактов теории множеств.

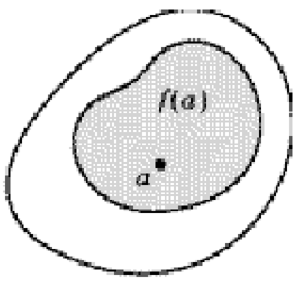
Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что A равномощно $P(A)$, т. е. существует взаимно однозначное отображение

$$f\colon A \to P(A),$$

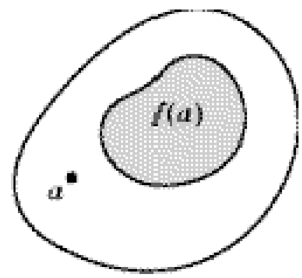
которое каждому элементу a множества A ставит в соответствие $f(a)$ – подмножество множества A.

Вспоминая рефлексивные прилагательные, которые сами обладают тем свойством, которое определяют, мы назовем элемент a хорошим, если $a \in f(a)$ (рис. 2, *а*), и плохим, если $a \notin f(a)$ (рис. 2, *б*). Пусть $\Pi \subset A$ – множество всех плохих элементов (возможно, пустое). Поскольку отображение f взаимно однозначно, существует элемент $x \in A$, такой что $f(x) = \Pi$. Вопрос: элемент x – хороший или плохой? Предположим, элемент x – хороший. Но тогда $x \in f(x)$, а $f(x) = \Pi$ – множество плохих элементов, и значит, элемент x – плохой. Противоречие. Если же элемент x – плохой, то $x \notin f(x) = \Pi$, а раз x не принадлежит множеству плохих элементов, то x – хороший. Снова противоречие. Получается, что элемент x, с одной стороны, должен принадлежать Π, а с другой стороны, не должен.

Но сейчас, в отличие от парадокса с прилагательным "нерефлексивный", у нас есть лазейка. Мы получили противоречие, предположив, что A равномощно $P(A)$. Значит, наше предположение неверно, т. е. A и $P(A)$ неравномощны. Теорема доказана.



а)



б)

Рис. 2

<u>3. Парадоксы, связанные с бесконечностью</u>

С бесконечными множествами мы уже встречались и даже установили один удивительный факт: множества **N** \ {1} и **N** равномощны. Мы знаем, что если к конечному множеству добавить элемент, то полученное множество неравномощно тому, которое было. Это очень важное различие между конечными и бесконечными множествами, и даже определение бесконечного множества в некоторых учебниках дается так: множество называется бесконечным, если оно равномощно себе плюс еще один элемент.

А теперь – еще одна история:

Дед Мороз и конфеты

На Новый год к детишкам пришел Дед Мороз с мешком конфет. Конфет в мешке бесконечно много, и они занумерованы натуральными числами (наверное, Дед Мороз был математический). На каждой конфете написан ее номер, и для каждого натурального числа есть ровно одна конфета с этим номером. За одну минуту до полночи Дед Мороз взял конфету № 1 и подарил детям. Через полминуты он дал детям конфеты № 2 и № 3 (видимо, понял, что дал мало), но при этом конфету № 1 забрал (неужели дети ее за полминуты еще не съели?).

Еще через четверть минуты он дал детям конфеты № 4, № 5, № 6 и № 7, но забрал конфеты № 2 и № 3. И так далее: щедрый Дед Мороз каждый раз дает вдвое больше конфет, чем на предыдущем шаге, и за [$1/(2^n)$] мин. до полночи дает конфеты с номерами

$$2^n, 2^n + 1, ..., 2^{n+1} - 1,$$

а забирает конфеты с номерами

$$2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, ..., 2^n - 1,$$

которые сам же дал на предыдущем шаге. При этом количество конфет у детей стремительно возрастает Так что дети чувствуют себя совершенно счастливыми.
Сколько конфет будет у детей в полночь?
Давайте разбираться последовательно. У кого будет в полночь первая конфета? У Деда Мороза. А вторая конфета? У Деда Мороза: он забрал ее себе за четверть минуты до полночи. М-да... Начинают закрадываться подозрения…
У кого будет m-я конфета? Если $2^{n-1} \leq m \leq 2^n - 1$, то за [$1/(2^n)$] мин. до полночи хитрый Дед Мороз ее забрал. Итак, каждая конкретная конфета в полночь окажется у Деда Мороза. Что же получается? После каждого шага у детей становится в два раза больше конфет, а в полночь происходит катастрофа?
На самом деле парадокса тут никакого нет. Все нормально, кроме того, что обидно. Но не каждое верное утверждение должно быть приятно.
Все дело в том, что бесконечные множества устроены существенно сложнее конечных, и интуиция тут не всегда срабатывает правильно.
Математики довольно долго боялись абстрактного понятия "множество". Понятно почему: возникали парадокс брадобрея, парадокс с нерефлексивным прилагательным и другие очень странные множества, например, бесконечные, свойства которых иногда очень непохожи на свойства конечных множеств. Даже Евклид опасался бесконечных множеств и свою знаменитую теорему о том, что простых чисел бесконечно много, формулировал так: простых чисел больше любого наперед заданного количества, т. е. какое бы число мы ни взяли, простых чисел все равно больше чем это число. Кроме этого, рассматривая бесконечные множества, математики столкнулись с *аксиомой выбора*, которую мы уже упоминали.

Лекции 6-7. Аксиоматический метод

Если осуществить строго формальный анализ булевой алгебры, то обнаружится, что она имеет аксиоматический характер. Это означает, что мы имеем дело с *дедуктивной* системой, а во всякой дедуктивной системе теоремы доказываются на основе аксиом и определений.
Каким требованиям должна отвечать система аксиом?
В результате отказа от ставки на непосредственную очевидность некоторых истин математики и логики было установлено, что в формальном плане, где нет места образному мышлению, аксиомы должны отвечать прежде всего трем главным требованиям - требованиям *непротиворечивости, полноты* и *независимости.*
Система аксиом называется непротиворечивой, если из этих аксиом нельзя сделать два взаимно исключающих друг друга вывода.
Система аксиом называется полной, если она допускает лишь одну-единственную реализацию, то есть если две любые модели этой системы аксиом совпадают, или, как говорят, *изоморфны*. Две модели аксиоматической системы считаются *изоморфными*, если между образующими эти модели элементами можно установить *взаимно-однозначное соответствие*. Иными словами, две изоморфные модели представляют собой один и тот же абстрактный математический объект, только описанный разными (но "переводимыми") формальными языками.
Система аксиом называется независимой, если ни одну из аксиом этой системы нельзя вывести из других аксиом, то есть доказать как теорему, базируясь на всех остальных аксиомах системы.
Совершенно напрасно искать в аксиомах математики или математической логики что-то наглядное, очевидное, не вызывающее никаких сомнений у жителей Земли, для которых Солнце "всходит" и "заходит". Математические или логические аксиомы истинны лишь в той мере, в какой удается доказать вытекающие из них теоремы.
Интересно отметить, что принципу очевидности в познании был нанесен чувствительный удар не только математиками, но и психологами XIX-XX вв. Об этом стоит сказать особо.

В конце XIX в. наблюдалось бурное развитие экспериментальной психологии. В числе лидеров этого направления исследований были немецкие психологи Вюрцбургской школы экспериментальной психологии. Свои исследования они начинали с изучения восприятия значений слов различными людьми, исходя из допущения, что в состав значений слов обязательно входят наглядные представления; иначе, как традиционно считалось, слова естественного языка не могут быть поняты. При этом в качестве аргументов фигурировали ссылки на Аристотеля, заявлявшего, что мысли не могут существовать без некоторого чувственного опыта. Однако эксперименты свидетельствовали о противоположном.

Оценивая экспериментальные данные, один из ученых этой школы писал, что вплоть до XIX столетия слово не принималось за слово, если ему не хватало наглядности, благодаря которой и получило оно будто бы свой конкретный смысл. Во многих педагогических сочинениях наглядность оценивалась как альфа и омега всякого душевного развития. Уже упоминавшийся ранее Кант называл идеи без наглядности пустыми, а известный немецкий философ А. Шопенгауэр (1788-1860) хотел всю математику обосновать на конкретно-образных началах и изгнать формальные доказательства из геометрии.

Крупный немецкий психолог и философ В. Вундт (1832-1920) в своей статье "Общее учение о математическом методе" настаивал на том, что ряд базисных понятий математики базируется на принципе наглядности. В связи с этим он критиковал платонизм в математике, согласно которому абстрактному понятию можно приписать реальное существование. По его мнению, эта концепция мистична, ибо за миром представлений она помещает новый мир совершенно непредставимых идей. Однако в данном случае остается непонятным, каким образом представленный объект может вызвать в сознании непредставимую идею. Вундт настаивает на необходимости устранения несоизмеримости между идеей и образом, вернув идее ее интуитивную природу и тем самым сделав понятным отношение идеи к чувственным объектам.

В 30-е годы XX в. известный советский философ и психолог К. Р. Мегрелидзе (1900-1944) напишет, что, осмысливая такие понятия, как "причина", "цель", "сила" и т. п., мы не найдем никакого конкретно-образного содержания в нашем сознании, но зато обнаружим, что в некоторых случаях сознание человека стремится принять *известное общее расположение, направление*, и при этом в нем будет *отсутствовать предметно-чувственное содержание, не будет никаких образов и наглядных представлений*.

Придерживаясь этой точки зрения на функционирование абстрактных понятий, Мегрелидзе так характеризовал математику и ее задачи: *математика должна заботиться не о согласовании с действительностью, а о том, чтобы не противоречить самой себе, своим основным постулам и определениям*. Всякая чисто математическая дисциплина представляет систему условных рассуждений, взаимно связанных не смыслом реальной действительности, а смыслом, который мы им приписываем по тем или иным научно-теоретическим соображениям. Поэтому в математике нет истин в философском значении, а есть только *формально-гипотетические истины*.

Лишив многие научные понятия их наблюдаемого или непосредственно очевидного содержания, мы не обеднили наш интеллект, а наоборот, усилили его мощь, сделав научные понятия более гибкими, универсальными и многофункциональными.

Хотя после Лобачевского и Бояи большинство математиков признали возможность строить различные неевклидовы геометрии, некоторые из них так и не смогли понять, что другие аксиомы Евклида (365-300? гг. до н. э.) также являются в известном смысле произвольными предположениями. И все же росло число ученых, решившихся на эксперимент с математикой. Одни из них, отказавшись от дурной привычки к наглядности, попытались свести геометрию к упражнениям в так называемом логическом синтаксисе, а другие занялись исчислением соотношений между логическими переменными.

Не остался в стороне от новых веяний в математике и выдающийся немецкий ученый Давид Гильберт (1862-1943), объяснявший своим любознательным студентам и пытливым коллегам, что прямая, точка и плоскость, как их определял Евклид, не имеют жестко закрепленного за ними смысла. Более того, свой строгий математический смысл они получают только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются.

Гильберт безбоязненно утверждал, что даже название основных понятий математической теории могут быть выбраны произвольно. Эту мысль он остроумно сформулировал своим друзьям на вокзале в Берлине. "Следует добиться того, - наставлял он коллег, хитро улыбаясь, - чтобы с равным успехом можно было говорить вместо точек, прямых и плоскостей о столах, стульях и пивных кружках".

Что Гильберт имел в виду?

Если заменить слова "точка", "прямая" и "плоскость" словами "стол", "стул" и "пивная кружка", то в геометрии как абстрактно-теоретической науке ничего не изменится, ибо, независимо от названий, мы будем иметь дело с абстрактными объектами, для которых *справедливы соотношения, выражаемые аксиомами*.

Подобные новаторские идеи существенно затрагивали основы математики, радикально меняя воззрения на природу математических объектов, которые долгое время ассоциировались с величинами и геометрическими фигурами. Математики второй половины XIX в. начинают соглашаться с тем, что в сфере их науки вполне правомерно рассуждать об объектах, *не имеющих никакой наглядной интерпретации*.

Новые взгляды на объекты математики способствовали широкому применению в ней аксиоматического метода, а вместе с тем - и символической логики. Задачу математики многие стали видеть в том, чтобы создать учение об *отношениях* между абстрактными объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, аксиоматически полагаемых в основание теории.

Эти умонастроения достаточно ясно выразил английский логик и философ Бертран Рассел (1872-1970) в своей статье "Новейшие работы о началах математики".

По его мнению, "математика должна быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем ни того, о чем говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим". Разъясняя эту мысль, Рассел писал: логика в строгом смысле слова отличается от других систем теоретического знания тем, что ее предложения могут быть представлены в форме, которая делает их применимыми к чему угодно. Очевидность, заявлял он, находится во вражде с точностью. Вот почему мы вынуждены изобретать новый и трудный символизм, в котором нет ничего очевидного, но который позволяет точно установить количество неопределяемых понятий и недоказуемых в данной системе предложений. Без логико-математического символизма это было бы трудно сделать. Поэтому вся чистая математика (арифметика, математический анализ и геометрия) может рассматриваться как построенная из сопряжения примитивных (простейших) идей логики, а ее теоретические предложения (теоремы) в таком случае должны пониматься как выводимые из общих аксиом логики.

Вдохновляемый этими умонастроениями, Гильберт в своих знаменитых геттингенских лекциях "Основания геометрии" ясно наметил подход к ключевым проблемам математики, получивший название "метаматематика" (буквально: *за пределами математики*).

Метаматематика - это весьма своеобразная "сверхматематика", главной задачей которой является доказательство непротиворечивости формализованных теорий, рассматриваемых как бы извне, как бы сверху, с головокружительной высоты полета логико-математической мысли. Естественно предположить, что ее методы должны быть в известном смысле "сверхформализованными", "сверхжесткими" для проникновения в гранит формализованных теорий.

Особое значение Гильберт придавал *требованию непротиворечивости аксиом*, так как при новом понимании математической теории как системы теорем, выводимых дедуктивно из множества произвольно выбранных аксиом, понятие непротиворечивости теории было единственно эффективной заменой непосредственно очевидных математических истин.

К вопросу о парадоксах в классической теории множеств. Первым попытался остудить пыл Великого Метаматематика доцент Геттингенского университета Эрнст Цермело (1871-1953), которого высоко ценил Гильберт и который предпочитал виски любой компании. Цермело указал Гильберту на досадный парадокс в теории множеств. Аналогичным образом поступил Бертран Рассел, указавший на этот же парадокс немецкому ученому Готлобу Фреге (1848-1925) в тот самый момент, когда Фреге готовился послать в печать свой труд по основаниям арифметики.

Логики обычно говорят: данная теория содержит *антиномию*, или *парадокс*, если в ней доказуемы два противоречащих друг другу выражения. А что же математики?

Увы, лишь немногие из них были обеспокоены возникновением антиномий, имеющих то или иное отношение к их теоретико-множественным представлениям. Большая часть считала, что антиномии - это философские "фокусы", а их эквивалент, парадоксы, - это то, что относится скорее к лингвистике, но никак не к математике, где имеют дело с трудностями в форме противоречий. Однако время показало, что проблемы антиномий и парадоксов не являются философско-лингвистическими "изобретениями"; они имеют самое прямое отношение к математике.

Современные ученые различают *логические* и *семантические (смысловые) антиномии*. К логическим антиномиям относится известная антиномия Рассела, суть которой состоит в следующем.

Для некоторого произвольного множества уместно выяснить, является оно своим собственным элементом или нет. Нам, скажем, совершенно ясно, что множество планет Солнечной системы не является одной большой планетой. Следовательно, множество планет не есть собственный элемент. Но множество может состоять из одного элемента. Такое множество является собственным элементом. Очевидно, собственным множеством должно являться и множество всех множеств ("сверхмножество").

Проверим это утверждение, обозначив множество всех множеств большой буквой M. Если M есть элемент M (элемент самого себя), то оно принадлежит множеству всех множеств, не являющихся собственными элементами. С другой стороны, если M не есть собственный элемент M, оно не принадлежит множеству всех множеств, не являющихся собственными элементами. Следовательно, M является собственным элементом. Отсюда вытекает: M есть элемент M в том и только в том случае, когда M не есть элемент M. Проиллюстрирую это противоречие на следующем весьма популярном примере.

Допустим, живет в какой-то деревне цирюльник, бреющий только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Если мы обозначим его буквой x и будем рассуждать уже известным образом, то придем к заключению: x бреет x в том и только в том случае, когда x не бреет x.

Конечно, въедливый читатель сразу укажет на совершенно дурацкое условие, которому должен, по предположению, удовлетворять наш мучающийся "философским" вопросом небритый цирюльник (брить ли самого себя?). Это условие (жизненная ситуация) оказывается *внутренне противоречивым*, а следовательно, *невыполнимым*. Чтобы избежать противоречия, предлагается добавить всего лишь несколько слов к описанию ситуации, а именно: цирюльник бреет всех жителей деревни, не считая себя самого.

В теоретической науке все обстоит не так просто, как в случае с деревенским цирюльником, что подчеркнули своими парадоксами Цермело и Рассел.

По словам Гильберта, парадокс, сформулированный Расселом, произвел в математике эффект катастрофы. Один за другим выдающиеся специалисты в теории множеств бросали свои исследования в этой области. Нависла угроза над дедуктивными методами, так как становилось все более явным, что подобные парадоксы возникли как следствие используемых в математике дедуктивных методов. Защитников канторовской теории множеств начали обвинять в том, что они не понимают природы математики и необоснованно переносят на сферу бесконечного методы рассуждений, верные лишь применительно к области конечного.

Гильберт был убежден, что существует способ избавиться от парадоксов, не жертвуя слишком многим. В связи с этим он предложил, чтобы само доказательство стало объектом логико-математического исследования. Так была оформлена идея метаматематики, или теории доказательств.

Аксиоматический метод и его связь с математической теорией множеств. Понятие доказательства является важнейшим научным понятием. В современных теоретико-дедуктивных науках оно относится к процедурам установления истинности соответствующих теоретических высказываний (предложений). Эти процедуры являются существенным элементом того, что известно под названием аксиоматического метода, который широко используется в настоящее время для разработок и изложения математических дисциплин.

Развитие аксиоматического метода *можно рассматривать как выражение тенденции ограничить обращение к интуитивной очевидности,* которая чревата субъективизмом и разночтением. Эта тенденция проявляется прежде всего в стремлении доказать как можно больше научно-теоретических положений и, следовательно, ограничить, насколько это возможно, число положений и постулатов, волюнтаристски принимаемых за истинные только в силу их интуитивной очевидности.

Характерно, что вплоть до конца XIX столетия понятие доказательства имело преимущественно психологический смысл. Доказательство понималось как некоторая интеллектуальная деятельность, целью которой являлось убеждение самого себя и других в истинности ожидаемого предположения. На аргументы, применяемые при доказательствах, не накладывалось никаких ограничений, за исключением того, что они должны быть интуитивно убедительными. Однако, как подчеркивал известный польский логик А. Тарский (1902-1983), в какой-то период времени начала чувствоваться острая необходимость подвергнуть понятие доказательства более глубокому и систематическому анализу, который имел бы результатом ограничение ссылок на интуитивную очевидность. Отчасти это было связано с развитием некоторых специфических направлений в математике (скажем, открытие неевклидовой геометрии). Такой анализ был осуществлен логиками в содружестве с математиками, что привело к введению нового понятия в язык теоретической науки - понятия *формального доказательства,* которое оказалось адекватной заменой и существенным усовершенствованием прежнего понятия, обремененного грузом ошибочных психологических ассоциаций.

В чем заключается суть формального доказательства?

На первом этапе формального доказательства применяются *правила вывода* к аксиомам, в результате чего получаются новые высказывания (предложения, пропозиции), непосредственно выводимые из аксиом. Затем те же правила применяют к новым высказываниям и т. д. Если после конечного числа шагов мы получаем некоторое завершающее наши рассуждения высказывание, то говорим, что оно формально доказуемо. Данную процедуру более точно можно выразить следующим образом: формальное доказательство некоторого высказывания S состоит в построении конечной последовательности высказываний, такой, что (1) первое высказывание есть какая-либо аксиома нашего формального языка, (2) каждое из последующих высказываний есть или некоторая аксиома, или непосредственно выводимо с помощью одного из правил вывода из каких-либо высказываний, предшествующих ему в этой последовательности, и (3) последним высказыванием в этой последовательности является S. Ни одно высказывание не может рассматриваться здесь как теорема, если для него не может быть найдено соответствующее формальное доказательство.

Метод изложения формализованной теории является в сущности довольно простым, а именно: мы сначала перечисляем аксиомы, а затем строим теоремы в таком порядке, что каждое высказывание, не являющееся некоторой аксиомой, может быть непосредственно установлено как теорема. Это установление осуществляется посредством сравнения вида данного высказывания с видом высказывания, которое предшествует ему в списке.

Гильберт, внесший огромный вклад в развитие логико-математической теории доказательств, намеревался осуществить свою программу в два этапа. На первом этапе вся математика должна быть формализована, то есть надо построить некоторую формальную систему, из аксиом которой с помощью четко определенных правил вывода можно было бы вывести по крайней мере основы математики. Такая система должна быть формальной в том смысле, что в ней следует учитывать только вид и порядок символов (их так называемый синтаксис), но никак не значение этих символов (их семантику).

На втором этапе Гильберт собирался показать следующее: применение правил вывода к аксиомам никогда не сможет привести к противоречию при условии, что логические рассуждения будут носить настолько элементарный характер, чтобы в их правильности нельзя было усомниться. С помощью таких рассуждений должна быть точно установлена метатеорема о невозможности противоречия, то есть Гильберт предлагал исследовать методы математических доказательств средствами теории доказательств (метаматематики). Он настаивал на том, чтобы в теории доказательств разрешалось пользоваться только *финитными* методами, которые позволяют избежать применения понятия "актуальная бесконечность". Новый подход должен был также позволить избежать использования "актуальной бесконечности" и в самой формулировке проблемы доказательства непротиворечивости, так как в любой теории имеется счетно-бесконечное множество доказательств, но в утверждении о ее непротиворечивости говорится лишь о произвольной паре доказательств, а не обо всем множестве доказательств как о завершенном объекте.

"Никто, - заявлял с воодушевлением Гильберт, - не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором".

Из "канторовского рая" математики действительно не были изгнаны, но правда и то, что этот "рай" оказался сущим "адом" для многих самонадеянных теоретиков математической науки. Ни Гильберту, ни его последователям не удалось выполнить намеченную программу во всем объеме, ибо они ошибались, преуменьшая глубину кризиса, в который ввергли математику антиномии.

Несомненно, писал по этому поводу Тарский, что великим достижением современной логики была замена старого психологического понятия доказательства точным, ясным и простым понятием формального характера, но именно простота нового понятия оказалась его ахиллесовой пятой. Довольно быстро обнаружилось, что чрезмерная вера в формальное доказательство как адекватный и надежный инструмент для установления истины всех математических утверждений является необоснованной.

Чтобы должным образом оценить понятие формального доказательства, нам необходимо выяснить его отношение к понятию истины, взятом не в условно-логическом смысле, а в философском. В таком случае прежде всего следует учитывать, что формальное доказательство является процедурой, стремящейся к получению новых истинных положений (теоретических высказываний). Такая процедура будет адекватной только тогда, когда все теоретические высказывания, полученные с помощью доказательства, будут истинными, а все истинные высказывания могут быть доказанными. В связи с этим естественно возникает вопрос: является ли на самом деле формальное доказательство адекватной процедурой для получения истины? Или: совпадает ли множество всех формально доказуемых высказываний со множеством всех истинных высказываний?

Логическое понятие множества истинных высказываний выражает, по словам Тарского, некий идеальный предел, который никогда не может быть достигнут, но к которому мы пытаемся приблизиться путем постепенного расширения множества доказуемых высказываний.

А теперь в свете сказанного еще раз вернемся к "наивной" теории множеств Кантора, чтобы более ясно и полно представить ее роль в развитии математики, логики и кибернетики.

Как уже выше отмечалось, теория множеств - это наука о множествах самой произвольной природы, о множествах как таковых. Синонимом "множества" являются: "совокупность", "набор", "класс", "группа" и т. п.

В работах Кантора была изложена теория так называемых *трансфинитных кардинальных* чисел. Эта теория основывалась на систематическом использовании математического понятия "актуальная бесконечность".

До Кантора математики если и говорили о бесконечности, то только как о *потенциальной бесконечности, бесконечности становящейся,* которая может стать меньше или больше любой заданной величины, но которая в то же время сама всегда остается величиной конечной, как только мы называем или пытаемся назвать какую-либо огромную величину. Короче, потенциальная бесконечность -это вечно незавершенный процесс, а из незавершенного трудно сделать что-то завершенное, пригодное для практических целей.

Теория множеств Кантора имеет дело с актуальной бесконечностью, соответственно чему автором данной теории предпринимается попытка создать математический аппарат для описания актуально бесконечных множеств. Но самое важное для нас в этой теории то, что в ней на операции с множествами и подмножествами не накладывается никаких ограничений, обусловленных природой объектов, составляющих множества. В таком случае понятия теории множеств сближаются с понятиями математической логики и аксиоматическим методом теоретических построений.

Все было бы хорошо для математики и логики, если бы в теории множеств довольно быстро не были обнаружены некоторые существенные изъяны, вызванные парадоксами или антиномиями, то есть неразрешимыми противоречиями. Чем были вызваны эти неразрешимые противоречия?

Обычно само множество не является одним из своих собственных элементов. Так, например, элементы множества всех ныне здравствующих писателей - не множества, а конкретные индивидуальности. Кажется ясным, что само множество не может принадлежать к числу своих собственных элементов. Множество писателей не есть писатель. Правда, мы сплошь и рядом имеем дело с такими множествами, элементами которых являются также множества. Скажем, в армии основными структурными элементами батальона являются роты, то есть определенные множества солдат. Но сам батальон не может быть отнесен к своим собственным элементам.

Теперь объединим в единое актуальное множество все возможные множества. Получится нечто в высшей степени странное, а именно: мы будем иметь множество, которое является своим собственным элементом.

Что говорят по этому поводу математики?

Математики говорят, что упорядоченное множество не может обладать столь абсурдным свойством, ибо упорядоченным считается множество лишь в том случае, если оно не является ни одним из своих элементов. Здесь у нас немедленно возникает новый вопрос: что собой представляет упорядоченное множество в строгом математическом смысле?

Множество называется *упорядоченным* или *линейно упорядоченным,* если на его элементах определено отношение, удовлетворяющее следующим условиям:

Для любых двух элементов a и b либо $a < b$, либо $b > a$, либо a - b.

Для любых двух элементов a и b имеет место одно и только одно из соотношений:

$a < b$, $b < a$, $a = b$.

Из $a<b$ *и* $b<c$ следует $a < c$.

Если предполагаются выполненными лишь второе и третье требования, то множество называется *частично упорядоченным* или *полуупорядоченным.*

Если $a < b$, то говорят, что a предшествует b, а b следует за a или что a находится *перед* b, а b - *после* a.

В линейно упорядоченном множестве отношений $a \leq b$ является отрицанием отношения $a \geq b$ и точно так же отношение $a > b$ является отрицанием отношения $a < b$.

Если некоторое множество упорядочено или частично упорядочено, то и каждое его подмножество упорядочено или частично упорядочено тем же самым отношением.

Как подчеркивает Б. Л. ван дер Варден, может случиться так, что упорядоченное или полуупорядоченное множество M обладает "первым элементом", который предшествует всем остальным (скажем, таково число 1 в ряду натуральных чисел).

Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным, если каждое непустое его подмножество имеет первый элемент*. Не является вполне упорядоченным множеством множество целых чисел ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... , поскольку в нем нет первого элемента. Однако его можно вполне упорядочить, если расположить его элементы, например, таким образом: 0, 1, -1, -2, ... Или, например, так: 1, 2, 3, ...; 0, -1, -2, -3, ... , где все положительные числа предшествуют остальным.

Является ли множество всех упорядоченных множеств упорядоченным?

Если подобное "супермножество" является упорядоченным, оно должно находиться в одном ряду с прочими упорядоченными множествами, то есть находиться среди своих элементов (упорядоченных множеств). Но тогда данное "супермножество" перестает быть тем, на что претендует, - множеством всех упорядоченных множеств. Чтобы не затеряться в "толпе" множеств, оно должно уподобиться голому королю, то есть вынуждено перестать быть упорядоченным и, так сказать, облаченным в королевские одежды "супермножества".

Все же допустим, что такое возможно. Что тогда?

Если множество всех упорядоченных множеств не является упорядоченным, оно не может быть отнесено к разряду своих собственных элементов - упорядоченных множеств. Но ведь именно в этом случае мы и называем множество упорядоченным, так как под упорядоченным множеством понимается множество, которое не является ни одним из своих элементов.

Итак, мы попали в какой-то замкнутый круг: если "супермножество" является упорядоченным, то это означает, что оно как бы изначально оплодотворено своей неупорядоченностью, а если оно в своей сущности не упорядоченное, то его можно упорядочить, сделав одним из многих множеств, но тогда следует забыть о королевской короне "супермножества".

Что же делать? Как разорвать этот порочный круг?

Увы, но здесь ничего не поделаешь. А раз так, то следует констатировать печальный для математиков факт: если теория множеств ошибочна в своей основе, го в математике не остается ничего неуязвимого.

И тем не менее, как ни странно, нет оснований для паники. Это тоже парадокс, но парадокс объяснимый.

Судите сами, одна из грандиозных проблем канторовской теории множеств связана с так называемой *гипотезой континуума (континуум-гипотеза)*. Что собой представляет эта гипотеза?

Если элементы двух множеств можно построить парами так, что ни один элемент одного из множеств не останется без партнера, то мы говорим, что эти множества имеют одинаковую мощность. А если сравниваемые множества бесконечны?

Отвечая на этот вопрос, еще раз обратимся к натуральному ряду чисел. Как известно, натуральные числа представляют собой лишь часть множества рациональных чисел. Это понятно. Непонятно другое, а именно: мощность множества всех рациональных чисел равна мощности всех натуральных чисел. Подобный феномен объясняется тем, что логические принципы и понятия ведут себя достаточно самобытно, то есть они опираются не столько на опыт и наблюдения, сколько на свои внутренние законы, которым безразлично, что часть равна целому.

Обратимся в качестве примера к множеству всех действительных (вещественных) чисел. Они расположены на числовой прямой непрерывно и словно слипаются. Поэтому мощность множества всех действительных чисел называется *мощностью континуума*, где под словом "континуум" понимается непрерывность.

По отношению к бесконечным множествам можно сформулировать вопрос: существует ли для каждой мощности мощность, непосредственно за ней следующая? Да, существует. Для такого утвердительного ответа Кантор обобщил понятие обычного числа и получил понятие трансфинитного числа, то есть выходящего за пределы конечного числа.

Трансфинитные числа (бесконечные мощности) ведут себя так же, как, например, и натуральные числа. По отношению к трансфинитным числам или, . ;сажем, к комплексным числам наименьшей бесконечной мощностью является мощность множества натуральных чисел.

Велика ли пропасть, разделяющая счетную и континуальную бесконечности?

Для этого надо адекватно оценить тот математический мир, который существует между любыми соседними числами натурального ряда. Оказывается, в этом мире располагается бесконечное множество точек числовой прямой. Следовательно, пропасть между счетным множеством и континуум бесконечно велика. Согласиться с этим можно, ответив на вопрос: существует ли в этой пропасти промежуточные бесконечности?

Кантор считал, что бесконечных множеств с промежуточной мощностью не существует. А может быть, все-таки существуют? Проблема! Называется она *проблемой континуума*. Эта проблема связана с вопросом о так называемой *аксиоме выбора*. Что вызвало к жизни данную аксиому?

Исходные положения канторовской теории множеств не удовлетворяли одному из основных требований математической логики - непротиворечивости системы аксиом, о чем свидетельствовали выявленные в ней противоречия.

Выход из этого кризиса ученые увидели в том, чтобы построить такую аксиоматику, которая давала бы все, что нужно, и ничего лишнего. И такая аксиоматика была построена. По имени своих авторов она получила название *системы аксиом Цермело - Френкеля*. Для успешной борьбы с противоречиями эти авторы ввели специальную *ограничительную аксиому*, запрещающую существование таких множеств, которые приводят к неразрешимым противоречиям. Из данной аксиомы следовала справедливость утверждения Кантора об отсутствии промежуточных мощностей между счетным множеством и континуумом.

Исследования в области теории множеств, проводимые Цермело, вызвали к себе пристальный интерес со стороны многих математиков. Особенно их заинтересовала теорема Цермело о вполне упорядоченных множествах, которая основывалась на принципе выбора. В чем же заключалась суть этого выбора?

Еще до работ Цермело были обнаружены некоторые парадоксы теории множеств, связанные с неаксиоматизированным ее применением. В 1904 г. Цермело опубликовал доказательство теоремы, согласно которому всякое множество можно вполне упорядочить, опираясь при этом на "аксиому выбора". Благодаря этой аксиоме в любом подмножестве заданного множества можно зафиксировать его элемент (так называемый "отмеченный элемент"). Иначе говоря, Цермело первым заметил, что многочисленные математические исследования неявно опираются на некоторую аксиому, которую он сформулировал как аксиому выбора. Суть этой аксиомы состоит в следующем: если задано некоторое множество непустых множеств, то существует "функция выбора", то есть функция, которая каждому из этих множеств сопоставляет какой-либо его элемент.

При этом считается, что каждое отдельно взятое множество предполагается непустым и, следовательно, из каждого множества всегда можно выбрать некоторый его элемент. Аксиома Цермело утверждает, что из всех таких множеств можно одновременно выбрать по элементу.

Наиболее важным следствием аксиомы выбора является теорема Цермело о полном упорядочении, которая формулируется так: *каждое множество может быть вполне упорядочено*.

Несколько упрощенно суть этой теории состоит в следующем. Пусть M -некоторое множество. Каждое собственное подмножество N в M имеет непустое дополнение $M \setminus N$. В силу аксиомы выбора существует функция $f(N)$, которая каждому собственному подмножеству N сопоставляет некоторый элемент из $M \setminus N$.

По нению ученых, важность вполне упорядоченных множеств состоит в возможности применения метода *математической индукции* в случае вполне упорядоченных множеств. Примером подобного рода индукции служит так называемая *трансфинитная индукция*. Так, чтобы доказать некоторое свойство E для всех элементов вполне упорядоченного множества, можно рассуждать следующим образом: требуется доказать, что свойством E обладает любой элемент при условии, что им обладают все элементы, предшествующие данному элементу. Тогда свойством E должен обладать каждый элемент рассматриваемого множества. Иначе существовал бы элемент, не обладающий свойством E. Более того, в этом случае существовал бы и первый элемент e среди не обладающих свойством E. Все предшествующие элементы тогда обладали бы свойством E, но соответственно и элемент e обладал бы этим свойством, что дает противоречие. Такова суть доказательства с помощью трансфинитной индукции.

Многие математики отвергли аксиому Цермело и выводы, полученные на ее основании. Однако были и такие, которые вполне приняли данную аксиому. К их числу относился и Гильберт.

Разгоревшаяся дискуссия выявила наличие нескольких подходов к проблемам обоснования математики и необходимость уточнения используемого в математике логического инструментария. Она же стимулировала исследования по аксиоматике теории множеств и математической логике в целом. Цермело принадлежит первая система аксиом этой теории.

Так противоречит или не противоречит аксиома выбора другим исходным аксиомам теории множеств?

Отвечая на этот вопрос, немецкий ученый К. Гёдель (1906-1978) показал, что, принимая истинность континуум-гипотезы, мы не вводим никаких противоречий в теорию множеств. Но дело этим не ограничилось. В 1930 г. Гёдель со всей логико-математической строгостью доказал принципиальную неполноту формализованной теории чисел. При этом доказывалась теорема, из которой однозначно следовало, что не существует финитного доказательства непротиворечивости формальной системы, достаточно полной, чтобы формализовать все финитные рассуждения. Иными словами, вопрос о полноте формализма в том абсолютном смысле, который ему придавал Гильберт, был снят Гёделем, указавшим способ построения арифметических утверждений, истинность которых интуитивно очевидна, но они тем не менее не выводятся в рамках формализма.

Эту проблему хорошо иллюстрирует пример, приводимый Тарским. Вначале выделяется два языка - *предметный язык* (или *язык-объект)* и *язык исследователя (метаязык)*. Язык исследователя должен быть богаче предметного языка, чтобы было возможным понимать и ясно, точно, определенно выражать то, чему не всегда придается значение в предметном языке. Иными словами, язык исследователя не может совпадать с предметным языком или быть полностью переводимым в него, поскольку в противном случае оба языка окажутся разновидностью одного языка, а в результате различные парадоксы и антиномии не возможно будет проанализировать и объяснить, так как более богатая по своим выразительным возможностям языковая система окажется для нас чем-то недостижимым.

С помощью языка исследователя изучается предметный язык. Например, аналогичное имеет место при изучении иностранных языков, когда в роли языка изучающего (исследователя) выступает родной язык, более богатый по сравнению со знаниями о языке, который предстоит еще изучить.

Предположим, что в качестве предметного языка нам служит язык арифметики, а в качестве языка исследователя - язык математической логики. В языке исследователя выделим ряд высказываний (предложений): S_1, S_2, ..., S_n. Эти высказывания, как мы видим, пронумерованы. Номера указывают на истинные высказывания. Условимся для краткости называть их *доказуемыми номерами*. Допустим взаимно-однозначное соответствие между высказываниями S_1, S_2, ..., S_n и рядом натуральных чисел 0, 1, 2, 3,..., и, которые будем называть *истинными номерами*. Теперь мы должны ответить на вопрос: являются ли тождественными множество доказуемых номеров и множество истинных номеров?

Ответ будет отрицательным. Очевидно, что достаточно указать только одно свойство, которое принадлежит одному множеству и не принадлежит другому, чтобы воспрепятствовать установлению отношений тождества.

Откуда может взяться это свойство? Из бесконечности или, по меньшей мере, из очень большого множества, практически бесконечного. В бесконечности или в гигантских множествах могут таиться самые неожиданные свойства, способные свести на нет все наши усилия в области теоретических построений. С учетом этого лучше проявить разумную осторожность, чем отправляться в путешествие по малоизученным мирам без карты и без компаса. И мы будем правы, ибо действительно множество доказуемых номеров не совпадает с множеством истинных номеров, поскольку то, что доказуемо на одном языке, не является таковым для другого языка. Таким образом, множество доказуемых высказываний в языке исследователя и множество истинных высказываний в предметном языке не совпадают друг с другом. Но что есть истинное высказывание? Или: что есть истина в нашем случае? Это не философский вопрос, хотя без знания философии нам не обойтись, когда затрагиваются проблемы, имеющие универсальный характер.

Поскольку дефиниция истины сама по себе не обеспечивает нас практически ценным критерием истинности, но в то же время поиски истины справедливо рассматриваются как сущность научной деятельности, то проблема нахождения по крайней мере частичных критериев истины и разработки процедур, которые могли бы позволить нам признавать или отрицать истинность как можно большего количества научных высказываний, представляется исключительно важной.

Одним из таких критериев для установления логического понятия истины в контексте математической логики является разграничение языка исследователя и предметного языка, что позволяет доказывать следующее: все аксиомы арифметики являются истинными и все правила доказательства являются в известном смысле непогрешимыми. Из этого вытекает, что все доказуемые высказывания являются истинными, тогда как обратная формулировка не имеет силы. Итак, мы приходим к главному для нас выводу, а именно: существуют высказывания (предложения), сформулированные на языке арифметики (на предметном языке), которые являются истинными, но не могут быть доказаны формально на основе аксиом и правил доказательства, принятых в арифметике.

В результате границы того, что заслуживало нашего доверия в математике и логике, стали размытыми и неопределенными. Чтобы придать им определенность, были расширены требования, предъявляемые к аксиомам, то есть к постулатам непротиворечивости, независимости и полноты был добавлен постулат *разрешимости* дедуктивной системы.

Что такое разрешимость дедуктивной системы?

Разрешимой является такая система, в которой по отношению к каждому правильно построенному высказыванию можно обосновать либо выводимость этого высказывания из аксиом системы, либо его невыводимость. Говоря другими словами, проблема разрешимости состоит в том, чтобы определить, возможно ли для данного формализованного языка вообразить некую механическую процедуру, которая позволяла бы для любого отношения из рассматриваемого формализма определить, истинно это отношение или нет. Данная проблема решаема для формализмов, содержащих мало первоначальных знаков и аксиом, но для более богатых систем это сделать невероятно трудно, если вообще возможно. Все в конечном счете упирается в проблему непротиворечивости.

Таким образом, *разрешение - это операция использования логических правил для проверки логических формул*. Суть разрешения логической формулы состоит в исследовании того, при каких подстановках "истина" (или, например, "1") или "ложь" (или, например, "О") на место переменных формула превращается в истинное или в ложное высказывание, где "истина" и "ложь" понимаются в узко логическом смысле, а не в философском. Тем самым получается ответ на вопрос, является ли логическая формула *выполнимой*, то есть переходит ли она *хотя бы при одном* подборе подстановок в истинное высказывание, и *общезначимой* (переходит ли она в истинное высказывание *при любых* подстановках).

Рассмотрим несколько математических примеров.

Как известно, вычитание - действие, обратное сложению. Деление - действие, обратное умножению.

Аналог обратных действий показывает, что они обладают одной характерной особенностью: данные действия *не всегда выполнимы*, в то время как прямые действия (сложение и умножение) *выполнимы всегда.*

Частичная невыполнимость обратных действий объясняется тем, что вычитание можно производить во всех случаях, когда уменьшаемое не меньше вычитаемого (больше или равно ему). Если же уменьшаемое меньше вычитаемого, вычитание производить нельзя. Иначе говоря, выражение $a - b$ имеет смысл, если a не меньше b $(a \geq b)$; если же a меньше b $(a < b)$ выражение $a - b$ не имеет смысла. Правда, вычитание из меньшего числа большего числа становится возможным, если к уже известному школьникам младших классов математическому знанию добавить знание отрицательных чисел. В таком случае выражение $a - b$ будет иметь смысл и при a меньше b $(a < b)$.

В связи с этим целесообразно кое-что напомнить, а именно: отрицательное число, соответствующее некоему положительному числу, обозначенному буквой a, называется *противоположным* числу a и обозначается как $-a$. Например, число противоположное числу 10, обозначается как -10; число, противоположное числу 0,12, обозначается как - 0,12; число, противоположное числу 3/14, обозначается как -3/14; и т. д. Можно также говорить, что положительное число, соответствующее отрицательному числу, называется *противоположным*. Например, число, противоположное числу -13, есть 13. Из сказанного следует, что положительные и отрицательные числа *взаимно противоположны*. Что касается нуля, то за число, противоположное числу 0, принимается само число 0.

Иногда бывает необходимым подчеркнуть противопоставление положительных чисел отрицательным. С этой целью перед положительным числом или его буквенным обозначением ставят знак +. Например, +17 обозначает просто число 17, а число +(-5) = -5. Но не так себе ведет операция вычитания.

Например, число -(-9) противоположно числу 9, а потому -(-9) = 9.

Таким образом, знакомясь с отрицательными числами, мы обнаруживаем, что введение в математику отрицательных чисел делает возможным действие, которое было *невыполнимым* в области положительных чисел и нуля. Например: что такое 11 16? Не зная отрицательных чисел, мы должны были бы рассуждать примерно так. Допустим, осуществляя операцию вычитания (11 - 16), мы каким-то невероятным образом получаем положительное число. Теперь надо проверить правильность вычитания. Для этого к полученному положительному числу следует прибавить 16 и в сумме получить 11. Всякому здравомыслящему школяру, даже не "отличнику" и не "хорошисту", ясно, что среди положительных чисел такого числа не существует, поскольку при прибавлении к числу 16 некоего положительного числа в сумме получится число большее, чем 11, в то время как 11 меньше 16. Однако, если мы знаем о существовании отрицательных чисел и о свойствах этих чисел, то можем спокойно осуществлять указанную операцию вычитания, в результате чего получим число -5. Если добавить это число к 16 (16 + (-5)), то получим 11.

В результате мы приходим к важному выводу: *если уменьшаемое меньше вычитаемого, то их разность есть отрицательное число, противоположное разности вычитаемого и уменьшаемого.*

Как видим, понятие *выполнимости* имеет вполне практическое значение, а не является какой-то особой выдумкой логиков. Аналогичное можно сказать и о понятии *общезначимости.*

Проблема разрешимости связана с логикой высказываний, которая будет рассмотрена в следующей главе.

Стремительный рост популярности аксиоматического метода был вызван свободой в выборе способов определения математических объектов и отношений между ними. В этом случае ученый-теоретик не скован требованиями эмпирического изучения каких-либо физических объектов, но его теоретические изыскания могут иметь в конечном итоге вполне реальный физический или какой-либо иной практический смысл. Поэтому его теоретические утверждения хотя бы в идеале должны быть *выполнимы* для каких-то конкретных объектов. В основе подобных теоретических утверждений находятся первичные утверждения, которые тем или иным образом указывают на интересующие нас свойства объектов теоретического конструирования и тем самым выделяют их из бесконечного числа других возможных объектов. Эти базисные утверждения, выделяющие совокупность объектов, носят название *аксиом*. Если для какой-либо конкретной совокупности объектов некоторые введенные нами аксиомы оказываются истинными, то мы говорим, что данная совокупность объектов удовлетворяет системе этих аксиом или является интерпретацией данной системы аксиом.

Для практики научного познания особенно важно в использовании аксиоматического метода знать то, что, делая логические выводы из аксиом, мы можем получать утверждения, истинные для любой системы объектов, удовлетворяющей данным аксиомам.

Совершенно ясно, что соответствие между аксиомами и предметами объективной реальности никогда не имеет прямого характера. Когда же ставится вопрос о подобном соответствии, отвечая на него, мы должны покинуть сферу чистого разума и выйти в сферу прикладных знаний, чтобы наполнить конкретным содержанием наши аксиоматические построения. Например, мы можем попытаться наполнить физическим содержанием аксиомы геометрии Евклида или Лобачевского. Но для этого необходимо указать на физические реалии, соответствующие, скажем, терминам "точка" или "прямая", которые содержатся в аксиомах. Только после этого аксиомы способны превратиться в физические утверждения, которые можно подвергнуть экспериментальной проверке.

При рассмотрении любой системы аксиом возникают специфические вопросы, которые решаются с помощью соответствующих процедур *интерпретации*. К числу этих вопросов относится вопрос о непротиворечивости системы аксиом. Появление несовместимых утверждений, выведенных нами из принятой системы аксиом, свидетельствует о том, что нашей системе аксиом не может удовлетворять никакая система объектов. Чтобы быть уверенными в надежности выбранной системы аксиом, в ее непротиворечивости, мы должны выработать *методы точной интерпретации данной системы*.

Так же обстоит дело и с вопросом о независимости аксиом. Аксиома считается независимой в данной системе, если она невыводима из остальных аксиом этой системы, не дублирует их. Для доказательства независимости какой-либо аксиомы достаточно найти систему объектов, которая удовлетворяла бы всем аксиомам системы, кроме данной аксиомы. Следовательно, чтобы смело пользоваться системой аксиом, необходимо иметь такие объекты, которые могут служить точной интерпретации этой системы аксиом.

Откуда берутся методы интерпретации аксиом?

Источником интерпретации на теоретическом уровне являются математические понятия, и в первую очередь понятия теории множеств, отражающие принципы построения множеств. К этим принципам относятся:

1. Если дано множество объектов, то посредством точно сформулированного признака можно выделить из него подмножество.

2. Если имеется совокупность множеств, то можно получить новое множество, объединив все элементы этих множеств.

3. Для каждого множества можно образовать множество всех его подмножеств.

Отношения между множествами могут иметь функциональный характер, то есть при наличии некоторого общего признака каждому элементу одного множества можно поставить в соответствие элемент другого множества. Это соответствие называется *функцией*.

Интерпретация аксиоматических систем связана с очень важным для нас вопросом - с вопросом *разрешимости* абстрактно-теоретических построений.

В логике принято считать, что *разрешимая теория непременно является аксиоматизируемой*. Так ли это?

Зададим некоторое множество формул, называемых аксиомами, а также некоторое отношение между формулами, в силу которого формула считается следующей из некоторых других формул по определенным правилам вывода. *Конечная последовательность формул называется доказательством, если каждая формула из этой последовательности либо является аксиомой, либо следует из предыдущих формул последовательности по правилам вывода*. Формула, для которой существует доказательство, называется *теоремой*.

Когда говорится о *формуле некоторой теории*, то имеется в виду не математическая формула, а *некоторое выражение нашего теоретического языка, рассматриваемое как утверждение*. Логический смысл этих утверждений станет понятен читателю из последующих глав, но уже сейчас можно отметить следующее. Если мы хотим эффективно систематизировать наши научные знания, нам необходимо научиться осуществлять процедуры вывода. Для этого нужно исходить из некоторой системы утверждений и выводить затем, прямо или косвенно, все остальные утверждения из этих исходных, то есть из аксиом. Аксиоматический метод состоит в такой организации научного знания, когда из всех истинных утверждений выбирается определенное подмножество, из которого можно вывести все остальные истинные утверждения данного раздела науки.

Формулы-утверждения называются *выполнимыми*, если существует оценка, при которой данные формулы приобретают, например, значение "истина". Если же такой оценки не существует, то говорят, что указанные формулы *невыполнимы*, то есть их значение маркируется словом "ложь".

Каждое выполнимое множество формул непротиворечиво. Верна и обратная теорема, а именно: *каждое непротиворечивое множество формул выполнимо*.

Аксиоматизируемая теория *разрешима* тогда, когда имеется чисто механический способ проверки, приложимый к любой формуле. Пользуясь таким способом проверки, мы можем ответить на вопрос, принадлежит ли данная формула нашей теории.

Лекции 8-9. Декартово произведение множеств. Отношения. Функции

1. Декартово произведение множеств.
2. Отношения.
3. Бинарные отношения.
4. n-арные отношения.
5. Произведение отношений.
6. Функции.

1. Декартово произведение множеств

Одним из способов конструирования новых объектов из уже имеющихся множеств является *декартово произведение множеств*.

Пусть A и B - множества. Выражение вида (a,b), где $a \in A$ и $b \in B$, называется *упорядоченной парой*. Равенство вида (a,b) = (c,d) означает, что a=c и b=d. В общем случае, можно рассматривать *упорядоченную n-ку* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из элементов $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Упорядоченные n-ки иначе называют *наборы* или *кортежи*.

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество упорядоченных n-ок (наборов, кортежей) вида

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$

Степенью декартового произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется число множеств n, входящих в это декартово произведение.

Замечание. Если все множества A_i одинаковы, то используют обозначение

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$.

Теорема 1 (*правило произведения*). $|A \times B| = |A| * |B|$

Следствие 1. $|A^n| = |A|^n$

2. Отношения

Подмножество R декартового произведения множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *отношением* степени n (n-арным отношением).

Мощность множества кортежей, входящих в отношение R, называют *мощностью отношения* R.

Замечание. Понятие отношения является очень важным не только с математической точки зрения. Понятие отношения фактически лежит в основе всей реляционной теории баз данных. Как будет показано ниже, отношения являются математическим аналогом *таблиц*. Сам термин «реляционное представление данных», впервые введенный Коддом, происходит от термина *relation*, понимаемом именно в смысле этого определения.

Т.к. любое множество можно рассматривать как декартовое произведение степени 1, то любое подмножество, как и любое множество, можно считать отношением степени 1. Это не очень интересный пример, свидетельствующий лишь о том, что термины «отношение степени 1» и «подмножество» являются синонимами. Нетривиальность понятия отношения проявляется, когда степень отношения больше 1. Ключевыми здесь являются два момента:

Во-первых, все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Однотипность кортежей позволяет считать их аналогами строк в простой таблице, т.е. в такой таблице, в которой все строки состоят из одинакового числа ячеек и в соответствующих ячейках содержатся одинаковые типы данных. Например, отношение, состоящее из трех следующих кортежей {(1, «Иванов», 1000), (2, «Петров», 2000), (3, «Сидоров», 3000)} можно считать таблицей, содержащей данные о сотрудниках и их зарплатах. Такая таблица будет иметь три строки и три колонки, причем в каждой колонке содержатся данные одного типа.

В противоположность этому рассмотрим множество {(1), (1, 2), (1, 2, 3)}, состоящее из *разнотипных* числовых кортежей. Это множество не является отношением ни в R, ни в R^2, ни в R^3. Из кортежей, входящих в это множество, нельзя составить простую таблицу. Правда, можно считать это множество отношением степени 1 на множестве всех возможных числовых кортежей всех возможных степеней, но такая трактовка ничего нового, по сравнению с понятием подмножества, не дает.

Во-вторых. За исключением крайнего случая, когда отношение есть само декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения. Это значит, что для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие - нет. Этот критерий, по существу, определяет для нас *смысл (семантику)* отношения.

Действительно, каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящее от n параметров (n-местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежать отношению R. Это логическое выражение называют *предикатом отношения* R. Более точно, кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда предикат этого отношения $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принимает значение «истина». В свою очередь, каждый n-местный предикат задает некоторое n-арное отношение. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между n-арными отношениями и n-местными предикатами.

Если это не вызывает путаницы, удобно и отношение, и его предикат обозначать одной и той же буквой. Например, отношение R имеет предикат $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Бинарные отношения (отношения степени 2)

В математике большую роль играют бинарные отношения, т.е. отношения, заданные на декартовом произведении двух множеств $A_1 \times A_2$.

1) Отношение эквивалентности

Отношение R на множестве A^2 называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

$(x, x) \in R$ для всех $x \in A$ (рефлексивность);

если $(x,y) \in R$, то $(y,x) \in R$ (симметричность);

если $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, то $(x,z)\in R$ (транзитивность).
Обычно отношение эквивалентности обозначают знаком = и говорят, что оно (отношение) задано на множестве A (а не на A^2). Условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:
$x=x$ для всех $x\in A$ (рефлексивность);
если $x=y$, то $y=x$ (симметричность);
если $x=y$ и $y=z$, то $x=z$ (транзитивность).
Легко доказывается, что если на множестве A задано отношение эквивалентности, то множество A разбивается на взаимно непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу элементов (*классы эквивалентности*).
Пример 1. Рассмотрим на множестве вещественных чисел R отношение, заданное просто равенством чисел. Предикат такого отношения:

$$R(x,y)=\begin{cases}\text{"истина", если } x=y\\ \text{"ложь", если } x\neq y,\end{cases}$$ или просто $x=y$.

Условия 1-3, очевидно, выполняются, поэтому данное отношение является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности этого отношения состоит из одного числа.
Пример 2. Рассмотрим более сложное отношение эквивалентности. На множестве целых чисел Z зададим отношение «равенство по модулю n» следующим образом: два числа a и b *равны по модулю n*, если их остатки при делении на n равны. Например, по модулю 5 равны числа 2, 7, 12 и т.д.
Условия 1-3 легко проверяются, поэтому равенство по модулю является отношением эквивалентности. Предикат этого отношения имеет вид:

$$R(x,y)=\begin{cases}\text{"истина", если } x=y \bmod n,\\ \text{"ложь", если } x\neq y \bmod n.\end{cases}$$

Классы эквивалентности этого отношения состоят из чисел, дающих при делении на n одинаковые остатки. Таких классов ровно n:
[0] = {0, n, 2n, …}
[1] = {1, n+1, 2n+1, …}
…
[n-1] = {n-1, n+n-1, 2n+n-1, …}
2) Отношения порядка
Отношение R на множестве A^2 называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:
$(x, x) \in R$ для всех $x\in A$ (рефлексивность);
если $(x,y)\in R$ и $(y,x)\in R$, то $x=y$ (антисимметричность);
если $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, то $(x,z)\in R$ (транзитивность).
Обычно отношение порядка обозначают знаком $\leq$. Если для двух элементов x и y выполняется $x\leq y$, то говорят, что x «предшествует» y. Как и для отношения эквивалентности, условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:
$x\leq x$ для всех $x\in A$ (рефлексивность);
если $x\leq y$ и $y\leq x$, то $x=y$ (антисимметричность);
если $x\leq y$ и $y\leq z$, то $x\leq z$ (транзитивность).
Пример 3. Простым примером отношения порядка является отношение, задаваемое обычным неравенством $\leq$ на множестве вещественных чисел R. Заметим, что *для любых чисел* x и y выполняется либо $x\leq y$, либо $y\leq x$, т.е. *любые* два числа сравнимы между собой. Такие отношения называются *отношениями полного порядка*.
Предикат данного отношения есть просто утверждение $x\leq y$.
Пример 4. Рассмотрим на множестве A всех сотрудников некоторого предприятия отношение, задаваемое следующим образом: сотрудник x предшествует сотруднику y тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

x=y;
x является начальником (не обязательно непосредственным) y.

Назовем такое отношение «быть начальником». Легко проверить, что отношение «быть начальником» является отношением порядка. Заметим, что в отличие от предыдущего примера, существуют такие пары сотрудников x и y, для которых не выполняется ни $x \le y$, ни $y \le x$ (например, если x и y являются сослуживцами). Такие отношения, в которых есть несравнимые между собой элементы, называют *отношениями частичного порядка*.

3) Функциональное отношение

Отношение R на декартовом произведении двух множеств $A_1 \times A_2$ называется *функциональным отношением*, если оно обладает следующим свойством:

если $(x,y) \in R$ и $(x,z) \in R$, то y=z (однозначность функции).

Обычно, функциональное отношение обозначают в виде *функциональной зависимости* – $(x,y) \in R$ тогда и только тогда, когда y=f(x). Функциональные отношения (подмножества декартового произведения) называют иначе *графиком функции* или *графиком функциональной зависимости*.

Предикат функционального отношения есть просто выражение функциональной зависимости y=f(x).

Рассмотрим еще один пример бинарного отношения.

Пример 5. Пусть множество A есть следующее множество молодых людей: {Вовочка, Петя, Маша, Лена}, причем известны следующие факты:

Вовочка любит Вовочку (эгоист).
Петя любит Машу (взаимно).
Маша любит Петю (взаимно).
Маша любит Машу (себя не забывает).
Лена любит Петю (несчастная любовь).

Информацию о взаимоотношения данных молодых людей можно описать бинарным отношением «любить», заданном на множестве A^2. Это отношение можно описать несколькими способами.

Способ 1. Перечисление фактов в виде произвольного текста (как это сделано выше).

Способ 2. В виде графа взаимоотношений:

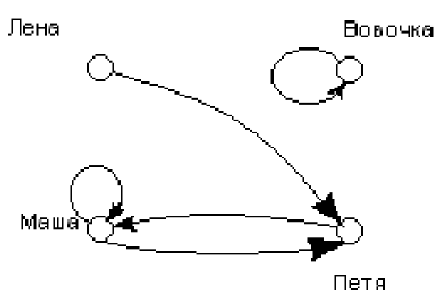


Рис. 3. Граф взаимоотношений

Способ 3. При помощи матрицы взаимоотношений:

Кого Кто	Вовочка	Петя	Маша	Лена
Вовочка	Любит			
Петя			Любит	

Маша		Любит	Любит	
Лена		Любит		

Способ 4. При помощи таблицы фактов:

Кто любит	Кого любят
Вовочка	Вовочка
Петя	Маша
Маша	Петя
Маша	Маша
Лена	Петя

С точки зрения реляционных баз данных, наиболее предпочтительным является четвертый способ, т.к. он допускает наиболее удобный способ хранения и манипулирования информацией. Действительно, перечисление фактов как текстовая форма хранения информации уместна для литературного произведения, но с трудом поддается алгоритмической обработке. Изображение в виде графа наглядно, и его удобно использовать как конечную форму представления информации для пользователя, но хранить данные в графическом виде неудобно. Матрица взаимоотношений уже больше соответствует требованиям информационной системы. Матрица удобна в обработке и компактно хранится. Но одно небольшое изменение, например, появился еще Вася и влюбился в несчастную Лену, требует перестройки *всей* матрицы, а именно, добавления *и колонок*, *и столбцов*. Таблица фактов свободна от всех этих недостатков - при добавлении новых действующих лиц просто добавляются новые строки.

Что касается предиката данного отношения, то он имеет следующий вид (дизъюнктивная нормальная форма):

R(x,y) = {(x = "Вовочка" AND y = "Вовочка") OR (x = "Петя" AND y = "Маша") OR (x = "Маша" AND y = "Петя") OR (x = "Маша" AND y = "Маша") OR (x = "Лена" AND y = "Петя")}

Замечание. Приведенное отношение не является ни транзитивным, ни симметричным или антисимметричным, ни рефлексивным, поэтому оно не является ни отношением эквивалентности, ни отношением порядка, ни каким-либо другим разумным отношением.

Замечание. Большая часть мировой литературы существует и имеет смысл лишь постольку, поскольку бинарное отношение "любить" не является отношением эквивалентности. В частности, по этой причине человечество не разбивается на классы эквивалентности взаимно любящих особей. Изучением характеристик данного отношения и соответствующего ему предиката занималось (и продолжает заниматься) большое количество экспертов, таких как Толстой Л.Н., Шекспир В. и др.

4. n-арные отношения (отношения степени n)

В математике n-арные отношения рассматриваются относительно редко, в отличие от баз данных, где наиболее важными являются именно отношения, заданные на декартовом произведении *более чем двух множеств*.

Пример 6. В некотором университете на математическом факультете учатся студенты Иванов, Петров и Сидоров. Лекции им читают преподаватели Пушников, Цыганов и Шарипов, причем известны следующие факты:

Пушников читает лекции по алгебре и базам данных, соответственно, 40 и 80 часов в семестр.

Цыганов читает лекции по геометрии, 50 часов в семестр.

Шарипов читает лекции по алгебре и геометрии, соответственно, 40 и 50 часов в семестр.

Студент Иванов посещает лекции по алгебре у Шарипова и по базам данных у Пушникова.
Студент Петров посещает лекции по алгебре у Пушникова и по геометрии у Цыганова.
Студент Сидоров посещает лекции по геометрии у Цыганова и по базам данных у Пушникова.
Для того чтобы формально описать данную ситуацию (например, в целях разработки информационной системы, учитывающей данные о ходе учебного процесса), введем три множества:
Множество преподавателей A = {Пушников, Цыганов, Шарипов}.
Множество предметов B = {Алгебра, Геометрия, Базы данных}.
Множество студентов C = {Иванов, Петров, Сидоров}.
Имеющиеся факты можно разделить на две группы. 1 группа (факты 1-3) - факты о преподавателях, 2 группа (факты 4-6) - факты о студентах.
Для того чтобы отразить факты 1-3 (характеризующие преподавателей и читаемые ими лекции), введем отношение R_1 на декартовом произведении $A \times B \times Q$, где Q - множество рациональных чисел. А именно, упорядоченная тройка $(x,y,n) \in R_1$ тогда и только тогда, когда преподаватель x читает лекции по предмету y в количестве n часов в семестр. Назовем такое отношение «Читает лекции по…». Множество кортежей, образующих отношение R_1 удобно представить в виде таблицы:

A (Преподаватель)	B (Предмет)	Q (Количество часов)
Пушников	Алгебра	40
Пушников	Базы данных	80
Цыганов	Геометрия	50
Шарипов	Алгебра	40
Шарипов	Геометрия	50

Для того чтобы отразить факты 4-6 (характеризующие посещение студентами лекций), введем отношение R_2 на декартовом произведении $C \times B \times A$. Упорядоченная тройка $(z,y,x) \in R_2$ тогда и только тогда, когда студент z посещает лекции по предмету y преподавателя x. Назовем это отношение «Посещать лекции». Его также представим в виде таблицы:

C (студент)	B (предмет)	A (Преподаватель)
Иванов	Алгебра	Шарипов
Иванов	Базы данных	Пушников
Петров	Алгебра	Пушников
Петров	Геометрия	Цыганов
Сидоров	Геометрия	Цыганов
Сидоров	Базы данных	Пушников

Рассмотрим отношение R_2 подробнее. Оно задано на декартовом произведении $\Omega = C \times B \times A$. Это произведение, содержащее 3*3*3=27 кортежей, можно назвать «Студенты-Лекции-Преподаватели». Множество Ω представляет собой совокупность *всех* возможных вариантов посещения студентами лекций. Отношение же R_2 показывает *текущее* состояние учебного процесса. Очевидно, что отношение R_2 является изменяемым во времени отношением.
Итак, факты о ходе учебного процесса удалось отразить в виде двух отношений третьей степени (3-арных), а сами отношения изобразить в виде таблиц с тремя колонками.
Удобство использования табличной формы для задания отношения определяется в данном случае следующими факторами:
1) все используемые множества *конечны*;
2) при добавлении или удалении студентов, предметов, преподавателей просто добавляются или удаляются соответствующие строки в таблице.

Нас сейчас не интересует вопрос, хороши ли полученные отношения. Заметим пока только, что, как показывают следующие замечания, не любую строку можно добавить в таблицу «Посещать лекции».

Замечание. В таблицу «Посещать лекции» нельзя добавить две одинаковые строки, т.к. таблица изображает отношение R_2, а в отношении (как и в любом множестве) *не может быть двух одинаковых элементов*. Это пример *синтаксического ограничения* - такое ограничение задано в определении понятия отношение (одинаковых строк не может быть *ни в одной таблице*, задающей отношение).

Замечание. В таблицу «Посещать лекции» нельзя добавить кортеж (Иванов, Геометрия, Пушников). Действительно, из таблицы «Читает лекции по…», представляющей отношение R_1, следует, что Пушников *не читает* предмет "Геометрия". Оказалось, что таблицы связаны друг с другом, и существенным образом! Это пример *семантического ограничения* - такое ограничение является следствием нашей трактовки данных, хранящихся в отношении (следствием понимания *смысла* данных).

5. Произведение отношений

Пусть $G \subseteq A \times B$ - отношение из A в B, $H \subseteq B \times C$ отношение из B в C. *Произведением (суперпозицией)* отношений называется отношение из A в C вида: $G \circ H = \{<a, c> \mid \forall b \in B \ <a, b> \in G \ \& \ <b, c> \in H\}$.

Теорема 2. Суперпозиция обладает следующими свойствами:

Ассоциативность суперпозиции: $(G \circ H) \circ F = G \circ (H \circ F)$.

Взятие обратного к произведению: $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$.

Нейтральность тождественного отношения:

$G \circ I_B = G$, где G – отношение из A в B, I_B – тождественное отношение на B;

$I_A \circ G = G$, где I_A – тождественное отношение на A.

Взятие второго обратного и второго дополнения: $(G^{-1})^{-1} = G$; $\overline{\overline{G}} = G$.

6. Функции

Пусть $G \subseteq A \times B$ - отношение из A в B. Тогда: *областью определения* G называется множество $D \subseteq A$, состоящее только из тех элементов множества A, которые участвуют в отношении G: $D = \{a \in A \mid \exists b \in B : <a, b> \in G\}$.

Областью значений G называется множество $E \subseteq B$, состоящее только из тех элементов множества B, которые участвуют в отношении G:

$E = \{b \in B \mid \exists a \in A : <a, b> \in G\}$.

Отношение называется *всюду определенным (тотальным)*, если $D = A$.

Отношение называется *сюръективным*, если $E = B$.

Отношение F называется *функциональным или однозначным*, если каждому элементу из области определения соответствует единственный элемент из области значений: $(\forall a \in D)$ $\exists! \, b : <a, b> \in F$.

Отношение F называется *инъективным*, если каждому элементу из области значений соответствует единственный элемент из области определения:

$(\forall b \in E)$ $\exists! \, a : <a, b> \in F$.

Если отношение F - функционально, то F^{-1} - инъективно.

Тотальное функциональное отношение F называется *функцией или отображением* из A в B и обозначается $F: A \to B$.

Если функция $F : A \to B$ инъективна и сюръективна, то она называется *биекцией* A на B, или взаимно-однозначным соответствием A на B.

Лекция 10. Понятие вероятности

Событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Примерами событий являются:
A – выпадение герба при бросании монеты;
B – попадание в цель при выстреле;
C – появление туза при вынимании карты из колоды.
Каждое из перечисленных событий обладает какой-то степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей. Причем для событий A и C сразу видно, что событие A более возможно, чем C. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, нужно с каждым событием связать определенное число, которое называется вероятностью события.

Вероятность события – это численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A обозначается через P(A) и определяется как отношение числа благоприятных случаев m к общему числу случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} \times 100\,\%$$ - в процентах

Например, если стрелок при заданных условиях стрельбы из 100 выстрелов попадает в цель 92 раза, то вероятность попадания в цель для него равна 0,92 или 92%. На самом деле, в каждой серии из 100 выстрелов попаданий может получиться немного больше или меньше, чем 92, но в среднем их будет примерно 92.

Пример. В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

n = 2+3 = 5, m = 2, $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$

Вероятность события всегда есть положительное число либо нуль. При этом она не может быть больше 1, потому что у дроби, которой она определяется, числитель не может быть больше знаменателя (т.е. число благоприятных случаев не может быть больше общего числа всех исследуемых случаев).

Итак, $0 \le P(A) \le 1$.

Чем больше P(A), тем чаще наступает событие A. Если вероятность события очень мала, то оно наступает крайне редко. Если же P(A) = 0, то событие A либо никогда не наступает, либо наступает крайне редко, так что практически можно считать его невозможным.

Итак, ***невозможным событием*** называется событие, вероятность которого равна нулю: P(A) = 0.

И наоборот, если P(A) близко к 1, то подавляющее большинство случаев являются благоприятными, т.е. событие A наступает в большинстве случаев. Если же P(A) = 1, то событие A наступает всегда или почти всегда, так что практически можно считать его достоверным, т.е. наверняка рассчитывать на его наступление.

Итак, ***достоверным событием*** называется событие, вероятность которого равна единице: P(A) = 1.

Принцип практической уверенности заключается в следующем:

Если вероятность некоторого события A весьма мала, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном выполнении опыта событие A не произойдет.

Если $P(A) = \frac{1}{2}$, то событие A наступает примерно в половине всех случаев.

Если $P(A) > \frac{1}{2}$, то событие A наступает чаще, чем не наступает;

при P(A) < $\frac{1}{2}$ мы имеем обратное явление.

Пример. В некотором городе в течение первого квартала родились:
в январе – 145 мальчиков и 135 девочек,
в феврале – 142 мальчика и 136 девочек,
в марте – 152 мальчика и 140 девочек.
Как велика вероятность рождения мальчика?
Соответствующие вероятности вычисляются следующим образом:

в январе: $\frac{145}{280} \approx 0{,}518 = 51{,}8$ %,

в феврале: $\frac{142}{278} \approx 0{,}511 = 51{,}1$ %,

в марте: $\frac{152}{292} \approx 0{,}520 = 52{,}0$ %.

Среднее арифметическое вероятностей за эти месяцы близко к числу 0,516=51,6%
Задачи:
1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится "орел".
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях - четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.
3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна трем.
4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенные грани.

Лекция 11-12. Элементы комбинаторики

1. Правило суммы.
2. Правило произведения.
3. Перестановки.
4. Размещения.
5. Выборка.
6. Сочетания.

При использовании классической формулы вероятности для решения конкретных задач числовые значения входящих в формулу величин m и n не всегда очевидны. Поэтому их определение требует применения правил и формул комбинаторики.

1. Правило суммы

Правило суммы: если элемент x можно выбрать n_x способами и если, после его выбора, элемент y можно выбрать n_y способами, то выбор «либо x, либо y» можно осуществить $n_x + n_y$ способами.

2. Правило произведения

Правило произведения: если элемент x можно выбрать n_x способами и если, после его выбора, элемент y можно выбрать n_y способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) можно осуществить $n_x * n_y$ способами.
Пример: 3 белых и 7 черных шаров перемешаны и распределены по двум урнам поровну (т.е. по 5 в каждую). Из любой урны (из первой либо из второй) наугад выбирают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

$n = 5+5 = 10$, $m = 3$, $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\ \%$

А теперь случайным образом сначала выбирают 1 шар из первой урны, а затем – 1 шар из второй урны. Определить общее количество возможных вариантов упорядоченных пар шаров.
Согласно правилу произведения, $n = 5*5 = 25$.

<u>3. Перестановки</u>

Перестановками без повторений из n различных элементов называются все возможные последовательности этих n элементов.
Например, перестановки без повторений из n=3 различных элементов <a, b, c> таковы: <a, b, c>; <b, a, c>; <c, a, b>; <a, c, b>; <b, c, a>; <c, b, a> (всего их 6).
Число перестановок без повторений из n элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле: $P_n = n! = 1*2*\ldots*n$, например, $P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$.
Задача. По следствию должны пройти пять человек: A, B, C, D, E. Какова вероятность того, что в списке этих пяти человек, составленном случайным образом, B будет следовать сразу после A?
Список из пяти человек можно составить n=5! Способами – это общее число возможных ситуаций. Благоприятными будут те из них, в которых B следует сразу после A, т.е. следующие:

1) A, B, ?, ?, ? – таких списков $P_3 = 3!$, так как последовательность трех букв C, D, E на последних трех местах – это некоторая перестановка из трех элементов,
2) ?, A, B, ?, ? – таких списков тоже 3!,
3) ?, ?, A, B, ? – таких списков тоже 3!,
4) ?, ?, ?, A, B – таких списков тоже 3!.

Поэтому в соответствии с правилом суммы число списков, в которых B следует сразу после A, равно $m = 3! + 3! + 3! + 3! = 4*3!$

Искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{4*3!}{5!} = 0{,}2 = 20\ \%$

<u>4. Размещения</u>

Размещениями без повторений из n различных элементов по m элементов ($m<n$) называются все такие последовательности m различных элементов, выбранных из исходных n, которые отличаются друг от друга или <u>порядком следования элементов, или составом элементов</u>.
Например, размещения без повторений из n=3 различных элементов <a, b, c> по m=2 элементов таковы: <a, b>; <b, a>; <a, c>; <c, a>; <b, c>; <c, b> (всего их 6).
Число размещений без повторений из n элементов по m обозначают A_n^m и вычисляют по формуле: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, например, $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 6$.

<u>5. Выборка</u>

Пусть имеется совокупность n элементов, пронумерованных числами 1, 2, …, n, которую назовем *генеральной совокупностью*. Если теперь случайным образом выбрать из нее m элементов ($m<n$), не возвращая отбираемые элементы обратно, то в результате окажется выбранной некоторая группа из m элементов, которая называется *m-выборкой без возвращения* из генеральной совокупности объема n. Общее количество таких m-выборок равно числу размещений без повторений из n по m, т.е. $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Задача. В фирме работают 8 человек одинаковой квалификации, среди них Иванов, Петров, Сидоров. Случайно выбранным трем из них (из восьми) поручают три различных вида работ (первому выбранному – работу первого вида, второму выбранному – второго вида, третьему – третьего вида). Какова вероятность того, что работа первого вида будет поручена – Иванову, второго – Петрову, а третьего – Сидорову?

Отбор трех человек из восьми – это выборка без возвращения. Поэтому общее число вариантов отбора из n=8 по m=3 равно $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$.

И только в одном варианте из этих 336 работа первого вида будет поручена Иванову, второго – Петрову, а третьего – Сидорову. Поэтому искомая вероятность равна $P = \frac{1}{336}$.

6. Сочетания

Сочетаниями без повторений из n различных элементов по m элементов (m<n) называются все такие последовательности m различных элементов, выбранных из исходных n, которые отличаются друг от друга только составом элементов.

Например, сочетания без повторений из n=3 различных элементов <a, b, c> по m=2 элементов таковы: <a, b>; <a, c>; <b, c> (всего их 3).

Число сочетаний без повторений из n элементов по m обозначают C_n^m и вычисляют по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, например, $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!*1!} = 3$.

Задача. Студент должен был подготовиться к экзамену по 20 вопросам, но он успел выучить только 5 из них. Преподаватель случайным образом сформировал из этих 20 вопросов 10 билетов (по 2 вопроса в каждом, причем вопросы в билетах не повторяются). Какова вероятность того, что студент сможет вытащить билет, в котором: а) попадутся оба знакомых ему вопроса; б) попадется только один знакомый ему вопрос?

Общее число возможный ситуаций равно числу способов, которыми студент может случайным образом выбрать 2 вопроса из 20 имеющихся, то есть оно равно числу сочетаний без повторений из 20 различных элементов по 2 элемента:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{18!*19*20}{2!*18!} = \frac{19*20}{2} = 190.$$

а) Число благоприятных ситуаций равно числу способов, которыми можно выбрать 2 из 5 выученных вопросов, т.е. $m = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{3!*4*5}{2!*3!} = \frac{4*5}{2} = 10$

Искомая вероятность при этом равна $P = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19} \approx 0{,}05 \approx 5$ %.

б) Число благоприятных ситуаций равно числу способов, которыми можно выбрать 1 из 5 выученных вопросов и одновременно с этим 1 из 15 не выученных вопросов. Согласно правилу произведения, это число равно m = 5*15 = 75.

Искомая вероятность при этом равна $P = \frac{m}{n} = \frac{5*15}{C_{20}^2} = \frac{75}{190} \approx 0{,}4 \approx 40$ %.

Задача. Наряд милиции прибыл по вызову на место, где происходила драка. В этот момент там находились 4 участника драки и 6 случайных прохожих. Милиционеры попытались задержать их всех, но им удалось поймать лишь 7 человек. Какова вероятность того, что среди задержанных лиц окажутся 3 правонарушителя?

$n = C_{10}^{7} = 120$, $m = C_4^{3} * C_6^{4} = 60$, $P = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = 0{,}5 = 50\ \%$.

Сочетаниями с повторениями из элементов k типов по m элементов называются все такие последовательности m элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличаются друг от друга только составом элементов.

Например, сочетания с повторениями из элементов двух типов, k=2: тип "a" и тип "b" по m=3 элементов таковы: <a, a, a>; <b, a, a>; <b, b, a>; <b, b, b> (всего их 4).

Число сочетаний с повторениями из k типов элементов по m элементов обозначают $\overline{C_k^m}$ и вычисляют по формуле: $\overline{C_k^m} = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$.

Например, $\overline{C_2^3} = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!*1!} = 4$.

Задача. Инвестор формирует портфель ценных бумаг. Он может вложить свои деньги в акции 5 различных фирм. Сколькими способами инвестор может образовать набор из 7 акций и какова вероятность того, что в набор попадут 4 акции, принадлежащие различным фирмам?

Итак, мы имеем k=5 типов акций, принадлежащих различным фирмам. Из них мы формируем набор по m=7 акций, причем в данном наборе акции одного и того же типа (одной и той же фирмы) могут повторяться. Поэтому общее число возможных наборов равно $n = \overline{C_5^7} = \frac{(5+7-1)!}{7!(5-1)!} = \frac{11!}{7!*4!} = 330$.

Среди этих наборов количество наборов с четырьмя акциями, принадлежащими различным фирмам, равно числу сочетаний без повторений из 5 элементов (5 различных фирм) по 4 элемента: $m = C_5^{4} = \frac{5!}{4!*1!} = 5$.

Искомая вероятность равна $P = \frac{m}{n} = \frac{C_5^4}{\overline{C_5^7}} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$.

Творческая задача. Известно, что 5 из 40 пассажиров автобуса замешаны в похищении крупной суммы денег. На остановке к автобусу подошел инспектор уголовного розыска и произвел обыск у 6 наугад выбранных пассажиров. Какова вероятность того, что среди них будет обнаружен по крайней мере один преступник?

Лекция 13-14. Теорема сложения вероятностей и ее следствия

1. Теорема сложения вероятностей.
2. Следствия из теоремы сложения вероятностей.

1. Теорема сложения вероятностей

Пример. Пассажир ждет трамвая № 5 или № 8 на остановке, у которой останавливаются трамваи четырех маршрутов: № 2, 3, 5, 8. Считая, что трамваи всех маршрутов появляются в среднем одинаково часто, найти вероятность того, что первым к остановке подойдет трамвай нужного маршрута.

P(№ 5) = ¼; P(№ 8) = ¼; P(№ 5 либо № 8) = ¼ + ¼ = ½.

P(A либо B) = P(A) + P(B) или P(A + B) = P(A) + P(B)

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Доказательство: Пусть в результате проведения опыта возможны n ситуаций или случаев. Предположим, что их них m случаев благоприятны событию А, а k случаев – событию В. Тогда:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \qquad P(B) = \frac{k}{n}.$$

Так как события А и В несовместны, то нет таких случаев, которые благоприятны и А, и В одновременно. Следовательно, событию (А + В) благоприятны m + k случаев и

$$P(A + B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Теорема доказана.

Данную теорему можно обобщить на произвольное число несовместных событий, то есть: $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

или $$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Задача. В лотерее участвуют 1000 билетов. Из них на 1 билет падает выигрыш 5000 руб., на 10 билетов – выигрыши по 1000 руб., на 50 билетов – выигрыши по 200 руб., на 100 билетов – выигрыши по 50 руб., остальные билеты – невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 200 руб.

Решение. Рассмотрим события: А – выиграть не менее 200 руб.;

A_1 – выиграть 200 руб.; A_2 – выиграть 1000 руб.; A_3 – выиграть 5000 руб.

$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}061$

Обратим внимание на то, что теорема сложения вероятностей может применяться только для <u>несовместных</u> событий, т.е. для событий, которые не могут произойти одновременно. Например, подошедший трамвай не может быть одновременно № 5 и № 8.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,7. Найти вероятность поражения мишени, если оба стрелка стреляют в нее одновременно.

Пусть Р (А) = 0,8 – вероятность попадания первого стрелка, Р (В) = 0,7 – вероятность попадания второго стрелка, Р (С) – вероятность поражения мишени обоими стрелками одновременно.

Если применить теорему сложения вероятностей, то получим, что

$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 = 1{,}5 > 1$, что само по себе абсурдно, т.к. вероятность должна быть $0 \le P(C) \le 1$.

Ошибка заключается в том, что события А и В не являются несовместными, поскольку в мишень могут попасть одновременно и первый, и второй стрелок.

Для совместных событий вероятность суммы этих событий определяется другой формулой:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$.

$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 – 0{,}56 = 0{,}94$

Эту же формулу можно переписать в другом виде, определяющем вероятность произведения событий:

$P(AB) = P(A) + P(B) – P(A + B)$.

<u>2. Следствия из теоремы сложения вероятностей</u>

Пример. При подбрасывании монеты может выпасть орел (с вероятностью ½) либо цифра (с вероятностью ½). Сумма этих вероятностей ½ + ½ = 1, и это не случайно.

Пусть мы имеем n несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, таких, что в каждой единичной операции обязательно должно наступить одно и только одно из этих событий. Такая группа событий называется *полной группой несовместных событий*. Для нее справедливо следующее очень важное следствие из теоремы сложения вероятностей.

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несовместны, то к ним применима теорема сложения вероятностей:
$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$.
Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них есть достоверное событие, вероятность которого равна 1.
Что и требовалось доказать.
Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу.
Примеры:
1) А – выпадение герба при бросании монеты, $\overline{A}$ - выпадение цифры;
2) В – попадание при выстреле, $\overline{B}$ - промах при выстреле;
3) С – обнаружение преступника среди наугад отобранных лиц, $\overline{C}$ - не обнаружение преступника.
Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Это следствие является частным случаем следствия 1. Его очень часто применяют на практике для вычисления вероятности события А через вероятность противоположного события $\overline{A}$ по следующей формуле: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
Задача. Круговая мишень состоит из трех зон: I, II и III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле равна 0,15; во вторую – 0,23; в третью – 0,17. Найти вероятность промаха.
Решение. Обозначим события: А – попадание, $\overline{A}$ – промах.
$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

Лекция 15-16. Теорема умножения вероятностей и ее следствия

1. Теорема умножения вероятностей.
2. Следствия из теоремы умножения вероятностей.

1. Теорема умножения вероятностей
Пример 1. Рассмотрим два события, происходящих при бросании двух монет:
А – появление орла на первой монете,
В – появление орла на второй монете.
В данном случае вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет, т.е. событие А не зависит от события В.
Событие А называется *независимым от события* В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.
Пример 2. В урне – два белых шара и один черный. Два человека вынимают из урны по одному шару. Рассмотрим два события:
А – появление белого шара у первого человека,
В – появление белого шара у второго человека,
С – появление черного шара у второго человека.
Вероятность события А $P(A) = ⅔$, а вероятность события В при условии, что событие А произошло, равна ½. Следовательно, событие В зависит от события А.

Событие B называется *зависимым от события* A, если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место другое событие A, называется *условной вероятностью события* B и обозначается $P_A(B)$.

Для последнего примера P (A) = ⅔ - безусловная вероятность,

а $P_A(B) = ½$ и $P_A(C) = ½$ – условные вероятности.

Условие независимости события B от события A можно записать в виде:

$$P_A(B) = P(B),$$

а условие зависимости – в виде:

$$P_A(B) \neq P(B).$$

Задача. Многолетние наблюдения показали, что из 100 000 детей, достигших десятилетнего возраста, до 40 лет доживает в среднем 82 277, а до 70 лет – 37977. Найти вероятность того, что если человек достигнет сорокалетнего возраста, то он доживет и до 70 лет.

Решение. Рассмотрим события: A – достижение 70-летнего возраста,

B – достижение 40-летнего возраста. Тогда:

$P(A) = \frac{37\,977}{100\,000} = 0{,}37977 \approx 0{,}38$; $P_B(A) = \frac{37\,977}{82\,277} \approx 0{,}46$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие состоялось:

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B).$$

Доказательство. Пусть все возможные исходы опыта сводятся к n случаям. Предположим, что событию A благоприятны m случаев, событию B – k случаев, а событиям A и B – l случаев. Тогда:

$$P(AB) = \frac{l}{n}; \qquad P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вычислим $P_A(B)$, т.е. условную вероятность события B в предположении что событие A произошло: $P_A(B) = \frac{l}{m}$.

Таким образом, $P(A)\cdot P_A(B) = \frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m} = \frac{l}{n} = P(AB)$.

Теорема доказана.

Очевидно, что теорему умножения можно записать и в обратном виде:

$$P(AB) = P(B)\, P_B(A).$$

Задача. В урне – 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба они будут белыми.

$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0{,}1.$

Задача. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

2. Следствия из теоремы умножения вероятностей

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

Доказательство. Дано, что событие A не зависит от события B, т.е.

$$P_B(A) = P(A).$$

Требуется доказать, что и событие B не зависит от события A, т.е.

$$P_A(B) = P(B).$$

Согласно теореме умножения вероятностей, $P(AB) = P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)$.

Так как $P_B(A) = P(A)$, то $P(A)\ P_A(B) = P(B)\ P(A)$.
Разделив обе части равенства на $P(A)$, получим $P_A(B) = P(B)$.
Что и требовалось доказать.
Из следствия 1 вытекает, что зависимость или независимость событий – всегда взаимны. Итак, два события называются *взаимно независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.
Следствие 2. Вероятность совместного наступления двух взаимно независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)\ P(B).$$

Вероятность совместного наступления любого числа взаимно независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\ P(A_2)\ \ldots\ P(A_n).$$

Задача. По подозрению в совершении преступления задержаны два человека. Вероятность совершения преступления для первого из них равна 0,5, а для второго – 0,8. Какова вероятность того, что оба задержанных замешаны в совершении преступления?
Задача. В условиях предыдущей задачи: какова вероятность того, что хотя бы один из задержанных совершил преступление?
$P(A) = P(A_1$ или A_2 или … или $A_n) = 1 - P(\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ и … и $\overline{A_n}) =$
$= 1 – [1 – P(A_1)] \cdot [1 – P(A_2)] \cdot \ldots \cdot [1 – P(A_n)]$.
Задача. Для разрушения моста достаточно попадания одной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
Если $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$, то $P(A) = 1 – (1 – p)^n$.
Задача. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.
Задача. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно: 0,4; 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени будет ровно одна пробоина.
Задача. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.
Творческая задача. Монета подбрасывается 6 раз. Найти вероятность того, что выпадет больше орлов, чем цифр.

Лекция 17. Формула полной вероятности

1. Формула полной вероятности.
2. Практическое применение формулы полной вероятности.

1. Формула полной вероятности

Пример. Имеются три одинаковые урны. В первой урне – 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.
A_1 – выбор первой урны, A_2 – выбор второй урны, A_3 – выбор третьей урны, К – появление белого шара.
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$
$P_{A1}(K) = 2/3$; $P_{A2}(K) = 3/4$; $P_{A3}(K) = 1/2$
$K = A_1K + A_2K + A_3K$
$P(K) = P(A_1K) + P(A_2K) + P(A_3K)$
$P(K) = P(A_1)P_{A1}(K) + P(A_2)P_{A2}(K) + P(A_3)P_{A3}(K)$

$$P(K) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{8+9+6}{36} = \frac{23}{36} \approx 0{,}64$$

Пусть требуется определить вероятность некоторого события К, которое может произойти вместе с одним из событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу несовместных событий. Будем эти события называть *гипотезами*.

В этом случае: $P(K) = P(A_1)P_{A_1}(K) + P(A_2)P_{A_2}(K) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(K)$

или $P(K) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(K)$.

Доказательство. Так как гипотезы A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу, то событие К может появится только в комбинации с какой-либо из этих гипотез, то есть: $K = A_1K + A_2K + \ldots + A_nK$.

Так как гипотезы A_1, A_2, …, A_n несовместны, то и комбинации A_1K, A_2K, …, A_nK также несовместны. Поэтому к ним можно применить теорему сложения вероятностей:

$$P(K) = P(A_1K) + P(A_2K) + \ldots + P(A_nK) = \sum_{i=1}^{n} P(A_iK)$$

Далее, применяя к событию A_iK теорему умножения вероятностей, получаем:

$$P(K) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(K),$$

что и требовалось доказать.

2. Практическое применение формулы полной вероятности

Задача. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5; при третьем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

Рассмотрим четыре гипотезы: A_0 – в самолет не попало ни одного снаряда,
A_1 – в самолет попал один снаряд,
A_2 – в самолет попало два снаряда,
A_3 – в самолет попало три снаряда.

$P(A_0) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P(A_1) = 0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3 + 0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}3 + 0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7 = 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}36$

$P(A_2) = 0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3 + 0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}7 + 0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7 = 0{,}06 + 0{,}14 + 0{,}21 = 0{,}41$

$P(A_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$

Условные вероятности события К (выхода самолета из строя) при этих гипотезах равны:

$P_{A_0}(K) = 0$; $P_{A_1}(K) = 0{,}2$; $P_{A_2}(K) = 0{,}6$; $P_{A_3}(K) = 1$.

$P(K) = P(A_0)P_{A_0}(K) + P(A_1)P_{A_1}(K) + P(A_2)P_{A_2}(K) + P(A_3)P_{A_3}(K)$

$P(K) = 0{,}09\cdot0 + 0{,}36\cdot0{,}2 + 0{,}41\cdot0{,}6 + 0{,}14\cdot1 = 0 + 0{,}072 + 0{,}246 + 0{,}140 = 0{,}458$

Лекция 18. Формула Байеса

1. Формула Байеса.
2. Практическое применение формулы Байеса.

1. Формула Байеса

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез A_1, A_2, …, A_n. Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно $P(A_1)$, $P(A_2)$, …, $P(A_n)$. Произведен опыт, в результате которого наступило некоторое событие К. Спрашивается, как изменятся вероятности гипотез в связи с появлением этого события?

Практически, здесь речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P_K(A_i)$ для каждой гипотезы.
Согласно теореме умножения вероятностей,
$P(A_iK) = P(A_i)P_{A_i}(K)$ и $P(A_iK) = P(K)P_K(A_i)$.
$P(A_i)P_{A_i}(K) = P(K)P_K(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$P_K(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(K)}{P(K)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Выражая P(K) с помощью формулы полной вероятности, получаем:

$$P_K(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(K)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(K)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Данная формула носит название *формулы Байеса* или *теоремы гипотез*.

2. Практическое применение формулы Байеса

Задача. При обследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний: A_1, A_2, A_3. Их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A_2) = \frac{1}{6}; \quad P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Для уточнения диагноза назначен анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае заболевания A_1, с вероятностью 0,2 в случае заболевания A_2 и с вероятностью 0,9 в случае заболевания A_3. Анализ был произведен 5 раз и дал 4 раза положительный результат и 1 раз отрицательный. Требуется найти вероятность каждого заболевания после анализа.

Решение. Пусть событие K состоит в том, что произведенный пять раз анализ дал 4 раза положительный результат и 1 раз отрицательный. Тогда:
$P_{A1}(K) = C_5^4 \times (0{,}1)^4 \cdot 0{,}9$; $P_{A2}(K) = C_5^4 \times (0{,}2)^4 \cdot 0{,}8$; $P_{A3}(K) = C_5^4 \times (0{,}9)^4 \cdot 0{,}1$.
По формуле полной вероятности имеем:
$P(K) = P(A_1)P_{A1}(K) + P(A_2)P_{A2}(K) + P(A_3)P_{A3}(K) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot C_5^4 \times (0{,}1)^4 \cdot 0{,}9 + \frac{1}{6} \cdot C_5^4 \times (0{,}2)^4 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot C_5^4 \times (0{,}9)^4 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}11064.$$

Далее по формуле Байеса находим:

$$P_K(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(K)}{P(K)} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot C_5^4 \times (0{,}1)^4 \cdot 0{,}9}{0{,}11064} \approx 0{,}002;$$

$$P_K(A_2) = \frac{P(A_2)P_{A_2}(K)}{P(K)} \approx \frac{\frac{1}{6} \cdot C_5^4 \times (0{,}2)^4 \cdot 0{,}8}{0{,}11064} \approx 0{,}01;$$

$$P_K(A_3) = \frac{P(A_3)P_{A_3}(K)}{P(K)} \approx \frac{\frac{1}{3} \cdot C_5^4 \times (0{,}9)^4 \cdot 0{,}1}{0{,}11064} \approx 0{,}988.$$

Задача. Два стрелка независимо один от другого стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; а для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку. *Решение*:
A_1 – ни первый, ни второй стрелок не попадет;
A_2 – оба стрелка попадут;

A_3 – первый стрелок попадет, а второй не попадет;
A_4 – первый стрелок не попадет, а второй попадет.

$P(A_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$; $P(A_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$;

$P(A_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$; $P(A_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

Событие К – в мишени получилась ровно одна пробоина.

$P_{A1}(K) = 0$; $P_{A2}(K) = 0$; $P_{A3}(K) = 1$; $P_{A4}(K) = 1$

Далее – по формуле Байеса.